Compléments de mathématiques générales – Calcul intégral –

Exercice 1. Calculer (si possible) les intégrales suivantes :

$$\text{(a)} \int_{\mathbb{R}} e^{-2|x|}\,dx \qquad \text{(b)} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+9} \qquad \text{(c)} \int_0^{\pi/4} \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}\,dx \qquad \text{(d)} \int_{\pi/3}^{+\infty} \sin(2x)\,e^{-x}\,dx$$

Exercice 2. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1] \\ 2-x & \text{si } x \in [1,2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

(a) Représenter le graphique de f dans un repère orthonormé.

(b) Calculer si possible l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} e^{3ix}\,f(x)\,dx.$$

Exercice 3. Si $n \in \mathbb{N}$, calcul par récurrence l'intégrale

$$I_n = \int_0^1 \ln^n(x)\,dx.$$

Exercice 4. La première intégrale eulérienne est la fonction

$$\Gamma :]0,+\infty[\to]0,+\infty[\ ; \ t \mapsto \Gamma(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\,x^{t-1}\,dx.$$

(a) Montrer que cette fonction est bien définie.

(b) Montrer que $\Gamma > 0$ sur $]0,+\infty[$ et calculer $\Gamma(1)$ et $\Gamma(1/2)$.

(c) Vérifier qu'on a la formule de multiplication

$$\Gamma(t+1) = t\,\Gamma(t), \quad t > 0$$

et en particulier, $\Gamma(n+1) = n!$ pour $n \in \mathbb{N}$.

(d) Montrer que Γ est indéfiniment continûment dérivable et que

$$D^k\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\,x^{t-1}\,\ln^k(x)\,dx, \quad t > 0,$$

pour tout $k \in \mathbb{N}_0$.

Exercice 5. On donne la succession d'intégrales simples

$$\int_0^1 \left[\int_1^{e^x} \ln(y)\,dy \right] dx.$$

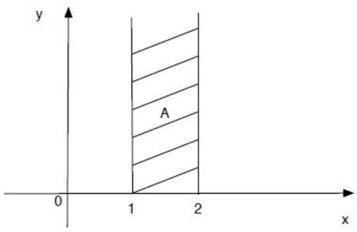
(a) Calculer (si possible) cette succession d'intégrale.

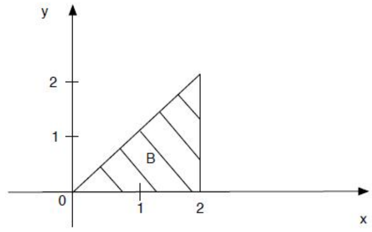
(b) Représenter la partie E du plan sur lequel on intègre.

(c) Permuter l'ordre d'intégration.

(d) La fonction $(x,y) \mapsto \ln(y)$ est-elle intégrable sur E ? Pourquoi ? Si elle est intégrable, que vaut alors son intégrale et que représente cette intégrale ?

Exercice 6. Soient les ensembles A et B donnés par





Calculer (si possible) les intégrales

$$\iint_A e^{-xy}\,dxdy, \qquad \iint_B x^2 e^{-xy}\,dxdy \qquad \text{et} \qquad \iint_A e^{-(x+y)}\,dxdy.$$

Exercice 7. Soit A une partie bornée et fermée du plan. Le centre de masse de A (considéré homogène) est défini comme le point de coordonnées (x_A, y_A) où

$$x_A = \frac{1}{s}\iint_A x\,dxdy \qquad \text{et} \qquad y_A = \frac{1}{s}\iint_A y\,dxdy$$

avec s l'aire de la surface A. Déterminer la position du centre de masse d'une plaque homogène en forme de demi-cercle de rayon $R > 0$.

L. Simons & F. Bastin – 30 septembre 2010.