Compléments de mathématiques générales, année académique 2009-2010

2e bachelier en Informatique et Géométrologie

Géométrie analytique

Ceci constitue une liste d'exercices qui viennent en supplément de ceux résolus en classe

---

1. Soit l'espace (des vecteurs libres) muni d'une base orthonormée $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. On donne les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ respectivement de composantes $(1,1,0), (0,1,0), (0,1,1)$.
   a) Ces vecteurs forment-ils une base de l'espace? Si la réponse est affirmative, déterminer les composantes des vecteurs $\vec{e}_1, \vec{e}_2+\vec{e}_3, \vec{e}_1-\vec{e}_2$ dans cette base. Représenter les vecteurs $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{e}_2+\vec{e}_3, \vec{e}_1-\vec{e}_2$.
   b) Dans la base $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, déterminer
   - les composantes de la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur le plan vectoriel L engendré par $\vec{u}$ et $\vec{w}$
   - les composantes de la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur la droite vectorielle engendrée par $\vec{u}+\vec{w}$
   - les composantes de la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur la droite vectorielle orthogonale à L
   - une base orthonormée de L.

2. Dans un repère orthonormé de l'espace, quel ensemble représentent respectivement les systèmes suivants? (a est un paramètre réel) Justifier.

$$a)\ \left\{\begin{array}{l} 2x-y+z=1\\ -x+y-z=1\end{array}\right. \qquad b)\ \left\{\begin{array}{l} 2x-y+z=1\\ -2x+y-z=-1\end{array}\right. \qquad c)\ \left\{\begin{array}{l} 2x-y+z=1\\ -x+y-z=1\\ x+z=0\end{array}\right.$$

$$d)\ \left\{\begin{array}{l} 2x-y+z=1\\ -x+y-z=1\\ y-z=3\end{array}\right. \qquad e)\ \left\{\begin{array}{l} 2x-y+z=1\\ -x+y-z=1\\ y-z=2\end{array}\right. \qquad f)\ \left\{\begin{array}{l} 2x-y+z=1\\ -x+y-z=1\\ x-y+z=0\end{array}\right.$$

$$g)\ \left\{\begin{array}{l} 2x-y+z=1\\ -x+y-z=1\\ -x+2y-2z=4\end{array}\right. \qquad h)\ ax+ay+az+1=0$$

3. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, déterminer des équations paramétriques cartésiennes des ensembles dont des équations cartésiennes sont fournies respectivement par les expressions a), b) suivantes

$$a)\ 2x-y+z=1, \quad b)\ \left\{\begin{array}{l} 2x-y+z=1\\ -x+y-z=1\end{array}\right.$$

4. On donne le plan Π et la droite d par leurs équations cartésiennes

$$\Pi\ :\ x-y+z-2=0, \qquad d\ :\ \left\{\begin{array}{l} x-y=3\\ x+y+z=0\end{array}\right.$$

   a) La droite d et le plan Π sont-ils parallèles? Pourquoi?
   b) La droite d et le plan Π sont-ils orthogonaux? Pourquoi?
   c) Si elle existe, déterminer l'intersection de d et Π.
   d) S'il existe, déterminer l'équation cartésienne du plan contenant d et orthogonal à Π.

5. On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé et on donne les points A, B, C respectivement de coordonnées $(3,1,1), (2,-1,0), (1,0,1)$.
   a) Ces points appartiennent-ils à une même droite d (resp. à un même plan Π)? Si c'est le cas, déterminer des équations cartésiennes de d (resp. de Π).
   b) On donne le point D de coordonnées $(1,1,1)$. Appartient-il à d (resp. à Π)?

6. On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.
   a) Déterminer la distance entre le point de coordonnées $(1,-1,1)$ et le plan Π d'équation cartésienne

$x - y + z = 2$.
b) Déterminer la distance entre le point de coordonnées cartésiennes $(1, 0, 3)$ et la droite d'équations cartésiennes $\left\{ \begin{array}{l} 2x + 2y = 3 \\ x - 3z = 1 \end{array} \right.$

7. On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé. On donne les droites d_1, d_2 respectivement d'équations cartésiennes

$$d_1 : \left\{ \begin{array}{l} 2x + 2y = 3 \\ x - 3z = 1 \end{array} \right. , \qquad d_2 : \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ x - y + 2 = 0 \end{array} \right.$$

- Sont-elles parallèles, sécantes, gauches? Justifier.
- Si elles sont gauches, déterminer des équations cartésiennes de la perpendiculaire commune à ces deux droites. Si elles définissent un plan, déterminer l'équation cartésienne de celui-ci.
- Déterminer la distance entre ces deux droites.

F. Bastin, November 9, 2009