Compléments de mathématiques générales

Correction du travail dirigé de novembre 2008

2e bachelier en Chimie, Informatique et Géométrologie

Exercice 1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a < b$. On pose

$$f(x) = e^{-ax}\chi_{]0,+\infty[}(x) \quad \text{et} \quad g(x) = e^{-bx}\chi_{]0,+\infty[}(x)$$

Calculer, si possible, le produit $f * g$.

Solution 1. Pour tout réel y, on a

$$0 \leq f(x)g(y-x) \leq e^{-ax}\chi_{]0,+\infty[}(x).$$

Comme la fonction majorante est intégrable, on en déduit que la fonction $x \mapsto f(x)g(y-x)$ est intégrable quel que soit y ; le produit de composition est donc défini sur $\mathbb{R}$.

Cela étant, pour $y \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
(f*g)(y) &= \int_{\mathbb{R}} f(x)g(y-x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{-ax}\chi_{]0,+\infty[}(x)e^{-b(y-x)}\chi_{]0,+\infty[}(y-x)dx \\
&= e^{-by}\int_{\mathbb{R}} e^{-ax}e^{-bx}\chi_{]0,+\infty[}(y-x)\chi_{]0,+\infty[}(x)dx
\end{aligned}$$

En utilisant la définition de la fonction caractéristique, on a $\chi_{]0,+\infty[}(y-x) = \chi_{]-\infty,y[}(x)$ quel que soit x. Il y a donc deux cas à distinguer :

- Si $y \leq 0$, alors $\chi_{]-\infty,y[}(x)\chi_{]0,+\infty[}(x) = 0$ quelque soit $x \in \mathbb{R}$. Par conséquent, le produit de convolution existe et on a $(f*g)(y) = 0$ pour tout $y \leq 0$.
- Si $y > 0$, alors $\chi_{]-\infty,y[}(x)\chi_{]0,+\infty[}(x) = \chi_{]0,y[}(x)$ quel que soit $x \in \mathbb{R}$. On a donc

$$(f*g)(y) = e^{-by}\int_0^y e^{-ax}e^{-bx}dx$$

L'intégrand est une fonction continue sur le borné fermé $[0, y]$, donc y est intégrable. DŔs lors

$$(f*g)(y) = e^{-by}\int_0^y e^{-ax}e^{-bx}dx = \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{b-a}$$

pour tout $y > 0$.

Exercice 2. Développer la fonction f donnée explicitement par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\pi, 0[\\ x & \text{si } x \in [0, \pi[\end{cases}$$

en série de Fourier dans $L^2(]-\pi,\pi[)$.

En déduire la valeur de la série

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{(2m-1)^2}$$

Solution 2. Une base orthonormée de $L^2(]-\pi,\pi[)$ est donnée par les fonctions

$$u_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ u_m(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(mx),\ v_m(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(mx)\quad (m\in\mathbb{N})$$

On a successivement

$$r_0=\langle f,u_0\rangle=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\pi xdx=\frac{\pi^2}{2\sqrt{2\pi}}$$

$$\begin{aligned}
r_m=\langle f,u_m\rangle &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\pi x\cos(mx)dx\\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\left[x\frac{\sin(mx)}{m}\right]_0^\pi-\int_0^\pi \frac{\sin(mx)}{m}dx\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{m}\left[\frac{\cos(mx)}{m}\right]_0^\pi\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}m^2}\left((-1)^m-1\right)
\end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient

$$r_m=\begin{cases}0 & \text{si } m \text{ est pair et non nul}\\ \frac{-2}{\sqrt{\pi}m^2} & \text{si } m \text{ est impair}\end{cases}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
s_m=\langle f,v_m\rangle &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\pi x\sin(mx)dx\\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\left[-x\frac{\cos(mx)}{m}\right]_0^\pi+\int_0^\pi \frac{\cos(mx)}{m}dx\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(-\pi\frac{\cos(m\pi)}{m}+\frac{1}{m}\left[\frac{\sin(mx)}{m}\right]_0^\pi\right)\\
&= \frac{-\pi(-1)^m}{\sqrt{\pi}m}
\end{aligned}$$

On obtient donc le développement en série de Fourier

$$f=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\lim_{M\to+\infty}\left(\sum_{m=0}^{M}\frac{\cos((2m+1)x)}{(2m+1)^2}-\sum_{m=1}^{M}(-1)^m\frac{\sin(mx)}{m}\right)$$

dans $L^2(]-\pi,\pi[)$. En utilisant les propriétés de f, on obtient en fait que l'on a convergence ponctuelle sur $]-\pi,\pi[$ (voir par exemple les résultats énonés dans les notes de cours, et au cours).

En évaluant cette expression en $x=0$, on obtient alors

$$f(0)=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{(2m+1)^2}.$$

En utilisant le fait que $f(0)=0$ et en effectuant le changement d'indices $m=n-1$ dans la série, on obtient ainsi

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

Exercice 3. Soit un signal f (on suppose que cette fonction est intégrable et de carré intégrable). On définit *l'autocorrélation* du signal par

$$E_f(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{f(x-t)}dx, \ t \in \mathbb{R}$$

et la *densité spectrale de puissance* de ce signal (PSD) par

$$D_f(y) = \left|\hat{f}(y)\right|^2, \ y \in \mathbb{R}$$

où $\hat{f}(y)$ désigne la transformée de Fourier négative de f en y. On pose $f^s(x) = \overline{f(-x)}$, $x \in \mathbb{R}$.

- Montrer que l'autocorrélation s'écrit

$$E_f = f * f^s$$

- Montrer que l'autocorrélation d'une fonction à valeurs réelles est une fonction paire.
- Montrer que

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |E_f(t)| = E_f(0)$$

- Montrer que la densité spectrale et l'autocorrélation sont liées par la transformation de Fourier.

Solution 3. L'intégrale $E_f(t)$ que l'on demande d'étudier existe quel que soit t puisqu'il s'agit d'intégrer le produit de deux fonctions de carré intégrable.

• Cela étant, on a $E_s = f * f^s$ si et seulement si pour tout $t \in \mathbb{R}$, $E_s(t) = (f * f^s)(t)$. Soit $t \in \mathbb{R}$. On a

$$E_f(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{f(x-t)}dx$$

et

$$(f * f^s)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x)f^s(t-x)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{f(x-t)}dx$$

• Soit f une fonction à valeurs réelles. On a

$$\begin{aligned} E_f(-t) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{f(x+t)}dx &= \int_{\mathbb{R}} f(x)f(x+t)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y-t)f(y)dy \quad \text{via le changement de variables } x = y-t \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y)\overline{f(y-t)}dt = E_f(t) \end{aligned}$$

• Soit $t \in \mathbb{R}$. Considérons les fonctions f de l'énoncé et g définie par

$$g(x) = f(x-t), \ x \in \mathbb{R}$$

Il s'agit de deux fonctions de $L^2(\mathbb{R})$ et on peut donc leur appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans L^2. On a

$$|\langle f, g\rangle_{L^2}| \leq ||f||_{L^2}||g||_{L^2}$$

c'est-à-dire

$$\left|\int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x-t)}dx\right| \leq ||f||_{L^2}||f(\cdot - t)||_{L^2}$$

Comme $||f(\cdot - t)||_{L^2} = ||f||_{L^2}$, on obtient

$$|E_f(t)| \leq ||f||^2_{L^2}$$

A partir de là, on a alors successivement

$$|E_f(t)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{f(x)} dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{f(x-0)} dx \leq E_f(0)$$

Dès lors

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |E_f(t)| = E_f(0)$$

• On sait que $E_f = f * f^s$. En appliquant la transformée de Fourier négative aux deux membres de cette égalité, on obtient que $\mathcal{F}_y^- E_f = \mathcal{F}_y^- f\ \mathcal{F}_y^- f^s$. Or on a

$$\mathcal{F}_y^- f^s = \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy}\overline{f(-x)} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{ixy}\overline{f(x)} dx = \overline{\int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} f(x) dx} = \overline{\mathcal{F}_y^- f}$$

On en tire donc que

$$\mathcal{F}_y^- E_f = \mathcal{F}_y^- f\, \overline{\mathcal{F}_y^- f} = |\mathcal{F}_y^- f|^2 = D_f(y)$$

Exercice 4. Démontrer l'identité

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot (\vec{c} \wedge \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$$

Solution 4. Commençons par remarquer que pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ de $\mathbb{R}^3$, on a

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$$

Cela se vérifie très facilement en passant aux composantes.

On utilise ensuite la formule du double produit vectoriel (voir notes de cours) : pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ de $\mathbb{R}^3$, on a

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u}$$ [1]

Cela étant, si on pose $\vec{t} = \vec{a} \wedge \vec{b}$, on a successivement

$$\begin{aligned}
(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot (\vec{c} \wedge \vec{d}) &= \vec{t} \cdot (\vec{c} \wedge \vec{d}) \\
&= (\vec{t} \wedge c) \cdot \vec{d} \quad \text{(en utilisant le première remarque)} \\
&= ((\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c}) \cdot \vec{d} \quad \text{(en utilisant la définition de } \vec{t}\text{))} \\
&= \Big((\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{a}\Big) \cdot \vec{d} \quad \text{(en utilisant la formule du double produit vectoriel)} \\
&= (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}) \quad \text{(en distribuant le dernier produit scalaire)}
\end{aligned}$$

Exercice 5 (Informaticiens : Approximation de π).

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ vérifiant $|x| \leq 1$, on a

$$\arctan(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{2m+1}$$

2. Montrer que pour tout $x \in]-1, +\infty[$, on a

$$\arctan\left(\frac{1}{x+1}\right) + \arctan\left(\frac{x}{x+2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

[1] En pratique, on retient cette formule en mémorisant la phrase suivante : "Le double produit vectoriel de trois vecteurs est égal au vecteur du milieu de la parenthèse multplié par le produit scalaire des deux autres, moins le second vecteur de la parenthèse multiplié par le produit scalaire des deux autres"

3. En utilisant le point (1) et le résultat permettant de majorer la valeur absolue des "queues" des séries alternées, calculer l'erreur absolue (i. e. la valeur absolue de la différence entre la valeur réelle et la valeur approximée) entre $\frac{\pi}{4}$ et l'approximation en 5 termes de $\frac{\pi}{4}$ obtenue via l'égalité $\dfrac{\pi}{4} = \arctan(1)$.
4. Idem mais en utilisant cette fois l'égalité $\dfrac{\pi}{4} = \arctan(\dfrac{1}{2}) + \arctan(\dfrac{1}{3})$
5. Quelle est la meilleure approximation ?

Solution 5.

1. Rappelons que pour tout nombre réel q tel que $|q| < 1$, la *série géometrique de raison* q $\sum_{n\geq 0} q^n$ converge absolument et sa limite est $\frac{1}{1-q}$.
   Puisque l'on a $|x| < 1$ si et seulement si $x^2 < 1$ on obtient
   $$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n\geq 0}(-x^2)^n = \sum_{n\geq 0}(-1)^n x^{2n}$$
   Puisque cette série converge absolument, on peut la primitiver terme à terme pour obtenir
   $$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \sum_{n\geq 0}\int (-1)^n x^{2n} dx$$
   ce qui a lieu si et seulement si
   $$\arctan(x) = \sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + C$$
   où C est une constante réelle à déterminer. En remplaçant x par 0, on obtient directement que $C = 0$ d'où la conclusion.
2. La fonction $x \mapsto \arctan\left(\frac{1}{x+1}\right) + \arctan\left(\frac{x}{x+2}\right)$ est indéfiniment continûment dérivable sur $I =]-1, +\infty[$. Sa dérivée y est nulle (calcul direct). Il s'ensuit qu'elle est constante sur cet intervalle. Il existe donc une constante C telle que
   $$\arctan\left(\frac{1}{x+1}\right) + \arctan\left(\frac{x}{x+2}\right) = C \quad \text{pour tout } x \in I$$
   En remplaçant x par 0, on obtient directement que $C = \frac{\pi}{4}$ d'où la conclusion.
3. On a
   $$\frac{\pi}{4} = \arctan(1) = \sum_{m\geq 0}\underbrace{(-1)^m \frac{1}{2m+1}}_{s_m}$$
   L'approximation en 5 termes obtenue à partir de l'égalité précédente vaut
   $$\sum_{m=0}^{4}(-1)^m \frac{1}{2m+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \simeq 0.8349$$
   et on a
   $$\left|\frac{\pi}{4} - \sum_{m=0}^{4}(-1)^m \frac{1}{2m+1}\right| \leq |s_5| = \left|(-1)^5 \frac{1}{2.5+1}\right| = \frac{1}{11}$$
4. On a
   $$\frac{\pi}{4} = \arctan(\frac{1}{2}) + \arctan(\frac{1}{3}) = \sum_{m\geq 0}\underbrace{(-1)^m \frac{(1/2)^{2m+1}}{2m+1}}_{s_m} + \sum_{m\geq 0}\underbrace{(-1)^m \frac{(1/3)^{2m+1}}{2m+1}}_{t_m}$$

L'approximation en 5 termes obtenue à partir de l'égalité précédente vaut

$$\sum_{m=0}^{4}(-1)^m\frac{(1/2)^{2m+1}}{2m+1}+\sum_{m=0}^{4}(-1)^m\frac{(1/3)^{2m+1}}{2m+1}$$

On a

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{4}(-1)^m\frac{(1/2)^{2m+1}}{2m+1} &= \frac{1}{2}-(\frac{1}{2})^3\frac{1}{5}+(\frac{1}{2})^5\frac{1}{7}-(\frac{1}{2})^7\frac{1}{9}\simeq 0.5286\\ \sum_{m=0}^{4}(-1)^m\frac{(1/3)^{2m+1}}{2m+1} &= \frac{1}{3}-(\frac{1}{3})^3\frac{1}{5}+(\frac{1}{3})^5\frac{1}{7}-(\frac{1}{3})^7\frac{1}{9}\simeq 0,3116\end{aligned}$$

et l'approximation vaut donc $0,84$.
On a

$$\begin{aligned}\left|\frac{\pi}{4}-\sum_{m=0}^{4}(-1)^m\frac{(1/2)^{2m+1}}{2m+1}+\sum_{m=0}^{4}(-1)^m\frac{(1/3)^{2m+1}}{2m+1}\right| &\leq |s_5|+|t_5|\\ &\leq (\frac{1}{2})^{11}\frac{1}{11}+(\frac{1}{3})^{11}\frac{1}{11}\\ &\leq 4.49*10^{-5}\end{aligned}$$

5. La seconde approximation est la meilleure puisque l'erreur est considérablement moindre.

Exercice 6 (Géométrologues).

1. Montrer que dans tout triangle sphérique, on a

$$\cos(a)=\cos(b+c)\sin^2(\frac{A}{2})+\cos(b-c)\cos^2(\frac{A}{2})$$

2. Calculer la distance qui sépare l'observatoire d'Uccle ($50°47'56''N$, $4°21'45''E$) et celui de Zurich ($47°22'40''N$, $8°33'E$).

Solution 6. 1) On a

$$\begin{aligned}&\cos(b+c)\sin^2(\frac{A}{2})+\cos(b-c)\cos^2(\frac{A}{2})\\ =\;&(\cos(b)\cos(c)-\sin(b)\sin(c))(\frac{1-\cos(A)}{2})+(\cos(b)\cos(c)+\sin(b)\sin(c))(\frac{1+\cos(A)}{2})\\ =\;&\frac{1}{2}\,(\cos(b)\cos(c)-\cos(b)\cos(c)\cos(A)-\sin(b)\sin(c)+\sin(b)\sin(c)\cos(A)\\ &+\cos(b)\cos(c)+\sin(b)\sin(c)+\cos(b)\cos(c)\cos(A)+\sin(b)\sin(c)\cos(A))\\ =\;&\cos(b)\cos(c)+\sin(b)\sin(c)\cos(A)\\ =\;&\cos(a)\end{aligned}$$

où la dernière égalité est obtenue en utilisant la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique.
2) Cet exercice se traite exactement de la même manière que celui fait lors des répétitions, seuls les données numériques changent. La réponse est $487,03$ kms.