Mathématiques générales, B
Examen écrit du 24 janvier 2008 (1ère session)

Correction

2e année de bachelier en géomatique-géométrologie

Question 1

On considère que la longueur d'un grand cercle du globe terrestre (supposé sphérique) est égale à 40 000 km.

a) Un mile nautique est défini comme étant la distance entre deux points du globe situés sur un même méridien et séparés par une minute d'arc. Que vaut cette distance en kilomètres?

b) Calculer la distance (en km) entre les villes A **(Londres) et** B **(Macau) dont les latitude et longitude respectives sont données ci-dessous.**

A**:** $51°30'$ **latitude nord,** $0°10'$ **longitude ouest**

B**:** $22°14'$ **latitude nord,** $113°35'$ **longitude est.**

Solution. (Dans ce qui suit, la notation décimale est représentée avec des points.)

a) Cette distance est égale à

$$\frac{40\ 000}{2\pi}\ \frac{2\pi}{360}\ \frac{1}{60} \simeq 1.852 \text{ km}$$

b) On considère le triangle sphérique dont les côtés ont une mesure en degrés égale à $90-51.5$, $90-22.23$ et x (mesure du côté du triangle sphérique joingnant Londres et Macau). L'angle de ce triangle opposé au côté x a une mesure égale à 113.75 degrés. Notons X la distance entre Londres et Macau (en kilomètres). En utilisant la formule fondamentale (des cosinus)

$$\cos x = \sin(51.5)\ \sin(22.23)\ +\ \cos(51.5)\ \cos(22.23)\ \cos(113.75)$$

on trouve

$$X = \frac{40\ 000}{2\pi}\frac{2\pi}{360}x = \frac{40\ 000}{360}x \simeq 9\ 593\text{km}$$

Question 2

On fixe un repère orthonormé de l'espace. On donne la droite d **et le plan** π **par leurs équations cartésiennes**

$$d\ :\ \begin{cases} x-y=0 \\ x-z=1 \end{cases},\qquad \pi\ :\ x+y-2z=1.$$

a) Déterminer l'équation cartésienne de la droite passant par le point de coordonnées $(1,1,-1)$ **et parallèle à la droite** d**.**

b) Déterminer des équations paramétriques cartésiennes de π**.**

c) Déterminer la distance entre d **et** π**.**

Solution. a) Un vecteur directeur de d a pour composantes $(1,1,1)$. Dès lors, des équations cartésiennes de la droite parallèle à d et passant par le point donné sont

$$x-1=y-1=z+1$$

ou encore

$$\begin{cases} x-y=0 \\ x-z=2 \end{cases}$$

b) Les composantes d'un vecteur directeur de π sont fournies par une solution non nulle de l'équation homogène $x+y-2z=0$. Ainsi, les vecteurs de composantes $(1,-1,0)$ et $(2,0,1)$ sont les composantes de vecteurs directeurs du plan, linéairement indépendants. Un point du plan a pour coordonnées $(1,0,0)$. Il s'ensuit que des équations paramétriques cartésiennes du plan sont

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad r,s\in\mathbb{R}.$$

c) Un vecteur directeur de d a pour composantes $(1,1,1)$ et un vecteur normal au plan a pour composantes $(1,1,-2)$; ces deux vecteurs étant orthogonaux, on obtient que d et π sont parallèles. Cela étant, si P_0 est un point de d, la distance entre d et π est egale à la distance entre P_0 et π; par exemple, avec $P_0(0,0,-1)$, on obtient que la distance cherchée est égale à

$$\frac{|0+0+2-1]}{\sqrt{1+1+4}} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

Question 3

Soit un signal f (f intégrable et de carré intégrable). On définit *l'autocorrélation* du signal par

$$E_f(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{f(x-t)}\ dx, \qquad t \in \mathbb{R}$$

et la *densité spectrale de puissance* de ce signal par

$$D_f(y) = \left|\widehat{f}(y)\right|^2, \qquad y \in \mathbb{R}$$

où $\widehat{f}(y)$ désigne la transformée de Fourier négative de f en y.

Soit le signal $f = \chi_{[-\pi,\pi]}$.

a) Déterminer la densité spectrale de f.

b) Déterminer l'autocorrélation de f

c) Montrer que cette densité spectrale et cette autocorrélation sont liées par la transformée de Fourier.

Solution. Voir TD de décembre 2007 et examen de 2bac chimie janvier 2008.

a) Soit $y \in \mathbb{R}$. On a directement

$$\widehat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} f(x)\ dx \ = \ \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ixy} dx = 2\int_0^{\pi} \cos(xy)dx = \begin{cases} 2\pi & \text{si } y = 0 \\ 2\frac{\sin(y\pi)}{y} & \text{si } y \neq 0 \end{cases}$$

donc

$$D_f(y) = \begin{cases} 4\frac{\sin^2(y\pi)}{y^2} & \text{si } y \neq 0 \\ 4\pi^2 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

b) On doit calculer

$$\begin{aligned} E_f(t) &= \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{f(x-t)}\ dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \chi_{[-\pi,\pi]\cap[t-\pi,t+\pi]}(x)\ dx \\ &= \begin{cases} \text{longueur de l'intervalle } [-\pi,\pi]\cap[t-\pi,t+\pi] & \text{s'il n'est pas vide} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

quel que soit le réel t. Si $t < -2\pi$ ou $t > 2\pi$, on a $[-\pi,\pi]\cap[t-\pi,t+\pi] = \emptyset$ donc

$$E_f(t) = 0$$

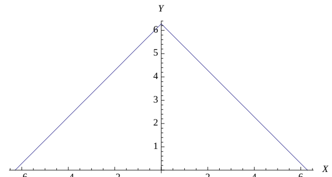
Lorsque $-2\pi \leq t \leq 0$, on a $[-\pi,\pi]\cap[t-\pi,t+\pi] = [-\pi,t+\pi]$ donc

$$E_f(t) = t + 2\pi.$$

Lorsque $0 \leq t \leq 2\pi$, on a $[-\pi,\pi]\cap[t-\pi,t+\pi] = [-\pi+t,\pi]$ donc

$$E_f(t) = 2\pi - t.$$

On peut donc tout simplement écrire $E_f(t) = 2\pi - |t|$ si $t \in [-2\pi, 2\pi]$ et $E_f(t) = 0$ sinon. Sa représentation graphique est la suivante



c) Comme f est pair, réel et que sa transformée de Fourier est réelle aussi, on a (voir aussi TD de décembre 2007)

$$D_f(y) = \left|\widehat{f}(y)\right|^2 = \widehat{f}(y)\ \widehat{f}(y) = \widehat{(f * f)}(y)$$

et

$$(f * f)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\ f(t-x)\ dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\ f(x-t)\ dx = E_f(t).$$

Il s'ensuit que la transformée de Fourier (-) de l'autocorrélation E_f est égale à la densité spectrale D_f.

On peut bien sûr aussi obtenir cela en calculant directement et explicitement la transformée de Fourier de la densité spectrale (ou de l'autocorrélation).

Question 4) On donne les fonctions f_1, f_2, f_3 par

$$f_1(x,y) = x^2 + y^2, \quad f_2(x,y) = x^4 - y^4, \quad f_3(x,y) = 2x + y.$$

a) Déterminer les points stationnaires et les extrema libres locaux éventuels de f_1. Ceux-ci sont-ils globaux? Pourquoi?
b) Déterminer les points stationnaires et les extrema libres locaux éventuels de f_2. Ceux-ci sont-ils globaux? Pourquoi?
c) Déteminer les éventuels extrema globaux de f_1 sous la contrainte $f_3(x,y) = 1$.
d) Déterminer les éventuels extremas globaux de f_2 sous la contrainte $f_1(x,y) = 1$.

Solution. Les points stationnaires d'une fonction dérivable f dans un ouvert s'obtiennent en résolvant le système

$$\begin{cases} D_x f(x,y) = 0 \\ D_y f(x,y) = 0 \end{cases}$$

et la matrice hessienne de f en un point (x,y) de l'ouvert est

$$\begin{pmatrix} D_x^2 f(x,y) & D_x D_y f(x,y) \\ D_x D_y f(x,y) & D_y^2 f(x,y) \end{pmatrix}$$

a) Le seul point stationnaire de f_1 est $(0,0)$. Il est évident que c'est un minimum global car $f_1(x,y) \geq f_1(0,0)$ pour tous (x,y).

b) Le seul point stationnaire de f_2 est $(0,0)$. En ce point, la matrice hessienne est nulle et la méthode standard ne permet pas de conclure. Par contre, comme $f_2(x,0) = x^4 > 0 = f_2(0,0)$ en tout x non nul et comme $f_2(0,y) = -y^4 < 0 = f_2(0,0)$ en tout y non nul, on peut conclure que ce point staionnaire n'est pas un extremum.

c) On a $f_3(x,y) = 1 \ \Leftrightarrow \ y = 1 - 2x$ avec $x \in \mathbb{R}$. Il s'agit donc en fait de rechercher les extrema de $F(x) = f_1(x, 1-2x),\ x \in \mathbb{R}$. On a $F(x) = x^2 + 1 - 4x + 4x^2 = 5x^2 - 4x + 1$ (la fonction F se représente donc par une parabole d'axe parallèle au second axe du repère). Comme $DF(x) = 10x - 4,\ D^2F = 10$, cette fonction admet un minumum global en $x = 5/2$; celui-ci vaut $F(5/2) = 89/4$. Il n'y a pas de maximum.

Sous la contrainte $f_3 = 1$, la fonction f_1 admet ainsi un minimum global en $(1,-1)$ et celui-ci vaut -1.

d) Etant donné qu'il s'agit d'extrémaliser une fonction continue sur un compact, on sait qu'il existe un maximum global et un minimum global et que ceux-ci sont réalisés. Vu la forme particulière de la fonction et de la contrainte, plusieurs méthodes se présentent directement: multiplicateurs de Lagrange, paramétrisation habituelle de la contrainte par les fonctions trigonométriques sin et cos, expression de x^2 en fonction de y^2 et remplacement immédiat dans f_2 ($f_1(x,y) = 1$ si et seulement si $y^2 = 1 - x^2$ avec $x \in [-1,1]$). Quelle que soit la méthode, on trouve que f_2 sous la contrainte $f_1 = 1$ admet un maximum global en $(1,0)$ et $(-1,0)$ (celui-ci vaut 1) et un minimum global en $(0,1)$ et $(0,-1)$ (celui-ci vaut -1).