

Compléments de Mathématiques 2008-2009

MATH0232-x, 2e bachelier en chimie, géométrie, informatique

EXAMEN ÉCRIT DU 05 JANVIER 2009- A604

2e bachelier chimie (8h30-11h30) et informatique (8h30-12h)

1. (Chimie+Info) On donne le plan Π et la droite d par leurs équations cartésiennes

$$\Pi : x - y + z - 2 = 0, \quad d : \begin{cases} x - y = 3 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

- a) Déterminer des équations paramétriques cartésiennes de Π .
b) La droite d et le plan Π sont-ils parallèles? Pourquoi?
c) La droite d et le plan Π sont-ils orthogonaux? Pourquoi?
d) Si elle existe, déterminer l'intersection de d et Π .
e) S'il existe, déterminer l'équation cartésienne du plan contenant d et orthogonal à Π .
2. (Chimie+Info) Déterminer la transformée de Fourier + de la fonction f donnée par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [-\pi, \pi] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3. (Chimie+Info) a) Soit un naturel m strictement supérieur à 1. Montrer que les fonctions f et g_m suivantes sont orthogonales dans $L^2([-1, 1])$:

$$f(x) = \sin(\pi x), \quad g_m(x) = \sin(\pi m x).$$

- b) Dans l'espace $L^2([-1, 1])$ on a le développement suivant

$$x = \sum_{m=1}^{+\infty} a_m \sin(\pi m x).$$

En prenant le produit scalaire de chacun des deux membres de l'égalité avec la fonction $x \mapsto \sin(\pi x)$, déterminer la valeur de a_1 .

4. (Chimie+Info) On donne les fonctions f et g explicitement par $f(x, y) = xy$, $g(x, y) = 4x^2 + y^2$.
a) Déterminer les éventuels extrema libres de f .
b) S'ils existent, déterminer les extrema de f sous la contrainte $g(x, y) = 1$.
c) S'ils existent, déterminer les extrema de f dans l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, g(x, y) \leq 1\}$
Représenter cet ensemble dans un repère orthonormé en le hachurant.
5. (Informatique) On définit la suite x_n ($n \in \mathbb{N}$) par récurrence de la manière suivante

$$\begin{cases} x_0 = -2 \\ x_{n+1} = \frac{2x_n}{3 - x_n} \end{cases}$$

- a) Montrer que les éléments de cette suite sont tous majorés par 0.
b) Etudier la monotonie et la convergence de cette suite.