Compléments de maths 2008/2009
Ecrit du 05 01 09 2Bac Chimie & Inform

Correction (résumé)

Question 1 a) On a $x-y+z-2=0 \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y+z-2 \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Comme les vecteurs de composantes $(-1,1,0)$ et $(1,0,1)$ sont lin^t ind., des équations paramétriques cartésiennes de π sont

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad r, s \in \mathbb{R}$$

b) Un vecteur normal $\vec{n}$ au plan a pour composantes $(1,-1,1)$ et un vecteur directeur $\vec{v}$ de la droite a pour composantes $(-1,-1,2)$. Ces deux vecteurs n'étant pas orthogonaux, d et π ne sont pas parallèles.

c) Les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{v}$ n'étant pas parallèles, d et π ne sont pas orthogonaux.

d) On résoud le système $\begin{cases} x-y+z-2=0 \\ x-y=3 \\ x+y+z=0 \end{cases}$; sa sol est $(2,-1,-1)$, coord. cart. du pt d'inters. de d et π

e) $x+3y+2z+3=0$

Question 2 La fonction donnée est intégrable sur $\mathbb{R}$ (puisque $x \mapsto x$ est int. sur $[-\pi,\pi]$). On a

$$\mathcal{F}^+_y f = \int_{\mathbb{R}} e^{ixy} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ixy}\, x\,dx = 2i\int_0^{\pi} \sin(xy)\, x\,dx$$

$$= \begin{cases} 2i\left(\dfrac{\sin(\pi y) - \pi y\cos(\pi y)}{y^2}\right) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

Question 3 a) On a

$$\langle f, g_m \rangle = \int_{-1}^{1} \sin(\pi x)\ \sin(\pi m x)\, dx = 2\int_{0}^{1} \sin(\pi x)\sin(\pi m x)\, dx$$

$$= -\int_0^1 \left(\cos(\pi(m+1)x) - \cos(\pi(m-1)x) \right) dx$$

$$= -\left[\frac{\sin(\pi(m+1)x)}{\pi(m+1)}\right]_0^1 + \left[\frac{\sin(\pi(m-1)x)}{\pi(m-1)}\right]_0^1$$

$$= 0$$

b) On a

$$\underbrace{\int_{-1}^{1} x \sin(\pi x)\, dx}_{\frac{2}{\pi}} = \sum_{m=1}^{+\infty} a_m \int_{-1}^{1} \sin(\pi m x)\sin(\pi x)\, dx = \underbrace{a_1 \int_{-1}^{1} \sin^2(\pi x)\, dx}_{a_1}$$

Question 4 a) $f \in C_\infty(\mathbb{R}^2)$; points stat. donnés par les sol du système

$$\begin{cases} D_x f = y = 0 \\ D_y f = x = 0 \end{cases}$$

Un pt stat : $(0,0)$; pas extremum car $f(0,0) = 0 < x^2 = f(x,x)$ et $f(0,0) = 0 > -x^2 = f(x,-x)$ quel que soit $x \neq 0$ (aussi petit que l'on veut)

b) Les extrema globaux de f sous la contrainte $g = 1$ existent puisque f est continu sur $\mathbb{R}^2$ et que $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = 1\}$ est un borné fermé.

Méthode des mult. de Lagrange :

- Rech. des sol (x, y, λ) de $\begin{cases} D_x f = y = \lambda D_x g = 8\lambda x \\ D_y f = x = \lambda D_y g = 2\lambda y \\ 4x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 8\lambda x \\ x = 16\lambda^2 x \\ 4x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 8\lambda x \\ 4x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 1 = 16\lambda^2 \\ y = 8\lambda x \\ 4x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

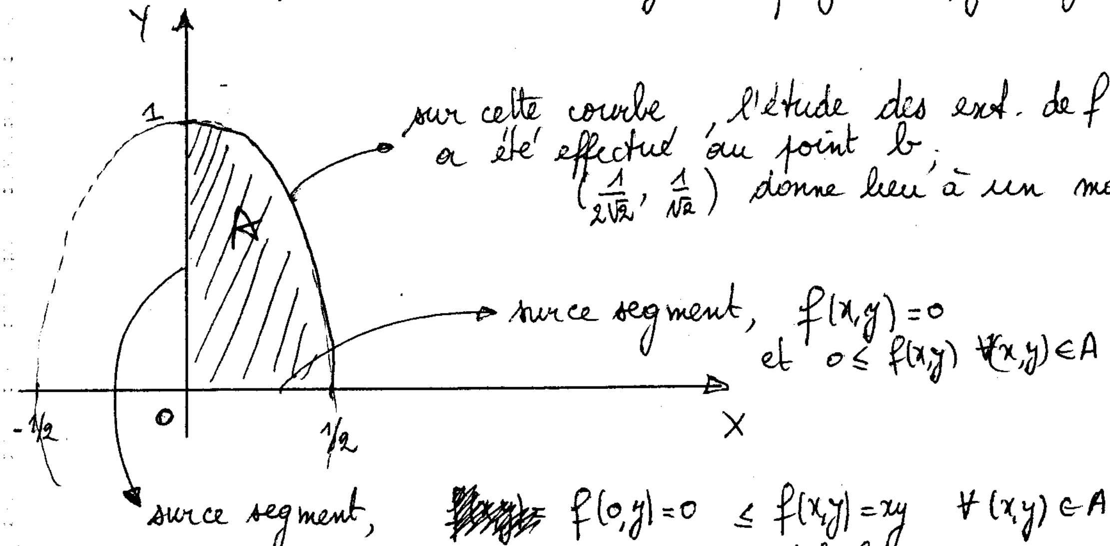
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{1}{4} \\ y = 2x \\ 8x^2 = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \lambda = -1/4 \\ y = -2x \\ 8x^2 = 1 \end{cases}$$

Les pts stat. du Lagrangien sont $\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ & $\left(\frac{-1}{2\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ & $\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ & $\left(\frac{-1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

• On a $f\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f\left(\frac{-1}{2\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{4}$ et $f\left(\frac{-1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = -1/4$ donc $(1/2\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ et $(-1/2\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ donnent un max global, $(-1/2\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ et $(1/2\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ donnent un min global.

c) Les extrema globaux de f dans l'ens. donné existent (m̂ justif. que en b)).

Soit (x_0, y_0) un tel extremum. Si $(x_0, y_0) \in \{(x,y) : x>0, y>0, g(x,y)<1\}$ = ens. ouvert, alors $D_x f(x_0, y_0) = 0 = D_y f(x_0, y_0)$ donc $y_0 = 0 = x_0$, ce qui est contradictoire. Donc (x_0, y_0) appartient "au bord" de l'ensemble, ~~...~~ $A = \{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0, g(x,y) \leq 1\}$



En conclusion : - $\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ donne un max global
- tous les points des segments sur les axes donnent lieu à un min global

Question 5 (inform.)

a) On a $x_0 \leq 0$ et si $x_n \leq 0$ alors $x_{n+1} = \frac{2x_n}{3-x_n} \leq 0$ comme quotient de deux réels de signes opposés

b) On a $x_{n+1} - x_n = \frac{2x_n}{3-x_n} - x_n = \frac{2x_n - 3x_n + x_n^2}{3-x_n} = \frac{x_n^2 - x_n}{3-x_n} \geq 0$ pour tout n (car x_n est négatif). La suite est donc croissante. Croissante et majorée, la suite est donc convergente, vers une limite l majorée par zéro. On a $l = \frac{2l}{3-l} \iff l - l^2 = l(1-l) = 0$
Donc $l = 0$.