

**Solutions du test de rentrée**

**Exercice 1.** (a) La matrice  $A$  est inversible lorsque  $a \in [2\pi, 4\pi] \setminus \{\frac{10\pi}{3}, \frac{11\pi}{3}\}$  et, pour un tel  $a$ ,

$$A^{-1} = \frac{1}{\cos(2) \left( \frac{\sqrt{3}}{3} \sin(a) + \frac{1}{2} \right)} \begin{pmatrix} \cos(2) & \sin(2) \\ -\frac{1}{2} \cotg(2) & \frac{\sqrt{3}}{3} \sin(a) \end{pmatrix}.$$

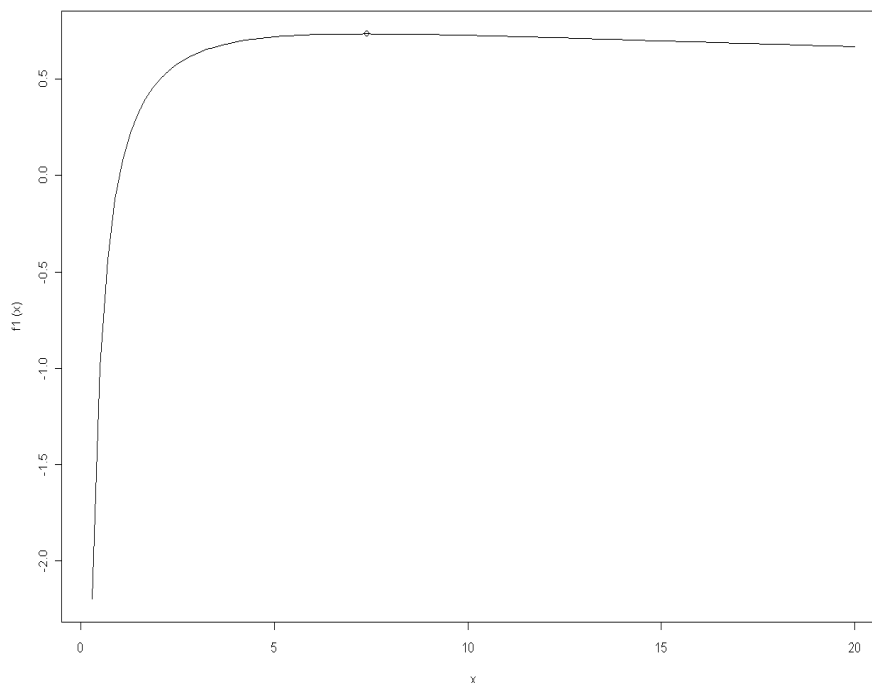
(b) Les valeurs propres de la matrice  $B$  sont  $2 + i$  et  $2 - i$ . La matrice  $B$  est diagonalisable et la matrice

$$S = \begin{pmatrix} -1 + i & -1 - i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

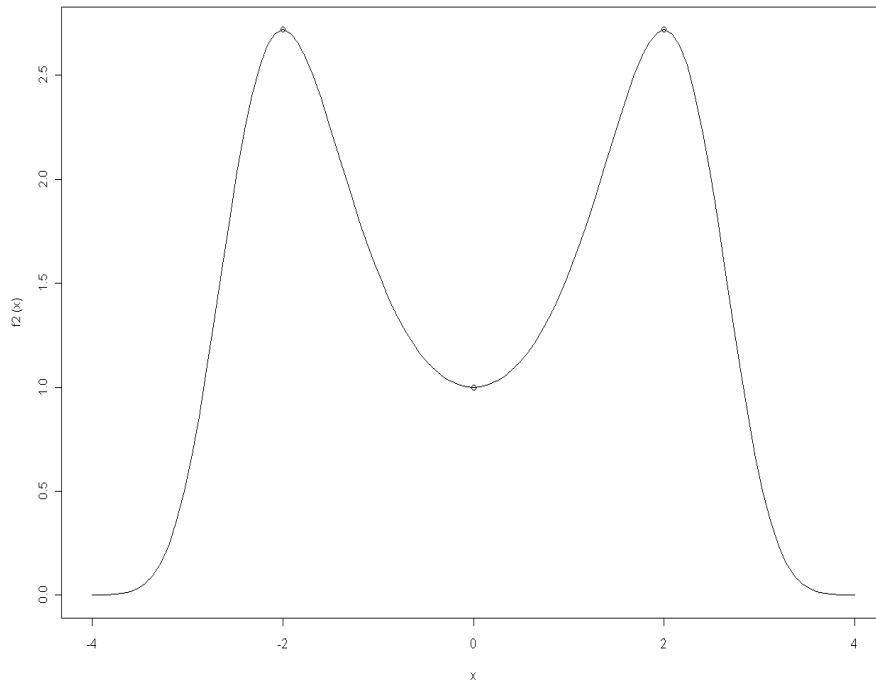
est telle que

$$S^{-1}BS = \begin{pmatrix} 2 + i & 0 \\ 0 & 2 - i \end{pmatrix}.$$

**Exercice 2.** La fonction  $f_1$  admet un seul extremum, à savoir le nombre  $e^2$ . Il s'agit d'un maximum global strict de  $f_1$ . Une représentation de la fonction  $f_1$  est donnée par le graphique suivant.



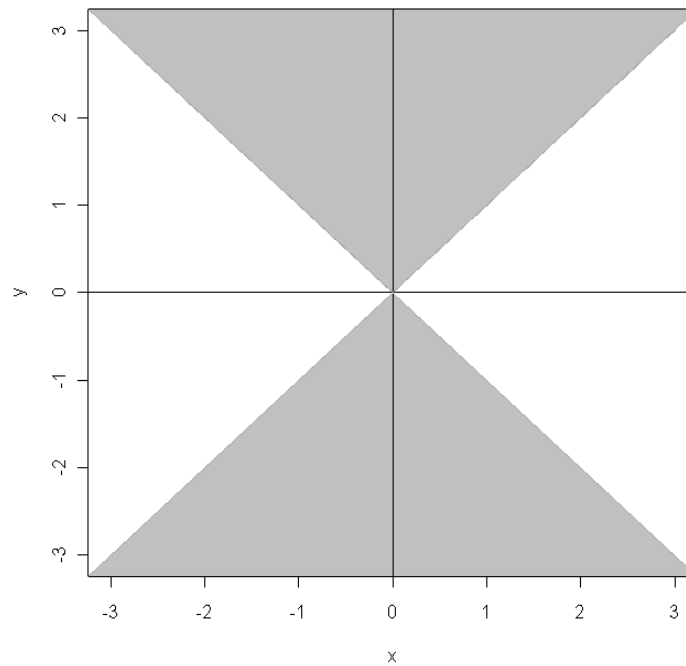
La fonction  $f_2$  admet trois extrema :  $-2$ ,  $0$  et  $2$ . Les nombres  $-2$  et  $2$  constituent des maxima globaux non stricts et  $0$  est un minimum local strict. On a la représentation suivante de  $f_2$ .



**Exercice 3.** Le domaine de dérivabilité de la fonction  $f$  est l'ensemble

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < |y|\}.$$

Il peut être représenté par l'aire grise donnée ci-dessous (dont les bords ne sont pas compris dans l'ensemble).



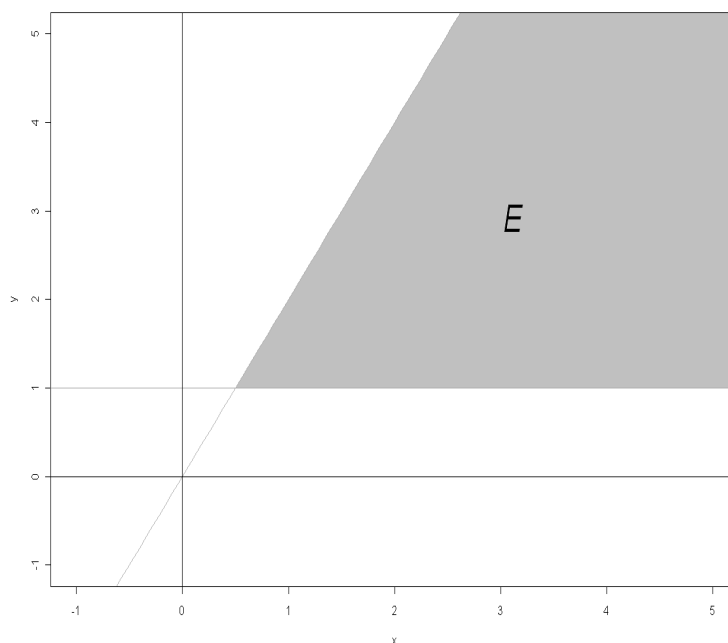
Si  $(x, y) \in A$ , on a

$$|x|D_x f(x, y) + |y|D_y f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x \geq 0 \text{ et } y > 0) \text{ ou } (x \leq 0 \text{ et } y < 0), \\ \frac{-2x}{\sqrt{y^2 - x^2}} & \text{si } (x \geq 0 \text{ et } y < 0) \text{ ou } (x \leq 0 \text{ et } y > 0). \end{cases}$$

**Exercice 4.**

- (a) La fonction n'est pas intégrable sur l'intervalle proposé ;
- (b) 0 ;
- (c)  $\frac{-2i}{\pi}$  ;
- (d) la fonction n'est pas intégrable sur l'intervalle proposé ;
- (e)  $\frac{\pi}{4}$  ;
- (f)  $\frac{\pi}{2}$ .

**Exercice 5.** L'ensemble  $E$  peut se représenter comme suit (les bords sont compris).



L'intégrale demandée vaut 1.

**Exercice 6.** Les deux premières séries convergent, mais pas la troisième. La somme de la première série vaut  $3 - 2\sqrt{3}$ , tandis que la somme de la deuxième vaut  $e - 1$ .

**Exercice 7.** Il est préférable de faire l'achat pendant les soldes.