Compléments de Mathématiques Générales, MATH0232-x, 2015-2016

A propos des « Intégrales paramétriques »

Les intégrales paramétriques (et leur dérivation) représentent un outil très important de l'analyse. Elles apparaissent notamment dans le cadre de l'*analyse de Fourier* et du *produit de convolution de fonctions*.

Dans le présent cours, nous ne considérerons ces intégrales que dans le cas de l'intégration à une variable et dans le cas d'un seul paramètre réel.

Comme leur nom l'indique déjà, les « intégrales paramétriques » sont des fonctions qui sont définies par des intégrales, comme suit

$$\lambda \mapsto \int_A f(x, \lambda)\, dx.$$

Dès le départ, il convient de fixer un cadre qui donne sens à cette définition :
• A est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ (le plus souvent un intervalle) ; le paramètre λ varie dans un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ également, noté par exemple Λ, et qui sera considéré ouvert lorsqu'il sera question de dérivation
• f est une fonction définie sur le produit cartésien $A \times \Lambda$ et, pour tout $\lambda \in \Lambda$, la fonction $x \mapsto f(x, \lambda)$ est intégrable sur A.

Enonçons à présent le « Théorème des intégrales paramétriques » dans le cas d'une seule dérivation.

Dérivation des intégrales paramétriques (Admis)

On reprend les notations et les hypothèses naturelles ci-dessus. En outre, on suppose que
• quel que soit $x \in A$, la fonction $\lambda \mapsto f(x, \lambda)$ appartient à $C_1(\Lambda)$
• quel que soit $\lambda \in \Lambda$, la fonction $x \mapsto f(x, \lambda)$ est intégrable sur A
• (*) quel que soit l'ensemble borné fermé K inclus dans l'ouvert Λ, il existe une fonction g_K intégrable sur A telle que

$$|D_\lambda f(x, \lambda)| \leq g_K(x), \quad \forall x \in A,\ \forall \lambda \in K$$

Sous ces conditions, la fonction $\lambda \mapsto \int_A f(x, \lambda)\, dx$ appartient à $C_1(\Lambda)$ et « on peut dériver sous le signe intégral », ce qui signifie que

$$D_\lambda \int_A f(x, \lambda)\, dx = \int_A D_\lambda f(x, \lambda)\, dx, \qquad \forall \lambda \in \Lambda.$$

Remarques

1) Lorsque $f \in C_1(A' \times \Lambda)$ avec A' ouvert contenant A et lorsque A est borné et fermé, l'hypothèse (*) est automatiquement satisfaite.

2) Pour n dérivations (n naturel strictement plus grand que 1), on demande que $\lambda \mapsto f(x, \lambda)$ appartienne à $C_n(\Lambda)$, que les dérivées (par rapport à λ) jusqu'à l'ordre $n-1$ soient intégrables sur A et que la majoration qui apparaît dans (*) fasse intervenir $D^n_\lambda f(x, \lambda)$. On obtient alors que la fonction $\lambda \mapsto \int_A f(x, \lambda)\, dx$ appartient à $C_n(\Lambda)$ et que la dérivation s'effectue encore de la même manière (jusqu'à l'ordre n).

F. Bastin, 11 avril 2016(V1 : 21 septembre 2015)