Mathématiques générales, B
Examen écrit du 07 janvier 2008 (1ère session)

Correction

2e année de bachelier en chimie

Question 1) On fixe un repère orthonormé de l'espace. On donne la droite d et le plan π par leurs équations cartésiennes

$$d \ : \ \left\{ \begin{array}{l} x - y = 0 \\ x - z = 1 \end{array} \right. \ , \quad \pi \ : \ x + y + 2z = 1.$$

1.1) Déterminer la distance entre d et π.
1.2) Déterminer la distance entre le point P_0 de coordonnées $(1, 0, -1)$ et le plan π.
1.3) Déterminer des équations cartésiennes de la droite d_0 passant par le point P_0 et parallèle à d.
1.4) Déterminer des équations paramétriques cartésiennes du plan π.

Solution. 1.1) Le système d'équations

$$\left\{ \begin{array}{l} x - y = 0 \\ x - z = 1 \\ x + y + 2z = 1 \end{array} \right.$$

possède la solution unique $\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, -\frac{1}{4}\right)$. Cela signifie que l'intersection de d et π est le point dont les coordonnées sont $\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, -\frac{1}{4}\right)$; en particulier, la distance entre la droite et le plan est nulle puisque leur intersection n'est pas vide.

1.2) La distance entre P_0 et π est

$$\frac{|1 + 0 - 2 - 1|}{\sqrt{1 + 1 + 4}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

1.3) Un vecteur directeur de d a pour composantes $(1, 1, 1)$; il s'ensuit que des équations cartésiennes de d_0 sont

$$x - 1 = y = z + 1.$$

1.4) Les composantes d'un vecteur directeur de π sont fournies par une solution de l'équation homogène $x + y + 2z = 0$. Ainsi, les vecteurs de composantes $(1, -1, 0)$ et $(-2, 0, 1)$ sont les composantes de vecteurs directeurs du plan, linéairement indépendants. Un point du plan a pour coordonnées $(1, 0, 0)$. Il s'ensuit que des équations paramétriques cartésiennes du plan sont

$$\left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right) + r \left(\begin{array}{c} 1 \\ -1 \\ 0 \end{array} \right) + s \left(\begin{array}{c} -2 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right) \quad r, s \in \mathbb{R}.$$

Question 2) Soient les fonctions f, g suivantes

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \pi - |x| & \textbf{si } x \in [-\pi, \pi] \\ 0 & \textbf{sinon} \end{array} \right. \ , \quad g(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \textbf{si } x \in [-\pi, \pi] \\ 0 & \textbf{sinon} \end{array} \right.$$

Représenter f et g dans un repère orthonormé. Déterminer les transformées de Fourier (-) de ces fonctions et montrer que l'on a

$$\left(\mathcal{F}_y^- g\right)^2 = 4\mathcal{F}_{2y}^- f$$

quel que soit le réel y.

Solution. Les fonctions f et g sont continues sur $[-\pi, \pi]$ et nulles en dehors. Elles sont donc bien intégrables dans $\mathbb{R}$ et l'on a successivement

$$\mathcal{F}_y^- f = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-iyx}(\pi - |x|) \ dx = 2\int_0^{\pi} \cos(xy)(\pi - x) \ dx = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{4\sin^2(\pi y/2)}{y^2} & \text{si } y \neq 0 \\ \pi^2 & \text{si } y = 0 \end{array} \right.$$

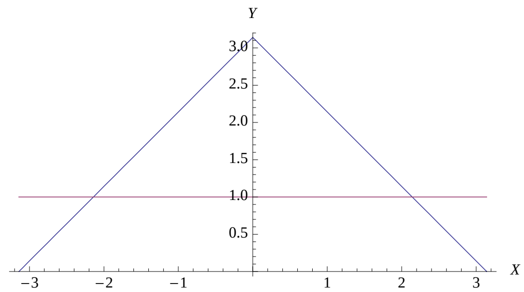
et

$$\mathcal{F}^-_y g = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-iyx}\ dx = 2\int_0^{\pi} \cos(xy)\ dx = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{2\sin(\pi y)}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ 2\pi & \text{si } y = 0. \end{array} \right.$$

Dès lors

$$4\mathcal{F}^-_{2y} f = 4 \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\sin^2(\pi y)}{y^2} & \text{si } y \neq 0 \\ \pi^2 & \text{si } y = 0 \end{array} \right\} = \left(\mathcal{F}^-_y g\right)^2$$

On a les représentations suivantes (g est représenté par le segment horizontal)



Question 3) Soit la fonction f donnée sur $[0, 2\pi]$ par $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$.
3.1) Développer cette fonction en série trigonométrique de Fourier dans $L^2([0, 2\pi])$; exprimer votre réponse en utilisant uniquement des fonctions $\sin, \cos$ et simplifier les calculs au maximum.
3.2) En déduire que

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

3.3) Représenter f et sa première approximation (premier terme du développement en série trigonométrique de Fourier) dans un même repère orthonormé.

Solution. Dans $L^2([0, 2\pi])$, une base pour le développement en série trigonométrique de Fourier consiste en les fonctions $u_m(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{imx},\ m \in \mathbb{Z}$.

3.1) Les coefficients du développement de f sont

$$c_m = < f, u_m > = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-imx}\ dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\pi}{im} & \text{si } m \neq 0 \\ 0 & \text{si } m = 0. \end{array} \right.$$

Dès lors, dans $L^2([0, 2\pi])$, on a

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m \neq 0} \frac{\pi}{im} e^{imx} = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{e^{imx} - e^{-imx}}{2im} = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\sin(mx)}{m}.$$

3.2) Vu la valeurs des coefficients du développement de f, on a

$$\|f\|^2 = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\pi - x}{2}\right)^2 dx = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |c_m|^2 = \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\pi^2}{m^2} = \pi \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2}.$$

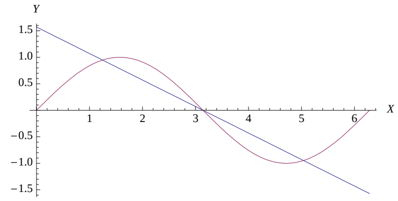
Comme

$$\|f\|^2 = \int_0^{2\pi} \left(\frac{x - \pi}{2}\right)^2 dx = \frac{2}{3} \left[\left(\frac{\pi - x}{2}\right)^3 \right]_0^{2\pi} = \frac{\pi^3}{6}$$

on en déduit que

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

3.3) Voici la représentation de f et de $x \mapsto \sin x$.



Question 4) 4.1) Déterminer les éventuels extrema libres (locaux, globaux) des fonctions suivantes (définies sur $\mathbb{R}^2$). Justifier vos réponses.

$$f_1(x,y) = x^2 - e^{y^2}, \qquad f_2(x,y) = |x| + |y|$$

4.2) On donne $f(x,y) = x^2 + 4y^3$ et $g(x,y) = x^2 + 2y^2$. Déterminer les éventuels extremas globaux de f sous la contrainte $g(x,y) = 1$.

Solution. 4.1) La fonction f_1 est indéfiniment continûment dérivable dans $\mathbb{R}^2$; ses points stationnaires sont les solutions du système

$$\begin{cases} D_x f_1 = 0 \\ D_y f_1 = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ -2ye^{y^2} = 0. \end{cases}$$

La seule solution est le couple $(0,0)$ et comme la matrice hessienne

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} D_x^2 f_1 & D_y D_x f_1 \\ D_x D_y f_1 & D_y^2 f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2e^{y^2}(1+2y^2) \end{pmatrix}$$

possède les valeurs propres de signes distincts -2 et 2 en ce point stationnaire, celui-ci n'est pas un extremum.

La fonction f_2 admet le minimum global $(0,0)$ puisque $f_2(0,0) = 0 \le f_2(x,y) = |x| + |y|, \ \forall x, y$. Elle n'admet pas de maximum global puisque, par exemple, $\lim_{x\to+\infty} f_2(x,y) = +\infty$ quel que soit y.

Examinons si elle admet un maximum local. Si celui-ci existe, il se situe sur l'un des axes car, dans le complémentaire des axes, la fonction est de classe C_∞ et ses dérivées partielles de s'annulent pas. Cela étant, on a $f_2(x_0, 0) < f_2(x_0, y)$ pour tout $y \ne 0$ et tout x_0, ce qui montre qu'aucun point de l'axe X ne peut être maximum local; de même pour un point de l'axe Y. En conclusion, il n'y a pas de maximum local.

4.2) Les extrema globaux existent puisqu'il s'agit d'extrémaliser une fonction continue, à valeurs réelles, sur un ensemble borné et fermé.

Première méthode: les multiplicateurs de Lagrange. Résolvons le système

$$\begin{cases} D_x f = \lambda D_x g \\ D_y f = \lambda D_y g \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$$

On a

$$\begin{cases} 2x = \lambda 2x \\ 12y^2 = \lambda 4y \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3y^2 = \lambda y \\ 2y^2 = 1 \end{cases} \text{ou} \begin{cases} \lambda = 1 \\ 3y^2 = y \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3y^2 = \lambda y \\ 2y^2 = 1 \end{cases} \text{ou} \begin{cases} \lambda = 1 \\ y = 0 \\ x^2 = 1 \end{cases} \text{ou} \begin{cases} \lambda = 1 \\ 3y = 1 \\ x^2 = 1 - \frac{2}{9} \end{cases}$$

c'est-à-dire les couples $((x,y))$ suivants

$$(0, \frac{\sqrt{2}}{2}), \ (0, -\frac{\sqrt{2}}{2}), \ (1,0), \ (-1,0), \ (\frac{\sqrt{7}}{3}, \frac{1}{3}), \ (-\frac{\sqrt{7}}{3}, \frac{1}{3}).$$

Les valeurs de f en ces points sont respectivement

$$\sqrt{2}, \ -\sqrt{2}, \ 1, \ 1, \ \frac{25}{27}, \ \frac{25}{27}.$$

Il s'ensuit que le minimum global est $-\sqrt{2}$ et est atteint en $(0, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ et que le maximum global est $\sqrt{2}$ et est atteint en $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

Seconde méthode. Une seconde méthode consiste à utiliser directement la contrainte: $x^2 = 1 - 2y^2$. On est alors amené à rechercher les extrema globaux de $F(y) = 1 - 2y^2 + 4y^3, \ y \in [-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$.

Troisième méthode. On peut aussi directement utiliser la contrainte sous la forme $x = \cos t, \ y = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin t, \ t \in [0, 2\pi]$ et rechercher les extrema globaux de $F(t) = \cos^2 t + 2\sqrt{2}\sin^3 t, \ t \in [0, 2\pi]$.