Mathématiques générales, B
Examen écrit du 11 janvier 2008 (1ère session)
Correction

2e année de bachelier en informatique

Question 1) On fixe un repère orthonormé de l'espace. On donne la droite d et le plan π par leurs équations cartésiennes

$$d \ : \ \left\{ \begin{array}{l} x - y = 0 \\ x - z = 1 \end{array} \right. , \quad \pi \ : \ x + y - 2z = 1.$$

1.1) Déterminer la distance entre d et π.
1.2) Déterminer l'équation cartésienne du ou des plans contenant d et orthogonaux au plan π.

Solution. 1.1) Un vecteur directeur de d a pour composantes $(1,1,1)$ et un vecteur normal au plan a pour composantes $(1,1,-2)$; ces deux vecteurs étant orthogonaux, on obtient que d et π sont parallèles. Cela étant, si P_0 est un point de d, la distance entre d et π est egale à la distance entre P_0 et π; par exemple, avec $P_0(0,0,-1)$, on obtient que la distance cherchée est égale à

$$\frac{|0+0+2-1]}{\sqrt{1+1+4}} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

1.2) L'équation cartésienne d'un plan contenant d est

$$r(x-y) + s(x-z-1) = 0$$

avec r, s non simultanément nuls. Un vecteur normal à un tel plan a pour composantes $(r+s, -r, -s)$. On doit alors exprimer l'orthogonalité d'un tel plan avec π, dont un vecteur normal a pour composantes $(1,1,-2)$. Analytiquement, cela s'exprime par

$$r + s - r + 2s = 0, \quad \text{avec } (r,s) \neq (0,0).$$

Les solutions sont donc $(r,0),\ r \neq 0$. Il s'ensuit qu'un seul plan répond à la question et qu'il a pour équation

$$x - y = 0.$$

Question 2) Soit la fonction f définie par $f(x) = e^{-2|x|},\ x \in \mathbb{R}$.
2.1) Déterminer les transformées de Fourier de cette fonction.
2.2) En déduire la valeur de

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x^2+4} dx.$$

Solution. La fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}$ (car continue sur $\mathbb{R}$ et telle que $\lim_{x\to\infty} x^2 f(x) = 0$).
2.1) On a directement (quel que soit le réel y)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_y^{\pm} f = \int_{\mathbb{R}} e^{\pm ixy} f(x) \ dx &= 2\int_0^{+\infty} \cos(xy) e^{-2x} \ dx \\ &= 2\Re \int_0^{+\infty} e^{-ixy} e^{-2x} \ dx \\ &= 2\Re \frac{1}{2+iy} = 2\Re \frac{2-iy}{4+y^2} \\ &= \frac{4}{4+y^2}. \end{aligned}$$

2.2) On a

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x^2+4} dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{2ix} \frac{1}{x^2+4} dx = \frac{1}{8} \mathcal{F}_2^{+} \mathcal{F}^{-} f = \frac{2\pi}{8} f(2) = \frac{\pi}{4} e^{-4}.$$

Question 3) Soit la fonction f donnée sur $[-\pi, \pi]$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4} & \textbf{si } x \in [0, \pi] \\ -\frac{\pi}{4} & \textbf{si } x \in [-\pi, 0[. \end{cases}$$

3.1) Développer cette fonction en série trigonométrique de Fourier dans $L^2([-\pi, \pi])$; exprimer votre réponse en utilisant uniquement des fonctions $\sin, \cos$ et simplifier les calculs au maximum.
3.2) En déduire la valeur des deux sommes suivantes

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2m+1)^2}, \qquad \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1}.$$

Solution. Une base orthonormée pour le développement en série de Fourier est formée des fonctions $e_m(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{imx},\ m \in \mathbb{Z}$.

3.1) Les coefficients de f dans cette base sont les suivants (on se sert du fait que f est une fonction impaire): $< f, e_0 >= 0$ et, si m est un entier non nul

$$\begin{aligned} < f, e_m >= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{e_m(x)} dx &= -i \frac{\pi}{2\sqrt{2\pi}} \int_0^{\pi} \sin(mx)\ dx \\ &= \frac{i\pi}{2m\sqrt{2\pi}} ((-1)^m - 1) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } m \text{ est pair} \\ \frac{-i\pi}{m\sqrt{2\pi}} & \text{si } m \text{ est impair} \end{cases} \end{aligned}$$

Dès lors, on obtient (convergence dans L^2)

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{-i\pi e^{i(2m+1)x}}{2m+1} + \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{-i\pi e^{-i(2m+1)x}}{-(2m+1)} = \frac{i}{2} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{e^{-i(2m+1)x} - e^{i(2m+1)x}}{2m+1} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\sin((2m+1)x)}{2m+1}.$$

3.2) Comme la fonction f est constante par morceaux, on sait que son développement en série de Fourier converge vers $f(x)$ en tout réel $x \in]-\pi, \pi[$ où f est continu. En prenant l'égalité précédente en $x = \frac{\pi}{2}$, on trouve

$$f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{4} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\sin((2m+1)\pi/2)}{2m+1} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1}.$$

De même, l'expression de la norme de f en termes de ses coefficients de Fourier donne

$$\frac{\pi^3}{8} = \|f\|^2 = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |< f, e_m >|^2 = 2 \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\pi^2}{(2m+1)^2 2\pi} = \pi \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2m+1)^2}$$

donc

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Question 4) On donne les fonctions f_1, f_2 par

$$f_1(x, y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \quad f_2(x, y) = xy.$$

4.1) Déterminer les points stationnaires et les extrema libres locaux éventuels de f_1. Ceux-ci sont-ils globaux? Pourquoi?
4.2) Déterminer les points stationnaires de f_2, ainsi que ses extrema libres locaux éventuels. Ceux-ci sont-ils globaux? Pourquoi?
4.3) Déterminer les éventuels extremas globaux de f_2 sous la contrainte $x^2 + y^2 = 1$.

Solution. 4.1) La fonction f_1 est définie dans le complémentaire des axes du repère et y indéfiniment continûment dérivable. Ses extrema eventuels sont des points stationnaires; recherchons donc ceux-ci. On doit résoudre le système (en les variables réelles x, y)

$$\begin{cases} D_x f_1 = 0 \\ D_y f_1 = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} y - \frac{1}{x^2} = 0 \\ x - \frac{1}{y^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{x^2} \\ x - x^4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Le seul point stationnaire est donc $(1, 1)$. En ce point, la matrice hessienne de f vaut

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ses deux valeurs propres sont strictement positives (par exemple parce que son déterminant et sa trace sont strictement positifs); il s'ensuit que le point stationnaire est un minimum local strict.

Ce minimum n'est pas global car, par exemple

$$\lim_{x \to 0^-} f(x, 1) = -\infty.$$

4.2) La fonction f_2 est définie dans $\mathbb{R}^2$ et y indéfiniment continûment dérivable. Ses extrema eventuels sont des points stationnaires; recherchons donc ceux-ci. On doit résoudre le système (en les variables réelles x, y)

$$\begin{cases} D_x f_2 = y = 0 \\ D_y f_2 = x = 0 \end{cases}$$

Le seul point stationnaire est donc $(0, 0)$. En ce point, la matrice hessienne de f vaut

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ses deux valeurs propres sont de signe opposé (par exemple parce que son déterminant est strictement négatif); il s'ensuit que le point stationnaire n'est pas extremum.

4.3) Les extrema globaux existent car il s'agit d'extrémaliser une fonction continue sur un ensemble fermé borné.

Cherchons les extrema sous la contrainte par la méthode des multiplicateurs de Lagrange. On doit résoudre le système suivant (en x, y, λ)

$$\begin{cases} D_x f_2 = y = \lambda D_x g = 2x\lambda \\ D_y f_2 = x = \lambda D_y g = 2y\lambda \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

On a

$$\begin{cases} y = 2x\lambda \\ x = (2\lambda)^2 x \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x\lambda \\ 1 = (2\lambda)^2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x\lambda \\ 1 = 2\lambda \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = 2x\lambda \\ -1 = 2\lambda \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ 1 = 2\lambda \\ 2x^2 = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = -x \\ -1 = 2\lambda \\ 2x^2 = 1 \end{cases}$$

Finalement, les solutions (en (x, y), c'est-à-dire en les points stationnaires du lagrangien $f - \lambda g$) sont

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

La fonction admet donc le minimum $-1/2$, atteint en $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ et en $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; elle admet aussi le maximum $1/2$, atteint en $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ et en $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Pour trouver ces extrema, on aurait pu directement exprimer la contraite par $x = \cos t$, $y = \sin t$ et rechercher les extrema de $F(t) = \sin t \cos t = \frac{\sin(2t)}{2}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Question 5) Etudier la convergence de la suite numérique $\frac{2^m}{m!}$, $m \in \mathbb{N}_0$.

Solution. Cet exercice a été résolu au cours d'une répétition. (La suite converge vers 0.)