

1. Soient les fonctions f, g suivantes

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si } x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Représenter f et g dans un repère orthonormé. Déterminer les transformées de Fourier de ces fonctions et montrer que

$$(\mathcal{F}^\pm g)^2 = \mathcal{F}^\pm f.$$

2. Développer les fonctions f, g suivantes en série trigonométrique de Fourier dans $L^2([-\pi, \pi])$; exprimer votre réponse en utilisant uniquement des fonctions sin, cos et simplifier les calculs au maximum.

$$f(x) = 1, \quad x \in [-\pi, \pi]; \quad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3. Dans l'espace $L^2([-1, 1])$ on a le développement suivant

$$x = \sum_{m=1}^{+\infty} a_m \sin(\pi m x).$$

En prenant le produit scalaire de chacun des deux membres de l'égalité avec la fonction $x \mapsto \sin(\pi x)$, déterminer la valeur de a_1 .