



UNIVERSITE DE LIEGE
Faculté des Sciences

COMPLEMENTS DE MATHEMATIQUES
GENERALES

(compléments aux cours A, B de premier bachelier en
sciences)

Deuxième année de bachelier
chimie, géométrie-géomatique, informatique

Année académique 2009-2010

Françoise BASTIN

Quelques références

- Notes du cours de *Mathématiques générales A, B*, 1er bachelier en biologie, chimie, géographie, géologie, informatique, philosophie, physique
- *Calculus, with analytic geometry*, Robert Ellis, Denny Gulick, Harcourt Brace Jovanovich Inc., 1993 (quelques pages concernant les extrema ont été scannées et sont incluses dans les présentes notes)
- *Advanced Engineering Mathematics*, Erwin Kreyszig, Wiley 2006 (9th edition)
- *What is mathematics? An elementary approach to ideas and methods*, Richard Courant and Herbert Robbins, Oxford University Press (plusieurs éditions)

Avertissement

Ce syllabus n'est pas finalisé; le cours, et les présentes notes, se sont adaptés aux diverses classes d'étudiants qui se sont rejointes au fil des années dans ce cadre. Ce syllabus constitue cependant un support écrit suffisant pour l'étude du cours, tenant compte de l'enseignement proprement dit (théorie et exercices), et décrit précisément dans une table des matières structurée et précisée selon les filières. Des compléments, d'autres présentations et exercices peuvent être trouvés dans les références fournies ainsi que sur le web.

Françoise Bastin
21 Septembre 2009

Chapitre 1

Géométrie analytique dans l'espace

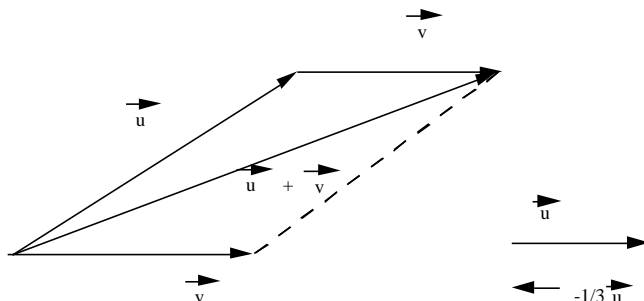
1.1 Rappels de calcul vectoriel et quelques compléments

1.1.1 Vecteurs, addition, multiplication, combinaisons linéaires de vecteurs

Pour des compléments d'information, nous renvoyons par exemple au cours de Mathématiques générales (A).

Dans l'espace, on définit la notion de vecteur (lié ou libre), de sens d'un vecteur, de norme d'un vecteur, de direction d'un vecteur. Un vecteur libre est caractérisé par son sens, sa direction et sa longueur.

Dans l'ensemble des vecteurs, on définit ensuite l'addition entre deux vecteurs et la notion de multiplication d'un vecteur par un nombre réel. Une combinaison linéaire d'un nombre fini de vecteurs est une somme de multiples de ces vecteurs. Par convention, une combinaison linéaire de 0 vecteur est le vecteur nul.



Deux vecteurs multiples l'un de l'autre sont dits “vecteurs parallèles”.

On appelle droite vectorielle l'ensemble des multiples d'un vecteur non nul; on dit que ce vecteur engendre la droite vectorielle. On appelle plan vectoriel l'ensemble des combinaisons linéaires de deux vecteurs non parallèles; on dit que ces vecteurs engendrent le plan vectoriel.

Par définition, un vecteur est parallèle à une droite vectorielle (resp. à un plan vectoriel) s'il appartient à cette droite vectorielle (resp. à ce plan vectoriel).

1.1.2 Dépendance et indépendance linéaire de vecteurs

DÉFINITIONS

Cas de 1 vecteur

Le vecteur nul est dit *linéairement dépendant*; tout vecteur non nul est dit *linéairement indépendant*.

Cas de 2 vecteurs

Deux vecteurs \vec{u}, \vec{v} sont dits *linéairement dépendants* si l'un d'entre eux est multiple de l'autre.

Il revient au même de dire que deux vecteurs \vec{u}, \vec{v} sont linéairement dépendants s'il existe des réels r, s qui ne sont pas tous les deux nuls tels que

$$r\vec{u} + s\vec{v} = \vec{0}.$$

Deux vecteurs sont dits *linéairement indépendants* s'ils ne sont pas linéairement dépendants.

Il revient au même de dire que deux vecteurs sont linéairement indépendants si seule la combinaison linéaire à coefficients nuls donne le vecteur nul ou encore que

$$r, s \in \mathbb{R}, r\vec{u} + s\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow r = s = 0.$$

L'interprétation géométrique est la suivante: deux vecteurs linéairement dépendants sont des vecteurs parallèles.

Cas de 3 vecteurs

Trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont dits *linéairement dépendants* si l'un d'entre eux est une combinaison linéaire des deux autres.

Il revient au même de dire que trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont linéairement dépendants s'il existe des réels r, s, t qui ne sont pas tous nuls tels que

$$r\vec{u} + s\vec{v} + t\vec{w} = \vec{0}.$$

Trois vecteurs sont dits *linéairement indépendants* s'ils ne sont pas linéairement dépendants.

Il revient au même de dire que trois vecteurs sont linéairement indépendants si seule la combinaison linéaire à coefficients nuls donne le vecteur nul ou encore que

$$r, s, t \in \mathbb{R}, r\vec{u} + s\vec{v} + t\vec{w} = \vec{0} \Rightarrow r = s = t = 0.$$

L'interprétation géométrique est la suivante: trois vecteurs sont linéairement dépendants s'ils appartiennent à un même plan vectoriel.

Cas de n vecteurs

En toute généralité, n vecteurs $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ (n étant un nombre naturel non nul supérieur ou égal à deux) sont *linéairement dépendants* si l'un d'entre eux est une combinaison linéaire des autres.

Il revient au même de dire que n vecteurs $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ sont *linéairement dépendants* s'il existe des réels r_1, \dots, r_n non tous nuls tels que

$$r_1\vec{v}_1 + \dots + r_n\vec{v}_n = \vec{0}.$$

De même, n vecteurs sont *linéairement indépendants* s'ils ne sont pas linéairement dépendants.

Il revient au même de dire que n vecteurs $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ sont linéairement indépendants si seule la combinaison linéaire à coefficients nuls donne le vecteur nul ou encore que

$$r_1, \dots, r_n \in \mathbb{R}, r_1\vec{v}_1 + \dots + r_n\vec{v}_n = \vec{0} \Rightarrow r_j = 0 \forall j = 1, \dots, n.$$

PROPRIÉTÉS

Cas de trois vecteurs (ou plus) d'un plan

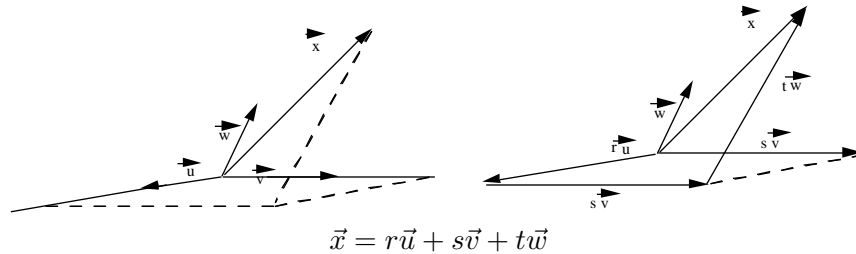
Dans un plan, si on donne trois vecteurs, alors l'un d'entre eux est toujours une combinaison linéaire des autres. On a même plus: si $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont tels que \vec{u}, \vec{v} sont linéairement indépendants alors \vec{w} est une combinaison linéaire de \vec{u} et \vec{v} .

Dès lors, dans un plan, un nombre fini de vecteurs au moins égal à trois forme toujours en ensemble de vecteurs linéairement dépendants.

Cas de quatre vecteurs (ou plus) de l'espace

Dans l'espace, si on donne quatre vecteurs, alors l'un d'entre eux est toujours une combinaison linéaire des autres. On a même plus: si $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{x}$ sont des vecteurs de l'espace tels que $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont linéairement indépendants alors \vec{x} est une combinaison linéaire de \vec{u}, \vec{v} et \vec{w} .

Il s'ensuit que si on donne quatre vecteurs de l'espace (ou plus), ceux-ci sont toujours linéairement dépendants.



1.1.3 Base et composantes

Nous renvoyons aussi au cours de Mathématiques générales (A).

On appelle *base* d'une droite vectorielle un vecteur non nul de cette droite.

On appelle *base* d'un plan vectoriel un ensemble de deux vecteurs linéairement indépendants de ce plan.

On appelle *base* de l'espace un ensemble de trois vecteurs linéairement indépendants de l'espace.

Soit \vec{u} un vecteur non nul d'une droite vectorielle. Si \vec{x} est un autre vecteur de cette droite vectorielle, il existe alors un réel unique r tel que

$$\vec{x} = r\vec{u}.$$

Le réel r est alors appelé *composante* du vecteur \vec{x} dans la base $\{\vec{u}\}$.

Soient \vec{u}_1, \vec{u}_2 deux vecteurs linéairement indépendants d'un plan vectoriel L . Si \vec{x} est un autre vecteur de L , alors il existe des réels uniques r_1, r_2 tels que

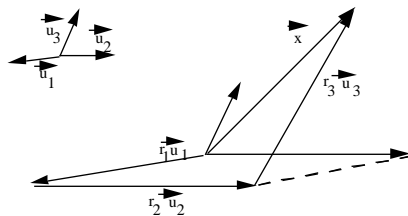
$$\vec{x} = r_1\vec{u}_1 + r_2\vec{u}_2.$$

Les réels r_1, r_2 sont appelés *composantes* de \vec{x} dans la base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$.

Soient $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ trois vecteurs linéairement indépendants de l'espace. Si \vec{x} est un autre vecteur de l'espace, alors il existe des réels uniques r_1, r_2, r_3 tels que

$$\vec{x} = r_1\vec{u}_1 + r_2\vec{u}_2 + r_3\vec{u}_3.$$

Les réels r_1, r_2, r_3 sont appelés *composantes* de \vec{x} dans la base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$.



1.1.4 Expression analytique de la dépendance linéaire

On fixe une base de l'espace. On a les propriétés suivantes.

- Le vecteur \vec{u} de composantes (a, b, c) est non nul si et seulement si les nombres a, b, c ne sont pas tous nuls.
- Les vecteurs \vec{u} et \vec{v} de composantes respectives (a, b, c) et (a', b', c') sont linéairement dépendants si et seulement s'il existe deux réels r, s non tous les deux nuls tels que

$$r \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ou encore si et seulement si tous les déterminants d'ordre deux extraits de la matrice suivante sont nuls

$$\begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \\ c & c' \end{pmatrix}.$$

- Les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ de composantes respectives $(a, b, c), (a', b', c'), (a'', b'', c'')$ sont linéairement dépendants si et seulement s'il existe des réels r, s, t non tous nuls tels que

$$r \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a'' \\ b'' \\ c'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ou encore si et seulement si le déterminant de la matrice suivante est nul

$$\begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix}.$$

A partir de ces propriétés, on en déduit bien sûr directement celles qui font intervenir l'indépendance linéaire au lieu de la dépendance linéaire.

1.1.5 Produit scalaire de deux vecteurs

Nous renvoyons au cours de Mathématiques générales A pour un rappel plus complet.

DÉFINITIONS

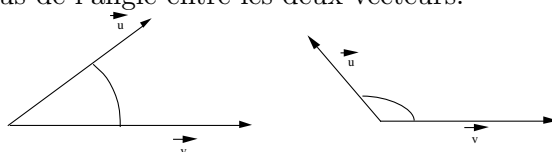
Définissons géométriquement le produit scalaire.

Le produit scalaire des vecteurs (libres) non nuls \vec{u}, \vec{v} est le réel

$$\vec{u} \bullet \vec{v} := \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$$

où $\theta \in [0, \pi]$ est la mesure de l'angle non orienté entre les deux vecteurs. Si l'un des vecteurs est nul, on dit que le produit scalaire est le réel 0.

Le produit scalaire est donc un réel qui peut être positif, négatif ou nul. S'il n'est pas nul, son signe est celui du cosinus de l'angle entre les deux vecteurs.



$$\vec{u} \bullet \vec{v} > 0 \text{ car } \theta \in [0, \pi/2[\quad \vec{u} \bullet \vec{v} < 0 \text{ car } \theta \in]\pi/2, \pi]$$

Deux vecteurs sont dits orthogonaux si leur produit scalaire est nul. Des vecteurs non nuls orthogonaux deux à deux sont toujours linéairement indépendants.

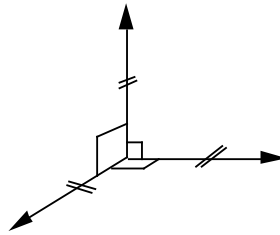
Une base orthonormée est une base dont les vecteurs sont orthogonaux deux à deux et de norme égale à 1.

En d'autres termes, la base du plan $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ est orthonormée si et seulement si

$$\vec{u}_1 \bullet \vec{u}_1 = 1, \quad \vec{u}_2 \bullet \vec{u}_2 = 1, \quad \vec{u}_1 \bullet \vec{u}_2 = 0$$

et la base de l'espace $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ est orthonormée si et seulement si

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 \bullet \vec{u}_1 &= 1, & \vec{u}_1 \bullet \vec{u}_2 &= 0 \\ \vec{u}_2 \bullet \vec{u}_2 &= 1, & \vec{u}_2 \bullet \vec{u}_3 &= 0 \\ \vec{u}_3 \bullet \vec{u}_3 &= 1, & \vec{u}_3 \bullet \vec{u}_1 &= 0 \end{aligned}$$



PROPRIÉTÉS

Le produit scalaire possède des propriétés bien spécifiques: symétrie, positivité, bilinéarité. Grâce à ces propriétés, on en déduit une expression analytique du produit scalaire de deux vecteurs.

Propriété 1.1.1 Soit $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ une base orthonormée de l'espace. Si les composantes des vecteurs \vec{x}, \vec{y} dans cette base sont (a, b, c) et (a', b', c') , alors on a

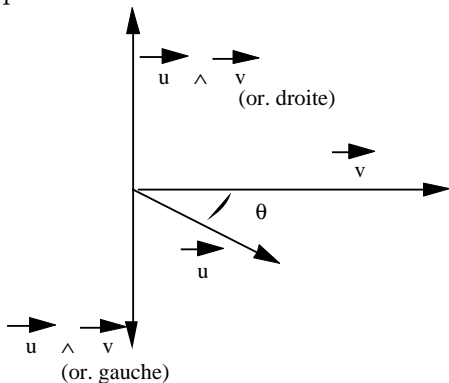
$$\vec{x} \bullet \vec{y} = aa' + bb' + cc'.$$

1.1.6 Produit vectoriel de deux vecteurs

Rappelons que la définition du produit vectoriel nécessite l'introduction de la notion d'orientation de l'espace et d'orientation des bases de l'espace. Comme dans la section précédente, nous renvoyons au cours de Mathématiques générales A pour des compléments.

DÉFINITION

Le produit vectoriel de deux vecteurs est défini géométriquement comme suit.



Si \vec{u} et \vec{v} ne sont pas parallèles,
 $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est un vecteur (axial) qui est défini comme suit

- norme donnée par 2 fois l'aire du triangle construit sur \vec{u} et \vec{v} , c'est-à-dire de norme égale au réel positif $\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \theta$
- direction orthogonale au plan défini par \vec{u} et \vec{v} ,
- sens tel que $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v}\}$ constitue une base orientée comme l'espace .

Si \vec{u} et \vec{v} sont parallèles, le produit vectoriel de ces vecteurs, $\vec{u} \wedge \vec{v}$, est par définition le vecteur nul.

On a donc directement la propriété suivante: le produit vectoriel de deux vecteurs est nul si et seulement si les deux vecteurs sont linéairement dépendants.

Sauf mention explicite du contraire, on suppose être dans le cas d'un espace orienté à droite.

PROPRIÉTÉS

Le produit vectoriel possède des propriétés bien spécifiques, notamment l'antisymétrie et la bilinéarité. Grâce à ces propriétés, dans une base orthonormée orientée comme l'espace, on en déduit l'expression des composantes du produit vectoriel de deux vecteurs à l'aide des composantes de ces vecteurs.

Propriété 1.1.2 Soit $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ une base orthonormée de l'espace.

1) On a

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_1 &= \vec{0} & \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 &= \vec{u}_3 & \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_3 &= -\vec{u}_2 \\ \vec{u}_2 \wedge \vec{u}_2 &= \vec{0} & \vec{u}_2 \wedge \vec{u}_1 &= -\vec{u}_3 & \vec{u}_2 \wedge \vec{u}_3 &= \vec{u}_1 \\ \vec{u}_3 \wedge \vec{u}_3 &= \vec{0} & \vec{u}_3 \wedge \vec{u}_1 &= \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \wedge \vec{u}_2 &= -\vec{u}_1. \end{aligned}$$

2) Si les composantes des vecteurs \vec{x}, \vec{y} dans cette base sont (a, b, c) et (a', b', c') , alors on a

$$\vec{x} \wedge \vec{y} = (bc' - b'c)\vec{u}_1 + (a'c - ac')\vec{u}_2 + (ab' - a'b)\vec{u}_3;$$

en d'autres termes, les composantes du produit vectoriel $\vec{x} \wedge \vec{y}$ sont les cofacteurs des éléments de la troisième ligne de la matrice

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix}.$$

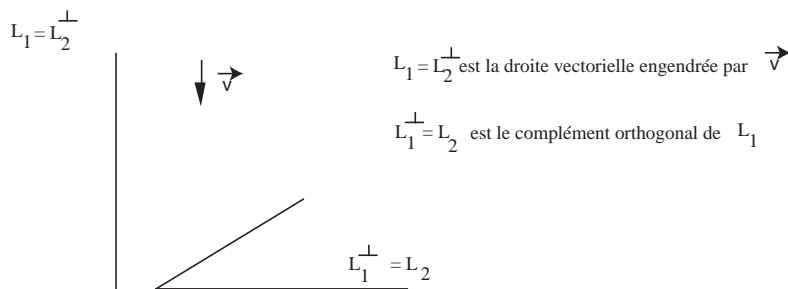
1.1.7 Projections orthogonales

Dans l'espace, si on donne un vecteur non nul \vec{v} , les vecteurs qui lui sont orthogonaux forment un plan vectoriel. Si on note L_1 la droite vectorielle engendrée par \vec{v} , ce plan vectoriel est appelé *complément orthogonal* de L_1 et est noté L_1^\perp . On a donc

$$L_1^\perp = \{\vec{u} : \vec{u} \bullet \vec{v} = 0\} = \{\vec{u} : \vec{u} \bullet \vec{w} = 0, \forall \vec{w} \in L_1\}.$$

De même, si on donne un plan vectoriel L_2 , les vecteurs orthogonaux à tous les vecteurs de L_2 forment une droite vectorielle, appelée *complément orthogonal* de L_2 et est notée L_2^\perp . On a donc

$$L_2^\perp = \{\vec{u} : \vec{u} \bullet \vec{w} = 0, \forall \vec{w} \in L_2\}.$$



Tout vecteur de l'espace s'écrit de manière unique sous la forme de la somme d'un élément de $L_1 = L_2^\perp$ et de $L_1^\perp = L_2$; autrement dit, pour tout vecteur \vec{x} , il existe \vec{u}, \vec{w} uniques tels que

$$\boxed{\vec{u} \in L_1 = L_2^\perp, \vec{w} \in L_1^\perp = L_2, \quad \text{et} \quad \vec{x} = \vec{u} + \vec{w}.}$$

Dans cette décomposition, le vecteur

$$\vec{u}$$

est appelé

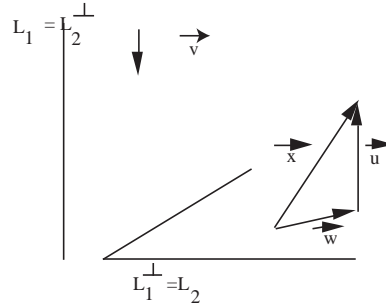
la projection orthogonale du vecteur \vec{x} sur la droite vectorielle $L_1 = L_2^\perp$

et le vecteur

$$\vec{w}$$

est appelé

la projection orthogonale du vecteur \vec{x} sur le plan vectoriel $L_1^\perp = L_2$.



Si L_2 est engendré par les deux vecteurs linéairement indépendants \vec{u}_1, \vec{u}_2 , alors

$$\vec{v} \text{ est un multiple de } \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2.$$

De plus, on a

$$\vec{u} = t (\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2) \quad (\text{resp. } \vec{u} = t' \vec{v})$$

avec

$$t = \frac{\vec{x} \bullet (\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2)}{\|\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2\|^2} \quad (\text{resp. } t' = \frac{\vec{x} \bullet \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2})$$

et il existe des réels uniques r, s tels que

$$\vec{w} = \vec{x} - \vec{u} = \vec{x} - \frac{\vec{x} \bullet (\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2)}{\|\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2\|^2} \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 = \vec{x} - \frac{\vec{x} \bullet \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v} = r \vec{u}_1 + s \vec{u}_2.$$

Si en outre \vec{u}_1, \vec{u}_2 sont orthogonaux, on a

$$r = \frac{\vec{x} \bullet \vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|^2}, \quad s = \frac{\vec{x} \bullet \vec{u}_2}{\|\vec{u}_2\|^2}.$$

En particulier, si $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ est une base orthonormée de l'espace et si \vec{x} est un vecteur quelconque de l'espace, on a

$$\vec{x} = (\vec{x} \bullet \vec{u}_1) \vec{u}_1 + (\vec{x} \bullet \vec{u}_2) \vec{u}_2 + (\vec{x} \bullet \vec{u}_3) \vec{u}_3$$

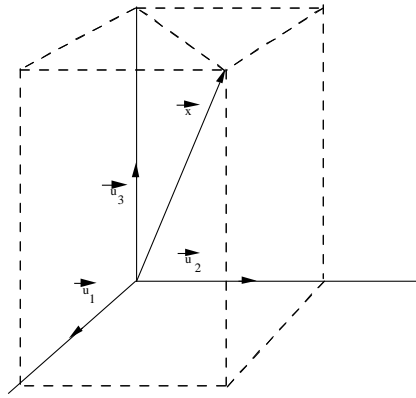
où, pour $j = 1, 2, 3$,

$$(\vec{x} \bullet \vec{u}_j) \vec{u}_j$$

est la projection orthogonale du vecteur \vec{x} sur la droite vectorielle engendrée par \vec{u}_j et où, pour $j, k \in \{1, 2, 3\}$ avec $j \neq k$, le vecteur

$$(\vec{x} \bullet \vec{u}_j) \vec{u}_j + (\vec{x} \bullet \vec{u}_k) \vec{u}_k$$

est la projection orthogonale du vecteur \vec{x} sur le plan vectoriel engendré par \vec{u}_j et \vec{u}_k .



1.2 Repère de l'espace (espace=ensemble de points)

Nous renvoyons au cours de Mathématiques générales A pour des compléments.

Nous notons \mathcal{E} l'ensemble des points de l'espace et V l'ensemble des vecteurs libres de l'espace.

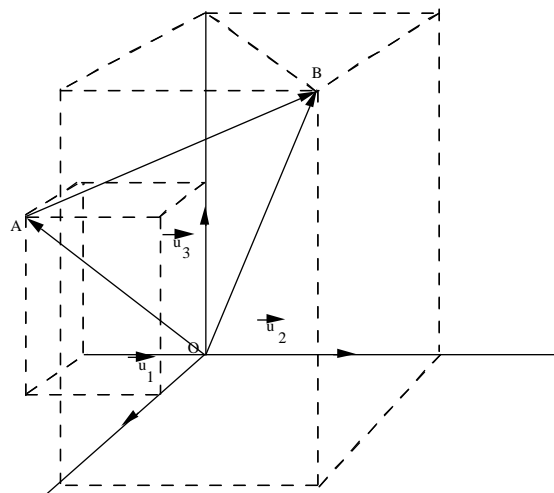
On appelle *repère de l'espace* la donnée d'un point, appelé origine du repère, et d'une base de l'ensemble des vecteurs libres. Cette base est alors souvent qualifiée de "base associée au repère". On dit que le repère est orthonormé si la base associée est orthonormée.

Etant donné un repère d'origine notée O , on appelle *coordonnées cartésiennes de P* dans ce repère les composantes du vecteur \overrightarrow{OP} dans la base associée au repère.

Etant donné la relation vectorielle

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

valable pour tous points A, B de l'espace, on obtient le lien suivant entre les composantes d'un vecteur \overrightarrow{AB} et les coordonnées des points A, B : les composantes du vecteur \overrightarrow{AB} sont égales à la différence entre les coordonnées cartésiennes des points B et A , dans l'ordre.



1.3 Le plan (ensemble de points)

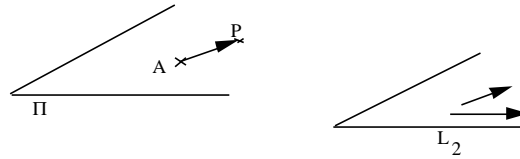
1.3.1 Définitions et propriétés de base

Nous adoptons la définition suivante d'un plan, basée sur la géométrie vectorielle.

Etant donné un point A de l'espace et un plan vectoriel L_2 , le plan Π déterminé par A et L_2 est l'ensemble des points P de l'espace qui sont tels que le vecteur \overrightarrow{AP} appartienne à L_2 .

En d'autres termes, si L_2 est engendré par les vecteurs linéairement indépendants \vec{u}_1, \vec{u}_2 de V , on a

$$\Pi = \{P \in \mathcal{E} : \exists r_1, r_2 \in \mathbb{R} \text{ tel que } \overrightarrow{AP} = r_1 \vec{u}_1 + r_2 \vec{u}_2\}.$$



Un vecteur non nul de L_2 est appelé un *vecteur directeur* de Π . Un vecteur normal à Π est, par définition, un vecteur non nul du complément orthogonal de L_2 (c'est-à-dire un vecteur non nul orthogonal à tout vecteur de L_2).

On a les propriétés suivantes:

- si $B \in \Pi$ alors $\Pi = \{P \in \mathcal{E} : \overrightarrow{BP} \in L_2\}$

- si $\Pi = \{P \in \mathcal{E} : \overrightarrow{AP} \in L_2\} = \{P \in \mathcal{E} : \overrightarrow{BP} \in L'_2\}$ alors $L_2 = L'_2$. La démonstration est directe et laissée au lecteur (elle s'interprète d'ailleurs facilement par un dessin). La première propriété signifie qu'un plan est déterminé par n'importe lequel de ses points; la seconde signifie que le plan vectoriel associé à un plan (ensemble de points) est unique.

Notons aussi que, par définition, on dit qu'un vecteur est parallèle à un plan Π si c'est un élément du plan vectoriel associé à Π .

1.3.2 Equations paramétriques

On fixe un repère de l'espace.

Soit Π un plan donné par un de ses points A et par le plan vectoriel L_2 . Si on désigne par (x_0, y_0, z_0) les coordonnées de A et par $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1), (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ les composantes de deux vecteurs directeurs linéairement indépendants de Π , on a successivement

$$\begin{aligned} P \in \Pi &\Leftrightarrow \exists r, s \in \mathbb{R} : \overrightarrow{AP} = r\vec{u}_1 + s\vec{u}_2 \\ &\Leftrightarrow \exists r, s \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où (x, y, z) sont les coordonnées de P . Les relations

$$\boxed{\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}, \quad r, s \in \mathbb{R}}$$

ou encore, sous forme de système

$$\begin{cases} x = x_0 + r\alpha_1 + s\alpha_2 \\ y = y_0 + r\beta_1 + s\beta_2 \\ z = z_0 + r\gamma_1 + s\gamma_2 \end{cases}, \quad r, s \in \mathbb{R}$$

s'appellent

des équations paramétriques cartésiennes

du plan Π .

1.3.3 Equation cartésienne

Etant donné un plan et un repère orthonormé de l'espace, on veut caractériser l'appartenance d'un point à ce plan par une ou des relations entre les coordonnées cartésiennes de ce point. Les relations trouvées constitueront alors la ou les équations cartésiennes du plan.

On reprend les notations introduites dans la section précédente.

A partir des équations paramétriques, il est aisé de trouver une forme d'équation cartésienne du plan. Il suffit en effet d'éliminer les paramètres r et s : par exemple, on a successivement

$$\begin{aligned} P \in \Pi &\Leftrightarrow \exists r, s \in \mathbb{R} : \overrightarrow{AP} = r\vec{u}_1 + s\vec{u}_2 \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AP} \bullet (\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) + \gamma(z - z_0) = 0 \end{aligned}$$

où (α, β, γ) sont les composantes du produit vectoriel de \vec{u}_1 et \vec{u}_2 . En toute généralité, si \vec{n} est un vecteur normal à Π , on a

$$P \in \Pi \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} \bullet \vec{n} = 0 \Leftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

où (a, b, c) sont les composantes de \vec{n} . Cette équation peut se mettre sous la forme

$$\boxed{ax + by + cz + \delta = 0}$$

et s'appelle

$$\boxed{\text{équation cartésienne}}$$

du plan Π^1 .

Réciproquement, si on donne une équation de la forme

$$ax + by + cz + \delta = 0$$

où $a, b, c, \delta \in \mathbb{R}$, $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, il s'agit de l'équation cartésienne d'un plan dont un vecteur normal au plan vectoriel associé a pour composantes (a, b, c) . En effet, si x_0, y_0, z_0 vérifient $ax_0 + by_0 + cz_0 + \delta = 0$, on a successivement

$$\begin{aligned} ax + by + cz + \delta = 0 &\Leftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AP} \bullet \vec{n} = 0 \end{aligned}$$

où P est le point de coordonnées (x, y, z) , A celui de coordonnées (x_0, y_0, z_0) et où \vec{n} est le vecteur de composantes (a, b, c) . Les points P de coordonnées (x, y, z) vérifiant $ax + by + cz + \delta = 0$ sont donc ceux du plan déterminé par le point A et par le plan vectoriel L_2 , complément orthogonal de la droite vectorielle engendrée par \vec{n} .

1.3.4 Plans parallèles, plans orthogonaux

DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS DE BASE

Soient Π_1 et Π_2 deux plans.

Ils sont dits *parallèles* si deux vecteurs linéairement indépendants de l'un sont des vecteurs directeurs de l'autre².

¹on parle souvent de l'équation cartésienne de Π dans le repère donné car elle est unique à un coefficient non nul près, multiplicatif de a, b, c, δ .

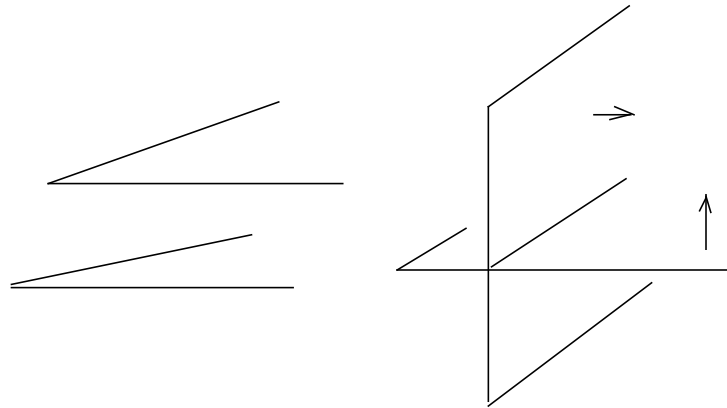
²Remarquons bien que cette définition a un sens car elle est symétrique par rapport aux deux plans.

Il est direct de vérifier que l'on a les propriétés suivantes:

- deux plans sont parallèles si et seulement s'ils possèdent le même plan vectoriel associé;
- deux plans sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs normaux sont parallèles (ce qui revient à demander qu'un vecteur normal à l'un des plans soit parallèle à un vecteur normal à l'autre plan.)

Les plans Π_1 et Π_2 sont dits *orthogonaux* (ou perpendiculaires) si un vecteur normal de l'un est un vecteur directeur de l'autre³.

Il est direct de vérifier que l'on a la propriété suivante: deux plans sont orthogonaux si et seulement si un vecteur (resp. tout vecteur) normal à l'un et un vecteur (resp. tout vecteur) normal à l'autre sont orthogonaux.



QUELQUES EXPRESSIONS ANALYTIQUES

En guise d'exercices, exprimons analytiquement quelques relations faisant intervenir le parallélisme et l'orthogonalité de plans. On suppose être dans un espace muni d'un repère orthonormé.

On donne les plans Π_1, Π_2 par leur équation cartésienne:

$$\Pi_1 : \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + \delta_1 = 0, \quad \Pi_2 : \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z + \delta_2 = 0$$

où $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \neq (0, 0, 0)$ et $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) \neq (0, 0, 0)$.

Ces plans sont parallèles si et seulement s'il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que

$$\alpha_1 = r\alpha_2, \quad \beta_1 = r\beta_2, \quad \gamma_1 = r\gamma_2.$$

Ces plans sont orthogonaux si et seulement si

$$\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0.$$

Soit un vecteur de composantes (a, b, c) ; il est parallèle à Π_1 si et seulement si

$$\alpha_1 a + \beta_1 b + \gamma_1 c = 0.$$

1.4 La droite (ensemble de points)

1.4.1 Définitions et propriétés de base

Nous adoptons la définition suivante d'une droite, basée sur la géométrie vectorielle.

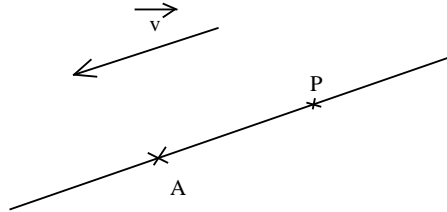
Étant donné un point A de l'espace et une droite vectorielle L_1 , la droite d déterminée par A et L_1 est l'ensemble des points P de l'espace qui sont tels que le vecteur \overrightarrow{AP} appartienne à L_1 .

³Remarquons bien que cette définition a un sens car elle est symétrique par rapport aux deux plans.

En d'autres termes, si L_1 est engendré par le vecteur non nul \vec{v} de V , on a

$$d = \{P \in \mathcal{E} : \exists r \in \mathbb{R} \text{ tel que } \overrightarrow{AP} = r\vec{v}\}.$$

Un vecteur non nul de L_1 est appelé *un vecteur directeur* de d .



On voit directement que l'on a les propriétés suivantes:

- si $B \in d$ alors $d = \{P \in \mathcal{E} : \overrightarrow{BP} \in L_1\}$
- si L_1, L'_1 sont deux droites vectorielles et A, B sont deux points tels que $d = \{P \in \mathcal{E} : \overrightarrow{AP} \in L_1\} = \{P \in \mathcal{E} : \overrightarrow{BP} \in L'_1\}$ alors $L_1 = L'_1$. La preuve de cette propriété est analogue à celle concernant le cas du plan et s'interprète aussi de la même manière.

1.4.2 Equations paramétriques

On fixe un repère de l'espace.

Soit d une droite donnée par un de ses points A et par la droite vectorielle L_1 . Si on désigne par (x_0, y_0, z_0) les coordonnées de A et par (α, β, γ) les composantes d'un vecteur directeur \vec{v} de d , on a successivement

$$\begin{aligned} P \in d &\Leftrightarrow \exists r \in \mathbb{R} : \overrightarrow{AP} = r\vec{v} \\ &\Leftrightarrow \exists r \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où (x, y, z) sont les coordonnées de P . Les relations

$$\boxed{\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}}$$

ou encore, sous forme de système

$$\begin{cases} x = x_0 + r\alpha \\ y = y_0 + r\beta \\ z = z_0 + r\gamma \end{cases}, \quad r \in \mathbb{R}$$

s'appellent

des équations paramétriques cartésiennes

de la droite d .

1.4.3 Equations cartésiennes

Etant donné une droite et un repère orthonormé de l'espace, on veut caractériser l'appartenance d'un point à cette droite par une ou des relations entre les coordonnées cartésiennes de ce point. Les relations trouvées constitueront alors des équations cartésiennes de la droite.

On reprend les notations introduites dans la section précédente.

A partir des équations paramétriques, il est aisé de trouver une forme d'équations cartésiennes de la droite d . Il suffit en effet d'éliminer le paramètre r . Ainsi, lorsque aucune des composantes de \vec{v} n'est nulle, on obtient

$$\begin{aligned} P \in d &\Leftrightarrow \exists r \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma}. \end{aligned}$$

Si par exemple $\alpha = 0, \beta \neq 0, \gamma \neq 0$, on a

$$\begin{aligned} P \in d &\Leftrightarrow \exists r \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow x = x_0 \quad \text{et} \quad \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma}. \end{aligned}$$

On obtient des relations analogues dans le cas où $\beta = 0$ (resp. $\gamma = 0$) et les deux autres composantes différent de 0. Lorsque $\alpha = \beta = 0$, alors nécessairement $\gamma \neq 0$ et on a

$$\begin{aligned} P \in d &\Leftrightarrow \exists r \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow x = x_0 \quad \text{et} \quad y = y_0. \end{aligned}$$

On obtient des relations analogues lorsque deux autres composantes sont nulles.

En résumé, on voit que d a pour équations cartésiennes les deux équations

$$\boxed{\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma}}$$

en prenant pour convention que si un dénominateur est nul, alors le numérateur est nul.

Dans tous les cas, ces équations peuvent se mettre sous la forme

$$\boxed{\begin{cases} ax + by + cz + \delta = 0 \\ a'x + b'y + c'z + \delta' = 0 \end{cases}}$$

où (a, b, c) et (a', b', c') sont les composantes de deux vecteurs linéairement indépendants. Il s'ensuit que la droite d est vue comme l'intersection des plans non parallèles d'équation respective

$$ax + by + cz + \delta = 0 \quad \text{et} \quad a'x + b'y + c'z + \delta' = 0.$$

Le système d'équations ci-dessus s'appelle un

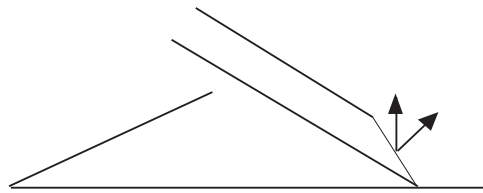
$$\boxed{\text{système d'équations cartésiennes de la droite } d.}$$

Réciproquement, considérons le système d'équations

$$\begin{cases} ax + by + cz + \delta = 0 \\ a'x + b'y + c'z + \delta' = 0 \end{cases}$$

où (a, b, c) et (a', b', c') sont les composantes de deux vecteurs linéairement indépendants. Ce système représente donc l'intersection de deux plans non parallèles, c'est-à-dire une droite.

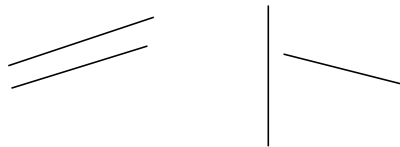
Montrons comment obtenir aisément un vecteur directeur de cette droite. Le vecteur \vec{n} de composantes (a, b, c) est normal au plan Π d'équation $ax + by + cz + \delta = 0$ et le vecteur \vec{n}' de composantes (a', b', c') est normal au plan Π' d'équation $a'x + b'y + c'z + \delta = 0$. Le vecteur $\vec{n} \wedge \vec{n}'$, orthogonal à \vec{n} (resp. à \vec{n}') est donc dans le plan vectoriel associé à Π (resp. à Π'); il s'agit donc d'un vecteur directeur de la droite d'intersection des deux plans.



1.4.4 Droites parallèles, orthogonales

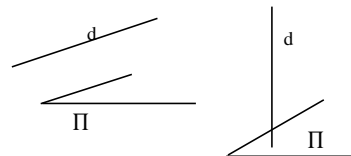
Par définition, deux droites sont parallèles si elles sont engendrées par la même droite vectorielle. Cela revient au même de dire que deux droites sont parallèles si un vecteur directeur de l'une est un vecteur directeur de l'autre.

Par définition, deux droites sont orthogonales⁴ si un vecteur directeur de l'une est orthogonal à un vecteur directeur de l'autre.



1.5 Parallélisme et orthogonalité entre droite et plan

1.5.1 Définitions



La droite d et le plan Π sont

- parallèles si un vecteur directeur de d est aussi un vecteur directeur de Π ; il revient au même de dire que d et Π sont parallèles si un vecteur directeur de d et un vecteur normal de Π sont orthogonaux;
- orthogonaux si un vecteur directeur de d est orthogonal à Π ; il revient au même de dire que d et Π sont orthogonaux si un vecteur normal à Π est un vecteur directeur de d .

⁴Parfois, on utilise aussi le terme "perpendiculaire" au lieu d'"orthogonal".

1.5.2 Quelques expressions analytiques

En guise d'exercices, exprimons analytiquement quelques relations faisant intervenir le parallélisme et l'orthogonalité d'une droite et d'un plan. On suppose être dans un espace muni d'un repère orthonormé.

On donne la droite d et le plan Π d'équations cartésiennes

$$\Pi : \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0 \quad d : \begin{cases} ax + by + cz + e = 0 \\ a'x + b'y + c'z + e' = 0 \end{cases}$$

où $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$ et $(a, b, c), (a', b', c')$ sont les composantes de vecteurs linéairement indépendants. Notons \vec{n} et \vec{n}' ces vecteurs et $(\alpha', \beta', \gamma')$ les composantes du produit vectoriel de \vec{n} et \vec{n}' .

La droite d et le plan Π sont

- parallèles si et seulement si

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0$$

- orthogonaux si et seulement s'il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que

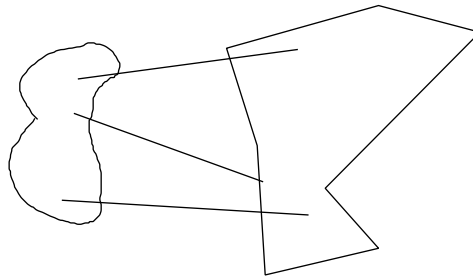
$$\alpha = r\alpha', \quad \beta = r\beta', \quad \gamma = r\gamma'.$$

1.6 Distances

Rappelons la définition de la distance entre deux ensembles non vides E, E' de l'espace:

$$\text{dist}(E, E') = \inf\{\|\overrightarrow{PP'}\| : P \in E, P' \in E'\}.$$

Remarquons immédiatement que si l'intersection des ensembles E et E' n'est pas vide, la distance entre ces deux ensembles est nulle.



Les bornes inférieures et supérieures d'ensembles ne sont pas toujours aisées à calculer. Cependant, dans le cas de la distance entre les éléments géométriques introduits précédemment (point, droite, plan), on obtient des méthodes de calcul très rapides de cette distance.

1.6.1 Distance entre deux points

Si A, A' sont deux points de l'espace, la distance entre ces points est notée

$$\text{dist}(A, A')$$

et elle vaut bien sûr

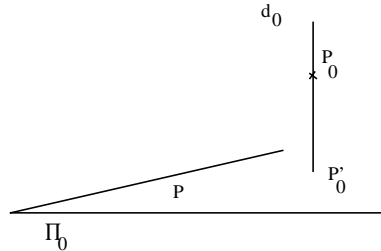
$$\text{dist}(\{A\}, \{A'\}) = \|\overrightarrow{AA'}\|.$$

Si, dans un repère orthonormé, A, A' ont respectivement pour coordonnées cartésiennes (a, b, c) et (a', b', c') , on a

$$\text{dist}(A, A') = \sqrt{(a - a')^2 + (b - b')^2 + (c - c')^2}.$$

1.6.2 Distance entre un point et un plan

Soit P_0 un point de l'espace et Π_0 un plan. La distance entre le singleton $\{P_0\}$ et Π_0 est notée $dist(P_0, \Pi_0)$. Notons d_0 la droite passant par P_0 et orthogonale au plan Π_0 . Désignons par P'_0 le point d'intersection de d_0 et du plan Π_0 . Ce point s'appelle la *projection orthogonale de P_0 sur Π_0* .

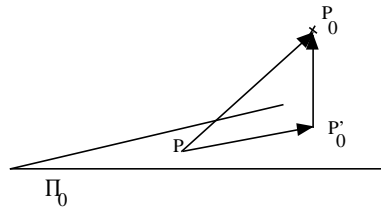


Pour tout $P \in \Pi_0$, on a

$$\overrightarrow{P_0P} = \overrightarrow{P_0P'_0} + \overrightarrow{P'_0P}$$

avec

$\overrightarrow{P_0P'_0}$ = projection orthogonale du vecteur $\overrightarrow{P_0P}$ sur la droite vectorielle associée à d_0
 $\overrightarrow{P'_0P}$ = projection orthogonale du vecteur $\overrightarrow{P_0P}$ sur le plan vectoriel associé à Π_0 .



Vu l'orthogonalité entre les vecteurs $\overrightarrow{P_0P'_0}$ et $\overrightarrow{P'_0P}$, on a

$$\|\overrightarrow{P_0P}\|^2 = \|\overrightarrow{P_0P'_0}\|^2 + \|\overrightarrow{P'_0P}\|^2$$

donc

$$\|\overrightarrow{P_0P}\| \geq \|\overrightarrow{P_0P'_0}\| \quad \forall P \in \Pi_0.$$

Il s'ensuit que le réel $\|\overrightarrow{P_0P'_0}\|$ est la borne inférieure de l'ensemble $\{\|\overrightarrow{P_0P}\| : P \in \Pi_0\}$ donc

$$dist(P_0, \Pi_0) = \|\overrightarrow{P_0P'_0}\|.$$

Cela étant, donnons maintenant une expression analytique de cette distance en fonction de l'équation cartésienne de Π_0 et des coordonnées cartésiennes du point P_0 .

Propriété 1.6.1 Si P_0 a pour coordonnées cartésiennes (x_0, y_0, z_0) et si Π_0 a pour équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ alors

$$dist(P_0, \Pi_0) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Preuve. Nous reprenons les résultats et notations introduits ci-dessus.

Vu ce qui précède, on doit calculer la longueur du vecteur $\overrightarrow{P_0P'_0}$. Comme celui-ci est la projection orthogonale du vecteur $\overrightarrow{P_0P}$ sur la droite vectorielle associée à d_0 et comme cette droite vectorielle est engendrée par le vecteur \vec{n} de composantes (a, b, c) , on a

$$\begin{aligned}\overrightarrow{P_0P'_0} &= \frac{\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n} \\ &= \frac{a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0)}{a^2 + b^2 + c^2} \vec{n}\end{aligned}$$

donc

$$\|\overrightarrow{P_0P'_0}\| = \frac{|a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

□

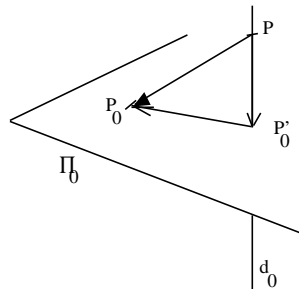
1.6.3 Distance entre un point et une droite

Soit P_0 un point de l'espace et d_0 une droite. La distance entre le singleton $\{P_0\}$ et d_0 est notée $dist(P_0, d_0)$. Notons Π_0 le plan passant par P_0 et orthogonal à la droite d_0 . Désignons par P'_0 le point d'intersection de d_0 et du plan Π_0 . Ce point s'appelle la *projection orthogonale de P_0 sur d_0* . Pour tout $P \in d_0$, on a

$$\overrightarrow{P_0P} = \overrightarrow{P_0P'_0} + \overrightarrow{P'_0P}$$

avec

$\overrightarrow{P_0P'_0}$ = projection orthogonale du vecteur $\overrightarrow{P_0P}$ sur le plan vectoriel associé à Π_0
 $\overrightarrow{P'_0P}$ = projection orthogonale du vecteur $\overrightarrow{P_0P}$ sur la droite vectorielle associée à d_0 .



Vu l'orthogonalité entre les vecteurs $\overrightarrow{P_0P'_0}$ et $\overrightarrow{P'_0P}$, on a, comme dans le cas précédent

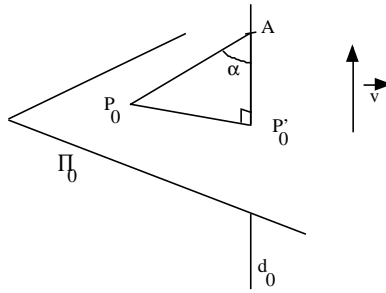
$$dist(P_0, d_0) = \|\overrightarrow{P_0P'_0}\|.$$

Comme dans le cas précédent aussi, donnons maintenant une expression analytique de cette distance en fonction de P_0 , d'un point et d'un vecteur directeur de d_0 .

Propriété 1.6.2 Pour tout $A \in d_0$ et pour tout vecteur directeur \vec{v} de d_0 , on a

$$dist(P_0, d_0) = \frac{\|\overrightarrow{AP_0} \wedge \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}.$$

Preuve. Nous reprenons les résultats et notations introduits ci-dessus.



Par construction, si α désigne la mesure de l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{AP_0}$ et \vec{v} (en supposant que ces vecteurs ne sont pas nuls), on a

$$\|\overrightarrow{P_0P'_0}\| = \|\overrightarrow{AP_0}\| \sin \alpha.$$

On obtient alors successivement

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{P_0P'_0}\| &= \frac{\|\overrightarrow{AP_0}\| \|\vec{v}\| \sin \alpha}{\|\vec{v}\|} \\ &= \frac{\|\overrightarrow{AP_0} \wedge \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}. \end{aligned}$$

□

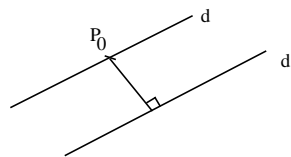
1.6.4 Distance entre deux droites

CAS DE DEUX DROITES PARALLÈLES

Si les droites sont confondues, leur distance est nulle. Si elles ne sont pas confondues, par un raisonnement analogue à celui des cas précédents, on obtient que

$$\text{dist}(d, d') = \text{dist}(P_0, d') = \|\overrightarrow{P_0P'_0}\|$$

où P_0 est un point quelconque de d et P'_0 sa projection orthogonale sur d' . On est donc ramené au cas de la distance entre un point et une droite.



CAS DE DEUX DROITES SÉCANTES

La distance entre deux droites sécantes est nulle.

CAS DE DEUX DROITES GAUCHES

Deux droites d et d' sont dites *gauches* si elles ne sont pas parallèles et n'ont aucun point commun. Il revient au même de dire que d et d' sont gauches si elles n'appartiennent pas à un même plan.

Avant de démontrer un résultat permettant de calculer directement la distance entre deux droites gauches, établissons un résultat auxiliaire, qui a son intérêt propre.

Propriété 1.6.3 *Si d et d' sont deux droites gauches, alors il existe une et une seule droite d_0 qui a les propriétés suivantes:*

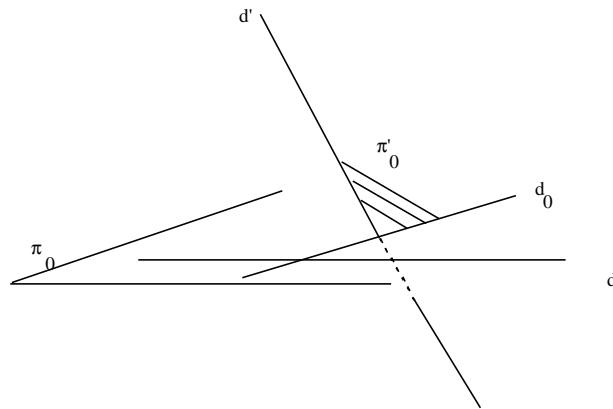
- d et d_0 sont orthogonales
- d' et d_0 sont orthogonales
- $d \cap d_0 = \text{un point}$, $d' \cap d_0 = \text{un point}$.

La droite d_0 est appelée la perpendiculaire commune aux droites d et d' ⁵.

Preuve. Soient \vec{v}, \vec{v}' des vecteurs directeurs de d et d' respectivement.

Montrons l'unicité de la droite annoncée dans l'énoncé. Si d_0 est une droite qui remplit les conditions énoncées, alors le vecteur $\vec{v} \wedge \vec{v}'$ est un vecteur directeur de d_0 . De plus, d_0 est dans le plan Π_0 formé par d et d_0 (Π_0 peut aussi être vu comme le plan comprenant d et ayant en outre $\vec{v} \wedge \vec{v}'$ comme vecteur directeur) et également dans le plan Π'_0 formé par d' et d_0 (Π'_0 peut aussi être vu comme le plan comprenant d' et ayant en outre $\vec{v} \wedge \vec{v}'$ comme vecteur directeur). On a donc $d_0 \subset \Pi_0 \cap \Pi'_0$. Les deux plans Π_0, Π'_0 n'étant pas confondus (car d et d' sont gauches) et contenant tous les deux d_0 , on obtient que $d_0 = \Pi_0 \cap \Pi'_0$.

Montrons l'existence de d_0 . Considérons les plans Π_0 et Π'_0 (Π_0 est le plan comprenant d et ayant en outre $\vec{v} \wedge \vec{v}'$ comme vecteur directeur; Π'_0 est le plan comprenant d' et ayant en outre $\vec{v} \wedge \vec{v}'$ comme vecteur directeur). Ces plans ne sont pas parallèles (car s'ils l'étaient, les vecteurs $\vec{v}, \vec{v}', \vec{v} \wedge \vec{v}'$ seraient dans un même plan vectoriel, c'est-à-dire linéairement dépendants). Dès lors l'intersection de ces deux plans est une droite. Posons $d_0 = \Pi_0 \cap \Pi'_0$ et montrons que d_0 remplit les conditions de l'énoncé. Comme le vecteur $\vec{v} \wedge \vec{v}'$ est à la fois parallèle à Π_0 et à Π'_0 , la droite d_0 a nécessairement ce vecteur comme vecteur directeur; elle est donc orthogonale à d et aussi à d' . De plus, comme d et d_0 sont dans le plan Π_0 et ne sont pas parallèles, elles se coupent en un point; il en est de même pour d' et d_0 . \square



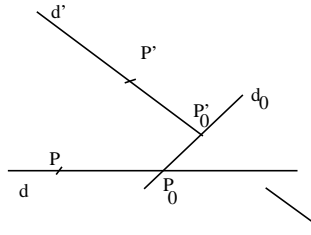
Calculons maintenant la distance entre deux droites gauches de façon pratique.

Propriété 1.6.4 Soient d, d' deux droites gauches de perpendiculaire commune d_0 . Si les points P_0, P'_0 sont respectivement les points d'intersection de d_0 et d, d' alors

$$\text{dist}(d, d') = \|\overrightarrow{P_0 P'_0}\| = \frac{|\overrightarrow{PP'} \bullet (\vec{v} \wedge \vec{v}')|}{\|\vec{v} \wedge \vec{v}'\|}$$

où P est un point de d , P' un point de d' , \vec{v} un vecteur directeur de d , \vec{v}' un vecteur directeur de d' .

⁵Remarquons que si d et d' sont sécantes, alors la droite passant par le point commun à ces deux droites et orthogonale au plan formé par ces droites est la seule droite qui possède les propriétés énoncées ci-dessus.



Preuve. Pour tous $P \in d, P' \in d'$, on a

$$\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{PP_0} + \overrightarrow{P_0P'_0} + \overrightarrow{P'_0P'}.$$

Comme les vecteurs $\overrightarrow{PP_0} + \overrightarrow{P'_0P'}$ et $\overrightarrow{P_0P'_0}$ sont orthogonaux, on a

$$\|\overrightarrow{PP'}\|^2 = \|\overrightarrow{PP_0} + \overrightarrow{P'_0P'}\|^2 + \|\overrightarrow{P_0P'_0}\|^2$$

donc

$$\|\overrightarrow{PP'}\| \geq \|\overrightarrow{P_0P'_0}\|, \quad \forall P \in d, P' \in d'$$

et par suite

$$\text{dist}(d, d') = \|\overrightarrow{P_0P'_0}\|.$$

Cela étant, comme

$$\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{PP_0} + \overrightarrow{P_0P'_0} + \overrightarrow{P'_0P'}$$

où les vecteurs $\overrightarrow{PP_0} + \overrightarrow{P'_0P'}$ et $\overrightarrow{P_0P'_0}$ sont orthogonaux, le vecteur $\overrightarrow{P_0P'_0}$ est la projection orthogonale du vecteur $\overrightarrow{PP'}$ sur la droite vectorielle engendrée par $\vec{v} \wedge \vec{v}'$. Il s'ensuit que

$$\overrightarrow{P_0P'_0} = \frac{\overrightarrow{PP'} \bullet (\vec{v} \wedge \vec{v}')}{\|\vec{v} \wedge \vec{v}'\|^2} \vec{v} \wedge \vec{v}'$$

donc

$$\|\overrightarrow{P_0P'_0}\| = \frac{|\overrightarrow{PP'} \bullet (\vec{v} \wedge \vec{v}')|}{\|\vec{v} \wedge \vec{v}'\|}.$$

□

Remarquons que si les droites sont sécantes, l'expression $\frac{P\vec{P}' \bullet (\vec{v} \wedge \vec{v}')}{\|\vec{v} \wedge \vec{v}'\|}$ est nulle (il suffit de prendre $P = P' =$ point d'intersection des droites). Dès lors, la distance entre deux droites non parallèles d, d' est donnée par

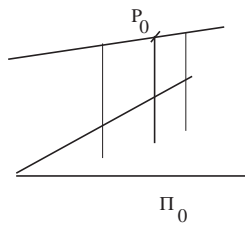
$$\frac{|\overrightarrow{PP'} \bullet (\vec{v} \wedge \vec{v}')|}{\|\vec{v} \wedge \vec{v}'\|}$$

où P est un point de d , P' un point de d' , \vec{v} un vecteur directeur de d , \vec{v}' un vecteur directeur de d' .

1.6.5 Distance entre une droite et un plan

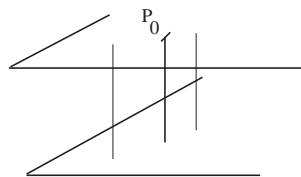
Si la droite et le plan ne sont pas parallèles, ils ont un point commun et la distance est donc nulle.

Si la droite est parallèle au plan, par un raisonnement analogue à celui qui a été fait dans les cas précédents, on montre que la distance entre la droite et le plan est égale à la distance entre un point quelconque de la droite et le plan. On est donc ramené au cas du calcul de la distance entre un point et un plan.



1.6.6 Distance entre deux plans

Si les plans sont parallèles, par un raisonnement analogue à celui qui a été fait dans les cas précédents, on montre que la distance entre ceux-ci est égale à la distance entre un point quelconque de l'un d'eux et de l'autre plan. On est donc ramené au cas du calcul de la distance entre un point et un plan.



Si les plans ne sont pas parallèles, ils ont une intersection non vide. La distance entre les plans est donc nulle.

1.7 Angles

Rappelons que l'angle (ou plutôt la mesure de l'angle non orienté) entre deux vecteurs non nuls \vec{v}, \vec{v}' est le réel $\theta \in [0, \pi]$ tel que

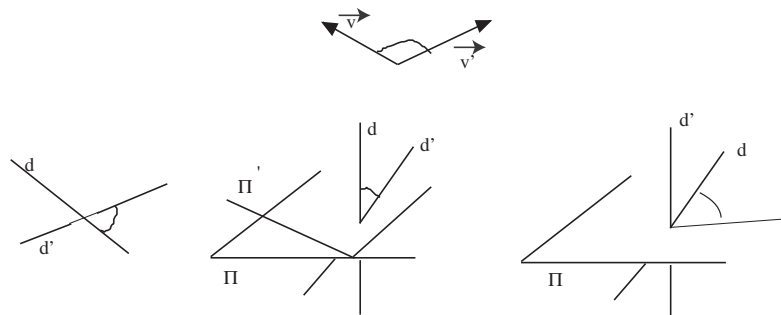
$$\vec{v} \bullet \vec{v}' = \|\vec{v}\| \|\vec{v}'\| \cos \theta.$$

Notons $a(\vec{v}, \vec{v}')$ l'angle entre les vecteurs \vec{v}, \vec{v}' .

Si d et d' sont deux droites de vecteurs directeurs \vec{v}, \vec{v}' respectivement, l'angle entre les deux droites est, par définition, le plus petit des angles $a(\vec{v}, \vec{v}')$ et $a(\vec{v}, -\vec{v}')$. L'angle entre deux droites appartient donc toujours à l'intervalle $[0, \pi/2]$.

Soient Π, Π' deux plans. Notons d une droite⁶ orthogonale à Π et d' une droite orthogonale à Π' . Par définition, l'angle entre les deux plans Π et Π' est l'angle entre d et d' . Il s'agit donc d'un réel de l'intervalle $[0, \pi/2]$.

Soient d et Π respectivement une droite et un plan. Si d' désigne une normale à Π , l'angle (ou plutôt la mesure de l'angle) entre la droite d et le plan Π est $\pi/2$ moins l'angle entre d et d' . Il s'agit donc d'un réel de l'intervalle $[0, \pi/2]$.

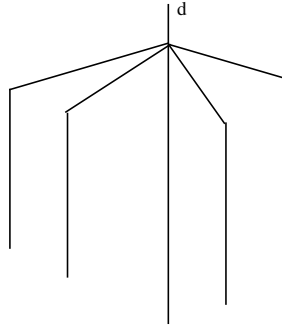


⁶Une droite orthogonale à un plan est qualifiée de droite normale au plan.

1.8 Faisceaux de plans

Les faisceaux de plans représentent un outil de calcul particulièrement efficace dans plusieurs situations car ils permettent de donner directement la forme de l'équation d'un plan quand on sait qu'il contient une droite donnée.

Soit d une droite. On appelle *faisceau de plans d'axe d* l'ensemble des plans qui contiennent la droite d .



Proposition 1.8.1 Soit la droite d d'équations cartésiennes

$$\begin{cases} ax + by + cz + e = 0 \\ a'x + b'y + c'z + e' = 0 \end{cases}$$

où les vecteurs \vec{n}, \vec{n}' respectivement de composantes $(a, b, c), (a', b', c')$ sont linéairement indépendants. Alors un plan Π est un plan du faisceau d'axe d si et seulement si Π a une équation cartésienne de la forme

$$r(ax + by + cz + e) + s(a'x + b'y + c'z + e') = 0$$

où r, s sont des réels non simultanément nuls.

Preuve. Remarquons tout d'abord que pour tous réels r, s non simultanément nuls, l'équation $r(ax + by + cz + e) + s(a'x + b'y + c'z + e') = 0$ est bien celle d'un plan. En effet, elle s'écrit aussi

$$(ra + sa')x + (rb + sb')y + (rc + sc')z + re + se' = 0$$

et les coefficients $ra + sa', rb + sb', rc + sc'$ ne sont pas tous nuls car les vecteurs \vec{n}, \vec{n}' sont linéairement indépendants et r, s ne sont pas tous les deux nuls.

Cela étant, un plan d'équation $r(ax + by + cz + e) + s(a'x + b'y + c'z + e') = 0$ contient la droite d car si $P(x, y, z)$ est un point de d , on a $ax + by + cz + e = 0$ et $a'x + b'y + c'z + e' = 0$ donc aussi $r(ax + by + cz + e) + s(a'x + b'y + c'z + e') = 0$.

Réciproquement, supposons que le plan Π d'équation cartésienne $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$, où $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$, contienne la droite d . En particulier, d et Π sont parallèles donc le vecteur \vec{n}'' de composantes (α, β, γ) est orthogonal au vecteur $\vec{n} \wedge \vec{n}'$, vecteur directeur de d ; dès lors, \vec{n}'' est dans le plan vectoriel engendré par \vec{n}, \vec{n}' . Il s'ensuit qu'il existe des réels r, s tels que $\vec{n}'' = r\vec{n} + s\vec{n}'$ ou encore, en passant aux composantes,

$$\alpha = ra + sa', \quad \beta = rb + sb', \quad \gamma = rc + sc'.$$

Soit ensuite un point P_0 de d ; notons (x_0, y_0, z_0) ses coordonnées cartésiennes. On a donc

$$e = -(ax_0 + by_0 + cz_0) \quad \text{et} \quad e' = -(a'x_0 + b'y_0 + c'z_0).$$

Comme Π contient d , le point P_0 est aussi un point de Π ; dès lors $\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0 + \delta = 0$ ou encore

$$(ra + sa')x_0 + (rb + sb')y_0 + (rc + sc')z_0 + \delta = 0$$

en utilisant les relations entre $\alpha, \beta, \gamma, a, b, c$ trouvées ci-dessus. On obtient ainsi

$$\begin{aligned} \delta &= -(ra + sa')x_0 - (rb + sb')y_0 - (rc + sc')z_0 \\ &= -r(ax_0 + by_0 + cz_0) - s(a'x_0 + b'y_0 + c'z_0) \\ &= re + se'. \end{aligned}$$

Au total on a

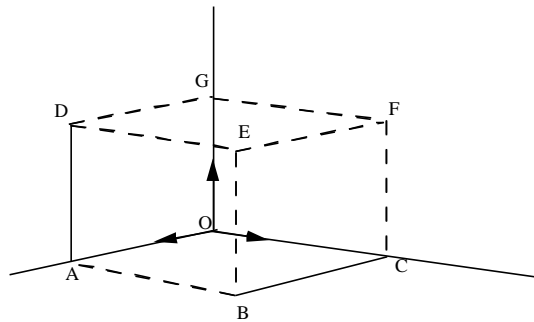
$$\alpha = ra + sa', \quad \beta = rb + sb', \quad \gamma = rc + sc', \quad \delta = re + se'$$

et on peut donc conclure que l'équation de Π a la forme annoncée. \square

1.9 Exercices

1.9.1 Calcul vectoriel

1. Soit une base orthonormée $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ de l'espace (représentée en traits gras sur le dessin). Les vecteurs $\vec{OA}, \vec{OG}, \vec{OC}$ y ont respectivement pour composantes $(2, 0, 0)$, $(0, 0, 2)$ et $(0, 3, 0)$.



Dans ce qui suit, sauf mention du contraire, les composantes des vecteurs sont demandées dans la base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.

- (a) Déterminer les composantes des vecteurs $\vec{GF}, \vec{OF}, \vec{BC}, \vec{EC}, \vec{OB}$
- (b) Représenter le vecteur de composantes $(2, 3, 1)$ et celui de composantes $(-1, -1, -1)$.
- (c) Calculer le produit scalaire de \vec{EF} avec \vec{OB}
- (d) Calculer les composantes du produit vectoriel de \vec{FA} avec \vec{GE}
- (e) Déterminer les composantes du vecteur $(\vec{OA} \wedge \vec{EF}) \wedge \vec{GA}$.
- (f) Déterminer la mesure de l'angle (non orienté) entre \vec{OE} et \vec{OB}
- (g) Déterminer les composantes de la projection orthogonale du vecteur \vec{OE} sur le plan formé par \vec{BC} et \vec{OC}
- (h) Déterminer les composantes de la projection orthogonale du vecteur \vec{AF} sur la droite vectorielle déterminée par \vec{e}_1
- (i) Déterminer les composantes de la projection orthogonale du vecteur \vec{AF} sur le plan vectoriel déterminé par \vec{e}_1 et \vec{e}_3
- (j) Déterminer les composantes de la projection orthogonale du vecteur \vec{AF} sur le plan vectoriel déterminé par \vec{e}_1 et \vec{OE}

- (k) Déterminer les composantes de la projection orthogonale du vecteur $\vec{x} = 3\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 4\vec{e}_3$ sur la droite déterminée par \vec{e}_2 .
- (l) Déterminer les composantes de la projection orthogonale du vecteur $\vec{x} = 3\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 4\vec{e}_3$ sur la droite déterminée par \overrightarrow{CA} .
- (m) On considère le plan L , formé par les vecteurs \vec{e}_1 et \vec{e}_2 . Dans ce plan, on considère les vecteurs \overrightarrow{OB} et $\vec{a} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$. Ces vecteurs forment-ils une base de L ? Si la réponse est oui, déterminer les composantes du vecteur \vec{e}_1 dans cette nouvelle base.

2. Soit une base orthonormée $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ de l'espace. On donne les vecteurs

$$\vec{u} = 2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - \vec{e}_3, \quad \vec{v} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2, \quad \vec{w} = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3.$$

- (a) Ces vecteurs sont-ils linéairement dépendants ou indépendants?
- (b) Représenter ces vecteurs.
- (c) Calculer le produit scalaire de \vec{u} avec \vec{v} .
- (d) Déterminer les composantes d'un vecteur non nul orthogonal au vecteur \vec{v} .
- (e) Calculer le produit vectoriel de \vec{u} avec \vec{w} .
- (f) Parmi les expressions suivantes, déterminer celles qui ont un sens et les calculer.

$$\vec{u} \bullet \vec{v} \bullet \vec{w}, \quad (\vec{u} \wedge \vec{v}) \bullet \vec{w}, \quad (\vec{u} \bullet \vec{v})\vec{w}, \quad (\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}, \quad (\vec{u} \wedge \vec{v}) \bullet \vec{w} - \vec{v} \wedge \vec{w}$$

- (g) Déterminer les composantes de la projection orthogonale de \vec{u} sur le plan engendré par \vec{e}_1 et \vec{e}_2 .
- (h) Vérifier que les vecteurs \vec{u} et \vec{v} déterminent bien un plan L . Ensuite, déterminer les composantes de la projection orthogonale de \vec{w} sur ce plan.
3. Soit $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ une base orthonormée de l'espace. On considère les trois vecteurs $\vec{a} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\vec{b} = b_1\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3$, $\vec{c} = \vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2 + \vec{e}_3$. On demande de déterminer b_1 et b_3 dans les cas suivants
- (a) les vecteurs \vec{a} et \vec{b} sont orthogonaux;
- (b) les vecteurs \vec{a} et \vec{b} sont parallèles;
- (c) les trois vecteurs sont coplanaires.

4. a) Interpréter géométriquement le produit vectoriel $\vec{x} \wedge \vec{e}$ lorsque $\|\vec{e}\| = 1$ et $\vec{e} \bullet \vec{x} = 0$.
- b) On démontre que

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\vec{u} \bullet \vec{w}) \vec{v} - (\vec{v} \bullet \vec{w}) \vec{u}$$

pour tous vecteurs libres $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$. Par une interprétation géométrique, montrer qu'effectivement le vecteur du membre de gauche est une combinaison linéaire de \vec{u} et \vec{v} .

5. Démontrer l'identité de Jacobi

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c} + (\vec{b} \wedge \vec{c}) \wedge \vec{a} + (\vec{c} \wedge \vec{a}) \wedge \vec{b} = \vec{0}.$$

6. Démontrer l'identité

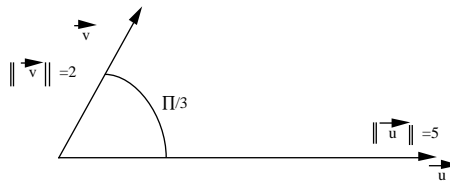
$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \bullet (\vec{c} \wedge \vec{d}) = (\vec{a} \bullet \vec{c})(\vec{b} \bullet \vec{d}) - (\vec{a} \bullet \vec{d})(\vec{b} \bullet \vec{c}).$$

7. Démontrer l'identité

$$((\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c})) \bullet (\vec{c} \wedge \vec{a}) = [(\vec{a} \wedge \vec{b}) \bullet \vec{c}]^2.$$

En déduire que, si les vecteurs \vec{a}, \vec{b} et \vec{c} sont linéairement indépendants, il en est de même des vecteurs $\vec{a} \wedge \vec{b}, \vec{b} \wedge \vec{c}$ et $\vec{c} \wedge \vec{a}$.

8. On se place dans l'espace et on considère une base $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$. Pour quelles valeurs de $r, s \in \mathbb{R}$ les vecteurs $\vec{b}_1 = r\vec{a}_1 + s\vec{a}_2$, $\vec{b}_2 = r\vec{a}_2 + s\vec{a}_3$, $\vec{b}_3 = r\vec{a}_3 + s\vec{a}_1$ sont-ils linéairement dépendants? Forment-ils une base pour $r = s = 1$? Si oui, quelles sont les composantes de $\vec{v} = 2\vec{a}_1 + \vec{a}_2 - \vec{a}_3$ dans cette nouvelle base?
9. Dans l'espace muni d'une base orthonormée, on donne les vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ respectivement de composantes $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$, $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$, $(0, 0, 1)$. Montrer que ces vecteurs forment une base orthonormée de l'espace. Calculer dans celle-ci les composantes du vecteur \vec{v} ayant, dans la base de départ, les composantes suivantes $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, -1)$.
10. On se place dans l'espace muni d'une base orthonormée. On donne les vecteurs \vec{v}_1, \vec{v}_2 par leurs composantes dans cette base, soit respectivement $(1, -2, 3)$, $(0, 1, -1)$. Calculer $\vec{v}_1 \bullet \vec{v}_2$, $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$, $(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \bullet (\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2)$, le cosinus de l'angle entre \vec{v}_1, \vec{v}_2 .
11. Calculer le produit scalaire des vecteurs \vec{u}, \vec{v} dans chacun des cas suivants:
 a) $\vec{u} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3$ et $\vec{v} = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$.
 b)



12. Les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont dans le plan de la feuille. Représenter (géométriquement) la projection orthogonale de \vec{v} sur \vec{u} (plus précisément sur la droite vectorielle déterminée par \vec{u}). Si $\vec{u} = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$, $\vec{v} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$, quelles sont les composantes de cette projection dans la base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$?



13. Dans l'espace des vecteurs libres, on fixe une base orthonormée formée des vecteurs $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ et on donne le vecteur \vec{u} de composantes $(1, 1, 0)$ dans cette base. On demande de caractériser l'ensemble des vecteurs \vec{v} dont la projection orthogonale sur la droite vectorielle déterminée par \vec{e}_3 est $\vec{0}$ et dont le produit scalaire avec le vecteur \vec{u} vaut 1. On demande aussi une représentation géométrique de cet ensemble de vecteurs.
14. Dans l'espace des vecteurs libres, on fixe une base orthonormée formée des vecteurs $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. On demande de déterminer les composantes d'un vecteur \vec{u} dans cette base sachant que la mesure de l'angle non orienté entre \vec{u} et \vec{e}_1 vaut $\pi/3$, celle entre \vec{u} et \vec{e}_2 vaut $\pi/3$, celle entre \vec{u} et \vec{e}_3 vaut $\pi/4$ et sachant que le produit scalaire de \vec{u} et du vecteur \vec{v} de composantes $(1, -1, \sqrt{2}/2)$ est égal à 2.
15. Dans l'espace, on fixe un repère orthonormé formé d'un point O et de trois vecteurs orthonormés $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. On donne les points P, Q, R respectivement de coordonnées

$$(1, 2, 3), (-1, 0, 1), (1, 1, 0).$$

Dans la base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, calculer les composantes de la projection orthogonale du vecteur \overrightarrow{PR} sur la droite vectorielle engendrée par \overrightarrow{PQ} . Justifier vos démarches.

16. On donne les vecteurs \vec{a}, \vec{b} tels que

$$\|\vec{a}\| = 2\|\vec{b}\|, \quad \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} \bullet \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|} = \frac{-1}{2}.$$

Représenter ces vecteurs et justifier votre représentation.

17. Répondre aux questions à choix multiples suivantes.

- Le produit scalaire de deux vecteurs est un vecteur Vrai Faux .
- Si \vec{u} et \vec{v} sont parallèles, alors \vec{u} est un multiple de \vec{v} Vrai Faux .
- La projection orthogonale d'un vecteur sur une droite vectorielle est un vecteur , un nombre réel , une droite , un ensemble de vecteurs , aucune des réponses précédentes ne convient .
- Le produit scalaire de deux vecteurs parallèles est toujours un nombre positif ou nul. Vrai Faux .

1.9.2 Géométrie analytique

1. Déterminer l'équation cartésienne du plan passant par les points A_1 et A_2 de coordonnées respectives $(1, 0, -2)$, $(-1, 1, 1)$ et parallèle à la droite d d'équations $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ x - 2z + 1 = 0. \end{cases}$

Déterminer des équations cartésiennes de la droite orthogonale au plan $\pi : 3x - y + z = 0$ et passant par le point de coordonnées $(4, 7, 9)$.

2. Déterminer l'équation cartésienne du plan passant par le point A de coordonnées $(1, 2, 3)$ et dont deux vecteurs directeurs ont respectivement pour composantes $(-1, 2, 3)$, $(-3, 2, 0)$.

Déterminer des équations cartésiennes de la droite orthogonale au plan déterminé ci-dessus et passant par le point A .

3. On donne la droite

$$d : \begin{cases} x + y = 4 \\ x - 2y + z + 1 = 0 \end{cases}$$

- Déterminer l'équation cartésienne du plan orthogonal à cette droite et passant par le point P_0 de coordonnées $(1, 1, 1)$.
 - Déterminer des équations paramétriques de la droite parallèle à d passant par le point de coordonnées $(1, 2, 3)$.
 - Le plan Π d'équation $3x + y - z = 4$ est-il parallèle à d ? Si ce n'est pas le cas, déterminer les coordonnées du point d'intersection de Π et d . Déterminer ensuite des équations cartésiennes de la droite orthogonale à π et passant par ce point.
4. On donne le plan Π d'équation cartésienne $x + y - 4z + 5 = 0$.
- Déterminer des équations paramétriques de ce plan.
 - Déterminer des équations cartésiennes de la droite orthogonale à ce plan et passant par le point de coordonnées $(1, 0, 2)$.
 - Déterminer des équations paramétriques d'une droite parallèle à ce plan et passant par le point de coordonnées $(3, 1, -1)$.
 - Déterminer l'équation cartésienne du plan parallèle à Π passant par le point de coordonnées $(3, 1, 0)$.
 - Déterminer l'équation cartésienne d'un plan quelconque orthogonal à π et passant par le point de coordonnées $(1, 1, 1)$.

5. On donne la droite d_0 et le plan Π_0 par leurs équations cartésiennes:

$$d_0 : \begin{cases} x + y = 1 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}, \quad \Pi_0 : x + y + z = 1.$$

- Quelle est l'équation cartésienne du plan Π_1 , orthogonal à la droite d_0 et qui passe par le point P_1 de coordonnées $(1, 0, 1)$?
- Déterminer des équations paramétriques d'une droite d_2 parallèle au plan Π_0 et passant par le point P_2 de coordonnées $(1, 2, 3)$.

6. Déterminer

- les composantes d'un vecteur directeur de la droite déterminée par l'intersection des deux plans respectivement d'équation $x - y + z - 1 = 0$ et $2x + y + z = 0$.
- l'équation cartésienne du plan π passant par les points de coordonnées $(1, 2, 3)$, $(2, -1, 4)$, $(-1, 7, 1)$,
- des équations cartésiennes de la droite d passant par les points de coordonnées $(2, 3, 6)$ et $(-1, 2, 3)$
- l'équation cartésienne du plan passant par le point de coordonnées $(2, 1, -1)$ et contenant la droite d'équation $\begin{cases} x + y - z = 3 \\ y + z = 0 \end{cases}$
- l'équation cartésienne du plan déterminé par les droites parallèles d et d' suivantes

$$d : \frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-5}{4}, \quad d' : \frac{x+3}{3} = \frac{y-4}{2} = \frac{z}{4}$$

- l'équation cartésienne du plan orthogonal à l'axe Z et qui contient le point de coordonnées $(2, 3, -1)$

7. Dans chacun des cas suivants, les plans Π et Π' sont-ils parallèles? Si ce n'est pas le cas, déterminer des équations paramétriques de la droite déterminée par leur intersection.

- $\Pi : x + y + z = 4$, $\Pi' : 2x - 3y = 0$
- $\Pi : x + 2y + z = 4$, $\Pi' : 2x + 4y + 2z = 0$
- $\Pi : x - y + z = -1$, $\Pi' : x - y = 6$

8. Dans chacun des cas suivants, le plan Π et la droite d sont-ils parallèles? Si ce n'est pas le cas, déterminer les coordonnées cartésiennes du point d'intersection.

- $\Pi : x + y + z = 4$, $d : \frac{x-2}{3} = \frac{-y+1}{2} = \frac{z}{5}$
- $\Pi : x + 2y + z = 4$, $d : \begin{cases} x + 4y + 2z = 0 \\ -x - y + 2z = 1 \end{cases}$
- $\Pi : x - y + z = -1$, $d : \begin{cases} 2x - 4y + z = 0 \\ -x + y = 1 \end{cases}$

9. On donne les deux droites

$$d : \begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + y = 9 \end{cases}, \quad d' : \begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x - y - z = 2 \end{cases}$$

Ces droites appartiennent-elles à un même plan? Si oui, en déterminer l'équation cartésienne.

10. On donne une droite d et un plan Π :

$$d : \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - 2z = 1 \end{cases}, \quad \Pi : 2x + y - z = 4$$

La droite d est-elle dans le plan Π , parallèle à Π mais d'intersection vide avec Π , non parallèle à Π ?

11. On donne les points A, B, C respectivement de coordonnées $(1, 4, 2)$, $(4, -3, -5)$, $(-5, -10, -8)$. Ces points appartiennent-ils à une même droite? Expliquer.
12. Déterminer a, b tels que le point de coordonnées $(a, b, 1)$ soit sur la droite passant par les points de coordonnées $(2, 5, 7)$, $(0, 3, 2)$.
13. Démontrer que les points de coordonnées

$$(-1, 1, 1), (0, 2, 1), (0, 0, \frac{3}{2}), (13, -1, 5)$$

sont situés dans un même plan.

14. On donne les plans

$$\Pi_1 : x - y + 2z + 1 = 0, \quad \Pi_2 : x + y + 2 = 0.$$

Expliquer pourquoi ces plans ne sont pas parallèles. Soit alors d la droite d'intersection de ces deux plans. Déterminer l'équation cartésienne du plan Π orthogonal à la droite d et passant par le point de coordonnées $(1, 1, 1)$.

15. On donne les plans Π_r (r est un paramètre réel)

$$\Pi_r : 3r^2x - r^2y + rz - 2 = 0$$

- Démontrer que ces plans ont un même vecteur directeur.
- Déterminer des équations cartésiennes de la droite d de vecteur directeur trouvé ci-dessus et telle que d rencontre d_1 et d_2 , les droites d_1, d_2 étant données par :

$$d_1 : \begin{cases} x + 2 = 0 \\ y = 0 \end{cases}, \quad d_2 : \begin{cases} x - z = 0 \\ y - 4 = 0 \end{cases}$$

16. Déterminer des équations cartésiennes de la droite passant par le point A de coordonnées $(-1, 2, 3)$ et d'intersection non vide avec les deux droites

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{5}; \quad \frac{x}{2} = y - 3 = \frac{z-1}{4}.$$

17. On donne les équations cartésiennes de trois droites:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = z; \quad \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{2}; \quad x = \frac{y-1}{2} = \frac{z-7}{2}.$$

- Déterminer des équations cartésiennes de la droite d parallèle à la troisième et rencontrant les deux premières.
 - Déterminer des équations de la droite d' passant par le point A de coordonnées $(1, 1, 1)$ et rencontrant les deux premières.
18. Dans chacun des cas suivants, déterminer la distance entre les deux ensembles donnés.
- P_0 de coordonnées $(1, 2, 3)$ et le plan Π d'équation $x - y + 2z = 4$
 - P_0 de coordonnées $(-1, 2, -8)$ et le plan Π d'équation $x - z = -1$
 - P_0 de coordonnées $(-2, 1, 0)$ et la droite d d'équations $\frac{x-2}{2} = \frac{-y+4}{4} = z$
 - P_0 de coordonnées $(2, 1, 1)$ et la droite d d'équations $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + 2z = -1 \end{cases}$
 - le plan π d'équation $x + y = 6$ et la droite d d'équations $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{4} = z - 2$
 - les droites d et d' d'équations respectives $d : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{4}$, $d' : \frac{-x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{4}$
 - les droites $d : \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + z = 4 \end{cases}$, $d' : \begin{cases} x - 2y - z = 1 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$

19. Dans chacun des cas suivants, déterminer les coordonnées cartésiennes de P_0 .
- P_0 est la projection orthogonale du point A de coordonnées $(1, 2, 3)$ sur le plan $\Pi : x - y + z = 2$
 - P_0 est la projection orthogonale du point A de coordonnées $(-1, 2, -2)$ sur la droite $d : \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$
 - P_0 est la projection orthogonale du point A de coordonnées $(-2, 0, -2)$ sur la droite $d : \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z}{3}$
20. Dans chacun des cas suivants, déterminer si les droites d et d' sont parallèles, sécantes ou gauches. Calculer ensuite la distance entre ces droites.
- a) $d : \begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ -x - y + z + 1 = 0 \end{cases}, \quad d' : \begin{cases} 2x + 2y + 3z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$
- b) $d : \begin{cases} 2x - y + z - 1 = 0 \\ x + 2y - 2 = 0 \end{cases}, \quad d' : \begin{cases} x + 2y + 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$
- c) $d : \begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ -x - y + z + 1 = 0 \end{cases}, \quad d' : \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y - z - 1 = 0 \end{cases}$
21. On donne la droite d d'équations cartésiennes $d : x - 1 = 4(6 - y) = 4(z - 1)$ et le point P_0 de coordonnées $(3, 1, 4)$.
- a) Déterminer la distance entre P_0 et d .
- b) Donner des équations cartésiennes des droites passant par P_0 et orthogonales à d .
22. Trouver deux points sur la droite d'équations cartésiennes

$$\frac{x+2}{3} = -(y+3) = \frac{z-2}{2}$$

qui sont à la distance 1 du plan d'équation $x + 2y - 2z + 3 = 0$.

23. On donne les systèmes suivants :

$$(a) : \begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}, \quad (b) : \begin{cases} x - 5z = 1 \\ 5x + y = 0 \end{cases}.$$

- 1) Chacun de ces systèmes représente une droite. Pourquoi?
 - 2) Déterminer des équations paramétriques de ces droites.
 - 3) Ces droites sont-elles parallèles? Pourquoi?
 - 4) Ces droites sont-elles gauches? Pourquoi?
 - 5) Calculer la distance entre ces droites.
 - 6) Déterminer l'équation cartésienne du plan passant par le point de coordonnées $(6, -30, 1)$ et orthogonal à la droite (a).
24. On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé. On donne les équations

$$(a) : \begin{cases} x + 2y - z - 1 = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases}, \quad (b) : \frac{7x - 15}{2} = \frac{7y + 34}{-5} = z,$$

$$(c) : y - z = 1, \quad (d) : \begin{cases} x + 2y - z - 1 = 0 \\ 2x + 4y - 2z - 1 = 0 \end{cases},$$

$$(e) : \begin{cases} -x + y - z - 1 = 0 \\ 2x + 4y - 2z - 1 = 0 \\ x + 2y - z - 1 = 0 \end{cases}, \quad (f) : \begin{cases} -x + y - z = 0 \\ y - 2z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}.$$

- 1) Dans chacun des cas (a),(b),(c),(d), (e), (f) le système représente-t-il une droite, un plan, un point, l'ensemble vide, l'espace? Justifier vos réponses. Dans chaque cas non vide, déterminer des équations paramétriques de l'ensemble représenté.
- 2) Déterminer la distance entre les ensembles donnés par (a) et (b), ainsi que celle entre les ensembles donnés par (a) et (c).
- 3) Calculer l'angle entre les ensembles donnés par (a) et (b), ainsi que celui entre les ensembles donnés par (a) et (c).
- 4) Si elle existe, déterminer des équations cartésiennes de la droite orthogonale au plan (c) et qui intersecte (a) et (b).
- 5) Si elle existe, déterminer des équations cartésiennes de la perpendiculaire commune à (a) et (b).
- 6) Déterminer une équation cartésienne du plan passant par le point de coordonnées (0, 0, 1) et orthogonal à (a).

25. On donne le plan $\Pi : 2x - 2y + z + 1 = 0$.
- a) Déterminer des équations paramétriques de ce plan.
 - b) Déterminer des équations cartésiennes de la droite d_0 passant par l'origine O et orthogonale à Π .
 - c) Déterminer des équations paramétriques de cette droite d_0 .
 - d) Déterminer la distance entre Π et le point de coordonnées (1, 1, 1).
 - e) On donne la droite d_1 d'équations cartésiennes

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3y - z = 0 \end{cases}$$

Les droites d_1 et d_0 sont-elles parallèles, concourantes, gauches? Justifier. Déterminer ensuite la distance entre ces droites.

26. Soient trois réels non tous nuls a, b, c . Déterminer l'équation cartésienne du plan contenant le point de coordonnées (a, b, c) et orthogonal au vecteur de composantes (a, b, c) .
27. Montrer que l'ensemble des points équidistants de deux points distincts donnés est un plan. Dans le cas où les deux points donnés ont pour coordonnées $(3, 1, 5)$ et $(5, -1, 3)$, déterminer l'équation cartésienne de ce plan.
28. Soit le plan Π d'équation cartésienne $x - y + 2z + 1 = 0$, la droite d d'équations cartésiennes $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$ et le point A de coordonnées $(1, -1, 1)$.

Déterminer les coordonnées du point qui est le symétrique (orthogonalement) de A par rapport à Π .

Déterminer les coordonnées du point qui est le symétrique (orthogonalement) de A par rapport à d .

29. Répondre aux questions à choix multiples suivantes

- 1) Dans l'espace, deux droites sont parallèles ou sécantes Vrai Faux
- 2) Deux plans non parallèles ont toujours une droite commune Vrai Faux
- 3) Etant donné deux droites gauches, il existe toujours une troisième qui est perpendiculaire à chacune des deux droites gauches et qui intersecte chacune de ces droites gauches Vrai Faux
- 4) Etant donné deux droites gauches et un point P qui n'appartient à aucune de ces droites, il existe toujours une droite qui passe par P et qui intersecte chacune des deux droites gauches Vrai Faux

- 5) Deux droites distinctes déterminent toujours un seul plan Vrai Faux
- 6) Etant donné un point et un plan, il existe toujours un plan unique passant par le point donné et orthogonal au plan donné Vrai Faux
- 7) Deux plans orthogonaux ont toujours une droite d'intersection Vrai Faux
- 8) Si deux plans sont orthogonaux, tout vecteur de l'un est orthogonal à tout vecteur de l'autre Vrai Faux
- 9) Si deux droites sont orthogonales, tout vecteur de l'une est orthogonal à tout vecteur de l'autre Vrai Faux
- 10) Si une droite et un plan sont orthogonaux, tout vecteur de la droite est orthogonal à tout vecteur du plan Vrai Faux

30. On donne la droite d d'équations cartésiennes

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ y + z + 3 = 0. \end{cases}$$

- a) Déterminer l'équation cartésienne du plan Π contenant la droite d et passant par le point P_0 de coordonnées $(1, 1, 1)$.
- b) Déterminer l'équation cartésienne du plan Π contenant la droite d et dont un vecteur directeur a pour composantes $(1, 1, 1)$.
- c) Même question que b) mais avec les composantes $(0, 1, 1)$.
31. Dans chacun des cas suivants, déterminer des équations cartésiennes de la (ou des) droite(s) (si elles existent; sinon, expliquer pourquoi elles n'existent pas) passant par le point P_0 et qui intersecte(nt) les deux droites données.

(a) $P_0(1, 0, 1)$ et

$$d_1 : \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3x + z = 0 \end{cases} \quad d_2 : \begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

(b) $P_0(-1, 1, -1)$ et d_1, d_2

(c) $P_0(1, 0, 1)$, d_1 et

$$d_3 : \begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$$

(d) $P_0(-1, 1, -1)$ et d_1, d_3

(e) $P_0(1, 1, -3)$ et d_1, d_3

(f) $P_0(1, 0, 1)$, d_1 et

$$d_4 : \begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

(g) $P_0(1, 2, 0)$, d_1, d_4 .

32. Dans chacun des cas suivants, déterminer des équations cartésiennes de la (ou des) droite(s) (si elles existent; sinon, expliquer pourquoi elles n'existent pas) ayant \vec{v}_0 comme vecteur directeur et qui intersecte(nt) les deux droites données.

On reprend les droites d_1, d_2, d_3, d_4 de l'exercice précédent.

(a) d_1, d_2 et $\vec{v}_0(2, 4, -6)$

(b) d_1, d_2 et $\vec{v}_0(1, 2, 3)$

- (c) d_1, d_2 et $\vec{v}_0(1, 0, -1)$
- (d) d_1, d_3 et $\vec{v}_0(1, -1, 0)$
- (e) d_1, d_3 et $\vec{v}_0(1, 2, -3)$
- (f) d_1, d_3 et $\vec{v}_0(1, 1, 1)$
- (g) d_1, d_4 et $\vec{v}_0(2, 1, 0)$
- (h) d_1, d_4 et $\vec{v}_0(1, 2, -9)$

1.9.3 Solutions

CALCUL VECTORIEL

1. (a) $\overrightarrow{GF}(0, 3, 0)$ $\overrightarrow{OF}(0, 3, 2)$ $\overrightarrow{BC}(-2, 0, 0)$ $\overrightarrow{EC}(-2, 0, -2)$ $\overrightarrow{OB}(2, 3, 0)$
 (b)
 (c) -4
 (d) $(6, -4, 12)$
 (e) $(0, 0, 0)$
 (f) $\theta = 0,5064 \text{ rad} = 29^0 1' 2''$
 (g) $(2, 3, 0)$
 (h) $(-2, 0, 0)$
 (i) $(-2, 0, 2)$
 (j) $(-2, 3, 2)$
 (k) $(0, -1, 0)$
 (l) $(\frac{18}{13}, \frac{-27}{13}, 0)$
 (m) Ces vecteurs forment une base. Dans cette base, \vec{e}_1 a pour composantes $(\frac{1}{5}, \frac{3}{5})$
2. (a) Ces vecteurs sont linéairement indépendants.
 (b)
 (c) -2
 (d) (a, a, b) avec a et b réels non simultanément nuls.
 (e) $(5, -1, 6)$
 (f) $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = -6$ $(\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{w} = (-2, 2, 2)$ $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = (5, 7, -2)$
 (g) $(2, 4, 0)$
 (h) $(\frac{-22}{19}, \frac{16}{19}, \frac{1}{19})$
3. (a) $b_1 = -1$ et b_3 est un réel quelconque
 (b) $b_1 = 4$ $b_3 = 0$
 (c) $b_1 = 4$ et b_3 est un réel quelconque
- 4.
- 5.
- 6.
- 7.
8. Les vecteurs sont linéairement dépendants si $r = -s$.
 Ils forment une base pour $r = s = 1$ dans laquelle \vec{v} a pour composantes $(2, -1, 0)$
9. $(0, 2, -1)$
10. $\vec{v}_1 \bullet \vec{v}_2 = -5$, $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2(-1, 1, 1)$, $(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \bullet (\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2) = 0$, $\cos \theta = -\frac{5\sqrt{7}}{14}$
11. (a) -6 (b) 5
12. $(\frac{-1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{-2}{9})$
13. $\vec{v}(a, 1 - a, 0)$. La représentation géométrique de cet ensemble est la droite d'équations

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$
14. $(2, 2, 2\sqrt{2})$
15. $(\frac{-4}{3}, \frac{-4}{3}, \frac{-4}{3})$
- 16.
17. Faux - Faux - Vecteur - Faux

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1. $\Pi \equiv x - 4y + 2z + 3 = 0$ $d \equiv \frac{x-4}{3} = 7 - y = z - 9$
2. $\Pi \equiv 6x + 9y - 4z - 12 = 0$ $d \equiv \frac{x-1}{6} = \frac{y-2}{9} = \frac{z-3}{-4}$
3. (a) $\Pi \equiv x - y - 3z + 3 = 0$
 (b) $\begin{cases} x = 1 + k \\ y = 2 - k \\ z = 3 - 3k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$
 (c) Π et d ne sont pas parallèles. Le point d'intersection a pour coordonnées $(\frac{7}{5}, \frac{13}{5}, \frac{14}{5})$ et des équations cartésiennes de la droite orthogonale à Π sont $\frac{5x-7}{15} = \frac{5y-13}{5} = \frac{14-5z}{5}$
4. (a) $\begin{cases} x = -k + 4m - 5 \\ y = k \\ z = m \end{cases} \quad (k, m \in \mathbb{R})$
 (b) $x - 1 = y = \frac{2-z}{4}$
 (c) $\begin{cases} x - y = 2 \\ x - 2z = 5 \end{cases}$ par exemple
 (d) $x + y - 4z - 4 = 0$
 (e) $2x + 2y + z - 5 = 0$
5. $\Pi_1 \equiv x - y - 3z + 2 = 0$ $d_2 \equiv \begin{cases} x = 1 + k \\ y = 2 + k \\ z = 3 - 2k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$ par exemple.
6. (a) $(-2, 1, 3)$
 (b) $\Pi \equiv x - z + 2 = 0$
 (c) $\begin{cases} x - z = -4 \\ x - 3y = -7 \end{cases}$
 (d) $\Pi \equiv y + z = 0$
 (e) $30x + y - 23z + 86 = 0$
 (f) $z + 1 = 0$
7. (a) Les plans ne sont pas parallèles. La droite déterminée par leur intersection a pour équations paramétriques $\begin{cases} x = 3 + 3k \\ y = 2 + 2k \\ z = -1 - 5k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$
 (b) Les plans sont parallèles et distincts.
 (c) Les plans ne sont pas parallèles. La droite déterminée par leur intersection a pour équations paramétriques $\begin{cases} x = 7 + k \\ y = 1 + k \\ z = -7 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$
8. (a) La droite intersecte le plan au point de coordonnées $(\frac{5}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6})$
 (b) La droite intersecte le plan au point de coordonnées $(8, \frac{-17}{5}, \frac{14}{5})$
 (c) La droite intersecte le plan au point de coordonnées $(-2, -1, 0)$
9. Les droites n'appartiennent pas à un même plan (droites gauches)
10. $d \subset \Pi$
11. Les points n'appartiennent pas à une même droite
12. $a = \frac{-2}{5}$ et $b = \frac{13}{5}$
- 13.
14. $x - y - z + 1 = 0$
15. Un vecteur directeur commun a pour composantes $(1, 3, 0)$ et $d \equiv \begin{cases} 3x - y + 6 = 0 \\ z = -\frac{2}{3} \end{cases}$
16. $\begin{cases} x - 3y + z + 4 = 0 \\ 6x - 8y - z + 25 = 0 \end{cases}$
17. $d \equiv \begin{cases} 2x - z = -1 \\ y - z = 0 \end{cases} \quad d' \equiv \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$
18. $\frac{\sqrt{6}}{6}$ $4\sqrt{2}$ $\sqrt{\frac{509}{21}}$ $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ 0 2 $\frac{30}{\sqrt{411}}$

19. $P_0(1, 2, 3)$ $P_0(\frac{3}{2}, 1, \frac{5}{2})$ $P_0(\frac{5}{17}, \frac{63}{17}, \frac{-18}{17})$
20. (a) Les droites sont parallèles; la distance entre ces droites vaut 1
 (b) Les droites sont gauches; la distance entre ces droites vaut $\frac{3\sqrt{5}}{5}$
 (c) Les droites sont sécantes; la distance entre ces droites est donc nulle
21. (a) $\frac{\sqrt{214}}{3}$
 (b) $\begin{cases} (4a+c)x - ay - 11a - 3c = 0 \\ cx - az - 3c + 4a = 0 \end{cases}$ avec $(a, c) \neq (0, 0)$
22. $(-8, -1, -2)$ et $(-14, 1, -6)$
23. 1) Les plans sont sécants
 2) $a \equiv \begin{cases} x = 2 - 2k \\ y = -3 + 3k \\ z = -13 + 13k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$
 $b \equiv \begin{cases} x = 1 + 5k \\ y = -5 - 25k \\ z = k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$
 3) Ces droites ne sont pas parallèles
 4) Ces droites sont gauches
 5) $\frac{7}{\sqrt{113298}}$
 6) $2x - 3y - 13z - 89 = 0$
24. 1) (a) : droite d'équations paramétriques $\begin{cases} x = -1 - k \\ y = k \\ z = -2 + k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$
 (b) : droite d'équations paramétriques $\begin{cases} x = \frac{15}{7} + 2k \\ y = \frac{-34}{7} - 5k \\ z = 7k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$
 (c) : plan d'équations paramétriques $\begin{cases} x = k \\ y = 1 + m \\ z = m \end{cases} \quad (k, m \in \mathbb{R})$
 (d) Ensemble vide
 (e) Ensemble vide
 (f) point de coordonnées $(0, 0, 0)$
 2) 0 $\frac{\sqrt{2}}{2}$
 3) $\frac{\pi}{2}$ 0
 4) $\begin{cases} x = 1 \\ y + z = -6 \end{cases}$
 5) $\begin{cases} x - 4z - 17 = 0 \\ y - 3z - 10 = 0 \end{cases}$
 6) $x - y - z + 1 = 0$
25. (a) $\begin{cases} x = k \\ y = m \\ z = -1 - 2k + 2m \end{cases} \quad (k, m \in \mathbb{R})$
 (b) $\begin{cases} x - 2z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$
 (c) $\begin{cases} x = 2k \\ y = -2k \\ z = k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$
 (d) $\frac{2}{3}$
 (e) Les droites sont gauches. La distance entre ces droites vaut $\frac{7}{\sqrt{353}}$
26. $ax + by + cz - a^2 - b^2 - c^2 = 0$
27. $x - y - z = 0$
28. Le point symétrique de A par rapport à Π a pour coordonnées $(\frac{-2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-7}{3})$
 Le point symétrique de A par rapport à la droite d a pour coordonnées $(\frac{-6}{7}, \frac{-5}{7}, \frac{4}{7})$
29. 1) Faux 2) Vrai 3) Vrai 4) Faux 5) Faux 6) Faux 7) Vrai 8) Faux 9) Vrai 10) Vrai
30. a) Le plan a pour équation cartésienne $5x - 4y + z - 2 = 0$.
 b) Le plan a pour équation cartésienne $x - y - 1 = 0$.
 c) Le plan a pour équation cartésienne $2x - y + z + 1 = 0$.

31. a) Il n'y a pas de droite répondant aux conditions imposées.

b) De nombreuses droites répondent à la question; il s'agit des droites ayant des équations du type

$$\frac{x+1}{a} = \frac{y-1}{b} = \frac{z+1}{-(a+b)}$$

où $a, b \in \mathbb{R}$, $(a, b) \neq (0, 0)$ et $b \neq 2a$.

c) Une seule droite répond à la question; elle a pour équations cartésiennes

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 6y - z = -1 \end{cases}$$

d) De nombreuses droites répondent à la question; il s'agit des droites ayant des équations du type

$$\frac{x+1}{a} = \frac{y-1}{b} = \frac{z+1}{-(a+b)}$$

où $a, b \in \mathbb{R}$, $(a, b) \neq (0, 0)$, $2a \neq b$ et $2b \neq a$.

e) De nombreuses droites répondent à la question; il s'agit des droites ayant des équations du type

$$\frac{x-1}{a} = \frac{y-1}{b} = \frac{z+3}{-(a+b)}$$

où $a, b \in \mathbb{R}$, $(a, b) \neq (0, 0)$ et $2b \neq a$.

f) Une seule droite répond à la question; elle a pour équations cartésiennes

$$\begin{cases} -5x + 4y + z + 4 = 0 \\ -3y + 2z - 2 = 0 \end{cases}$$

g) Il n'y a pas de droite répondant aux conditions imposées.

32. a) Il n'y a pas de droite répondant aux conditions imposées.

b) Il n'y a pas de droite répondant aux conditions imposées.

c) De nombreuses droites répondent à la question; il s'agit des droites ayant des équations du type

$$\begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ y = b \end{cases}$$

où $b \in \mathbb{R}$.

d) De nombreuses droites répondent à la question; il s'agit des droites ayant des équations du type

$$\begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ z = c \end{cases}$$

où $c \in \mathbb{R}$.

e) La droite d_1 est l'unique droite qui répond aux conditions imposées.

f) Une seule droite répond aux conditions imposées; elle a pour équations cartésiennes

$$\begin{cases} x - y - \frac{2}{3} = 0 \\ x - z - \frac{2}{3} = 0 \end{cases}$$

g) Une seule droite répond aux conditions imposées; elle a pour équations cartésiennes

$$\begin{cases} x - 2y + z - 1 = 0 \\ 3x + 3y + z + 3 = 0 \end{cases}$$

h) Aucune droite ne répond aux conditions imposées.

Chapitre 2

Trigonométrie sphérique

2.1 Quelques rappels sur les coniques du plan et les quadriques de l'espace

Pour des notes relatives à cette partie, nous renvoyons aux notes du cours *Mathématiques générales A*.

2.2 Trigonométrie sphérique

2.2.1 Définitions de base

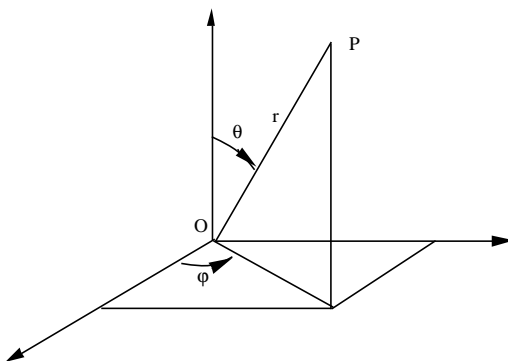
1) Sphère.

L'ensemble des points de l'espace situés à une distance fixe ($r > 0$) d'un point fixe O est appelée *sphère de rayon r et de centre O* . Si on dispose d'un repère orthonormé et si les coordonnées du centre sont (x_0, y_0, z_0) , l'équation cartésienne de cet ensemble est

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2.$$

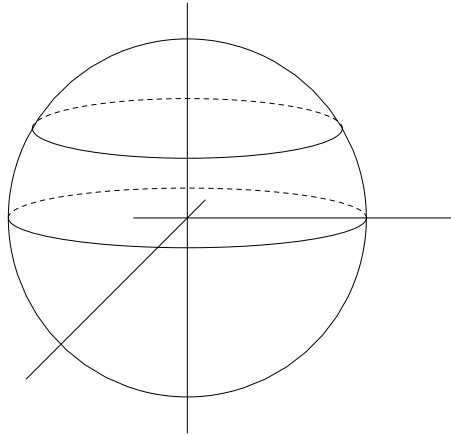
Si on travaille avec les coordonnées polaires dans l'espace au lieu des coordonnées cartésiennes (ceci est à mettre en parallèle avec ce qui se passe dans le plan), on obtient la description suivante de cette sphère

$$\begin{cases} x - x_0 = r \sin \theta \cos \varphi \\ y - y_0 = r \sin \theta \sin \varphi \\ z - z_0 = r \cos \theta \end{cases} \quad \theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi[.$$



2) Intersection d'une sphère et d'un plan-Grand cercle.

L'intersection d'une sphère et d'un plan est l'ensemble vide ou un cercle (éventuellement réduit à un point). Lorsque le plan passe par le centre de la sphère, on parle de *grand cercle*.



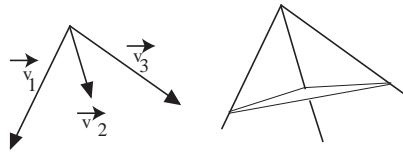
3) Trièdre.

Appelons trièdre de vecteurs la donnée de trois vecteurs linéairement indépendants. Si on les suppose de même origine, disons O , ils permettent de définir une surface, appelée aussi trièdre: il s'agit de l'union des trois "morceaux" de plans déterminés par les vecteurs (appelés faces du trièdre); on appelle O le sommet du trièdre et arêtes du trièdre les demi-droites issues de O et de direction déterminée par les vecteurs donnés.

Plus précisément, si $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ désignent les vecteurs, on forme les "morceaux de plans"

$$\pi = \{P : \vec{OP} = r\vec{v}_1 + s\vec{v}_2, r, s \geq 0\}, \pi' = \{P : \vec{OP} = r\vec{v}_2 + s\vec{v}_3, r, s \geq 0\}, \pi'' = \{P : \vec{OP} = r\vec{v}_1 + s\vec{v}_3, r, s \geq 0\}$$

le trièdre en question est l'union de ces trois ensembles.



3) Triangle sphérique.

On appelle

triangle sphérique

l'intersection d'un trièdre de sommet O et d'une sphère centrée en O .

Notons $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ un trièdre de vecteurs définissant la surface trièdre. Les

côtés du triangle sphérique

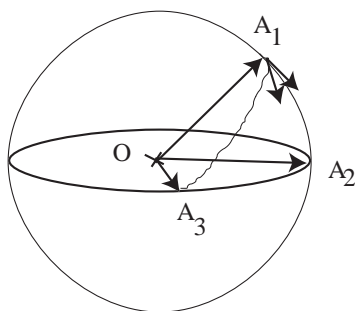
sont les arcs de grands cercles déterminés sur la sphère par les vecteurs \vec{v}_1 et \vec{v}_2 , \vec{v}_1 et \vec{v}_3 , \vec{v}_2 et \vec{v}_3 ; leurs mesures sont respectivement les mesures (en radian) des angles entre les vecteurs.

Notons A_1, A_2, A_3 les points d'intersection de la sphère et des arêtes du trièdre. A chaque point, on associe deux vecteurs tangents aux deux grands cercles passant par le point et on considère chacun de ces vecteurs orienté "vers le second point de l'arc". Les

angles du triangle sphérique

sont les angles entre les vecteurs en question.

Remarquons que chacun des vecteurs associés à A_i de cette manière est orthogonal à la droite OA_i (tout vecteur tangent en une extrémité d'un rayon d'un cercle est orthogonal au vecteur joignant le centre du cercle et le point).



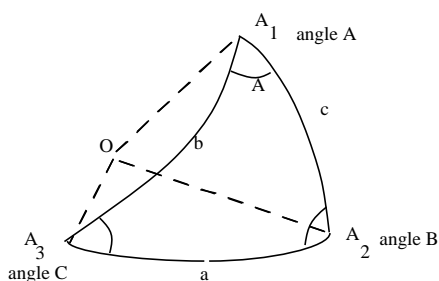
On utilise fréquemment les notations suivantes

$$A, B, C$$

pour la mesure des angles et

$$a, b, c$$

pour la mesure des côtés (respectivement associés aux points A_1, A_2, A_3 dans les définitions qui précèdent).



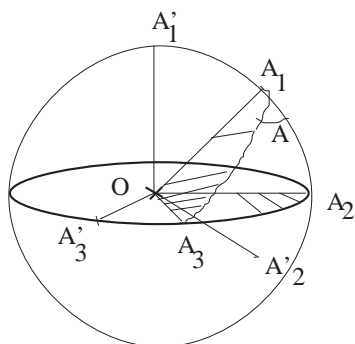
2.2.2 Quelques propriétés et cas particuliers

2.2.3 Triangles polaires

Par le sommet d'un trièdre, on mène une demi-droite orthogonale à chaque face du trièdre, du côté du 3e sommet. Les demi-droites ainsi définies (en fait des vecteurs) définissent un trièdre (appelé trièdre supplémentaire du premier), donc un triangle sphérique associé au premier et appelé

triangle polaire

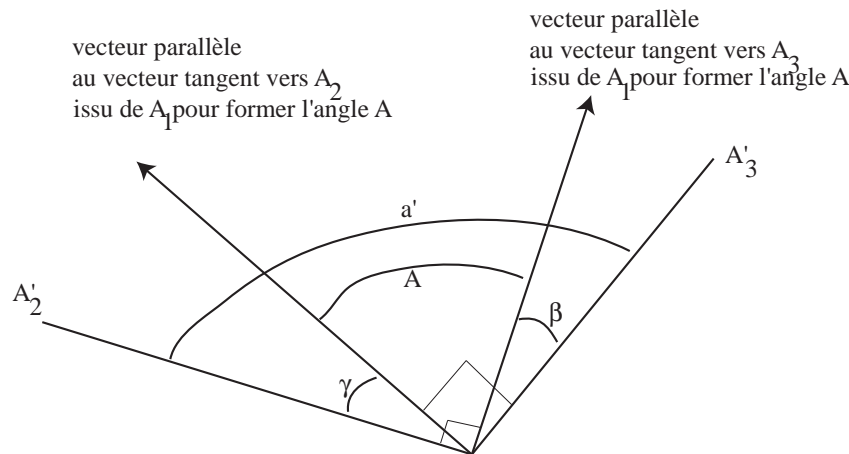
du triangle sphérique de départ.



Si l'on désigne de façon naturelle par A', B', C' les (mesures des) angles du trièdre supplémentaire et a', b', c' les (mesures des) côtés respectifs, on a

$$a' + A = a + A' = b' + B = b + B' = c' + C = c + C' = \pi.$$

De fait, a la situation suivante (pour le dessin représenté ci-dessus)¹



ce qui donne

$$a' + A = (\gamma + A + \beta) + A = (\gamma + A) + (\beta + A) = \pi.$$

De même on obtient

$$b' + B = c' + C = \pi.$$

Une construction analogue dans laquelle le triangle de départ est le triangle polaire² donne

$$a + A' = b + B' = c + C' = \pi.$$

2.2.4 A propos des angles et des côtés

Vu la définition d'un triangle sphérique, la mesure des angles A, B, C et des côtés a, b, c appartiennent à l'intervalle $]0, \pi[$.

On démontre également les propriétés suivantes

- chaque côté est inférieur à la somme des deux autres ($a < b + c$)
- la somme des côtés est inférieure à 2π ($a + b + c < 2\pi$)
- la somme des angles est comprise entre deux angles droits et 6 angles droits ($\pi < A + B + C < 3\pi$)
- la somme de deux angles est inférieure à deux droits plus le troisième ($A + B < C + \pi$).

Citons aussi quelques cas particuliers de triangles sphériques; on les qualifie comme suit.

Un triangle sphérique est

- isocèle lorsqu'il possède deux côtés égaux (on démontre alors que les angles opposés aux côtés égaux sont égaux et réciproquement)
- équilatéral s'il possède trois côtés égaux (on démontre alors que ses trois angles sont égaux et réciproquement)
- rectangle s'il possède un angle égal à $\frac{\pi}{2}$
- birectangle s'il possède deux angles égaux à $\frac{\pi}{2}$
- trirectangle s'il possède trois angles égaux à $\frac{\pi}{2}$.

¹Le plan de la feuille est orthogonal à la droite OA_1 et contient O . C'est aussi le plan formé par O, A'_2, A'_3 .

²et en notant que le triangle polaire d'un triangle polaire est le triangle de départ

2.3 Formules fondamentales de trigonométrie sphérique

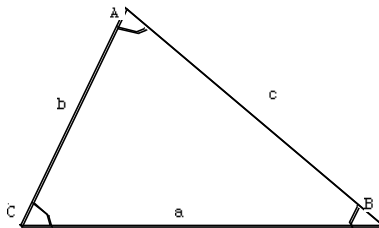
2.3.1 Cas d'un triangle plan

Dans le cas habituel du triangle situé dans un plan, rappelons que l'on a les formules suivantes:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

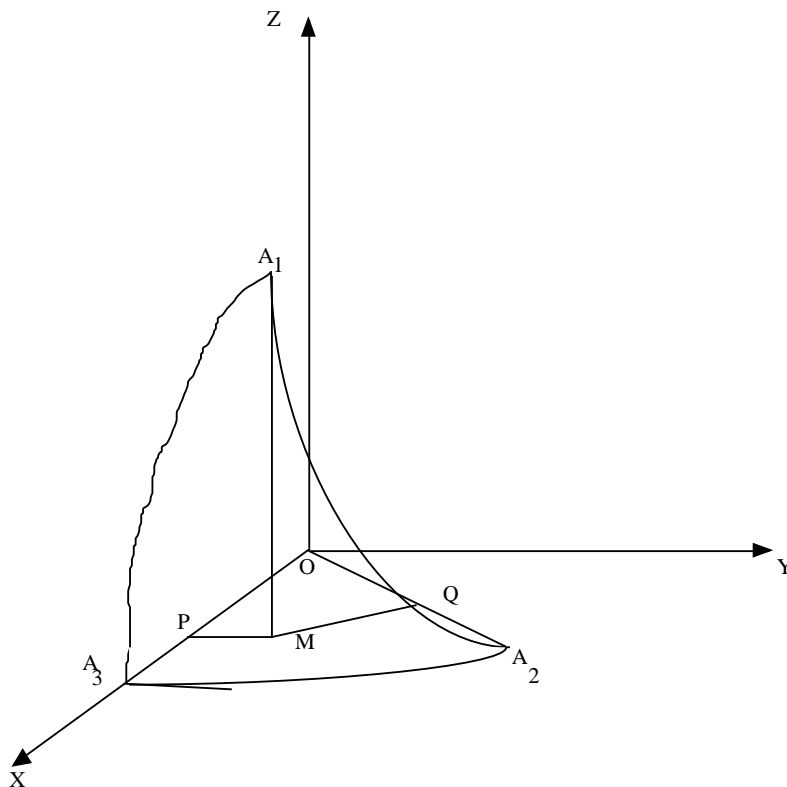
et analogue avec les autres côtés,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$



2.3.2 Cas d'un triangle sphérique

Etablissons les formules associées au cas d'un triangle sphérique. Il s'agit de relations liant la mesure des angles A, B, C et des côtés a, b, c . Considérons le triangle sphérique suivant et un repère adéquat dont l'origine est le centre de la sphère (les autres représentations de triangles conduisent aux mêmes formules finales). Le rayon de la sphère est R .



L'axe OX joint le centre de la sphère et A_3 , le plan des axes OX, OY est le plan formé par les trois points O, A_3, A_2 (c'est l'un des plans du trièdre), l'axe OZ est orthogonal à ce plan.

On note M la projection orthogonale de A_1 sur le plan des axes OX, OY et P la projection orthogonale de A_1 sur la droite OX (P est aussi la projection orthogonale de M sur OX). On note

encore Q la projection orthogonale de A_1 sur la droite OA_2 (Q est aussi la projection orthogonale de M sur OA_2).

On a

$$\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MA_1} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QM} + \overrightarrow{MA_1}.$$

Exprimons les composantes des différents vecteurs intervenant dans les deux derniers membres dans la base choisie (on désigne les vecteurs de cette base par \vec{e}_i , $i = 1, 2, 3$). Le vecteur $\overrightarrow{MA_1}$ sera exprimé de deux manières différentes. On a

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= R \cos b \vec{e}_1 \\ \overrightarrow{PM} &= \|\overrightarrow{PA_1}\| \cos C \vec{e}_2 = R \sin b \cos C \vec{e}_2 \\ \overrightarrow{MA_1} &= \|\overrightarrow{PA_1}\| \sin C \vec{e}_3 = R \sin b \sin C \vec{e}_3\end{aligned}$$

Passons aux vecteurs du dernier membre. Notons que

$$\|\overrightarrow{OQ}\| = R \cos c, \quad \|\overrightarrow{QM}\| = \|\overrightarrow{A_1Q}\| \cos B = R \sin c \cos B.$$

Remarquons aussi que si on désigne par S l'intersection de OY avec la droite MQ , l'angle entre les vecteurs \overrightarrow{SO} et \overrightarrow{SQ} est a (comme angles à côtés perpendiculaires; plus correctement, ces deux vecteurs sont ramenés par une rotation sur des vecteurs dont l'angle est a). On a

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= \|\overrightarrow{OQ}\| \cos a \vec{e}_1 + \|\overrightarrow{OQ}\| \sin a \vec{e}_2 \\ &= R \cos c \cos a \vec{e}_1 + R \cos c \sin a \vec{e}_2 \\ \overrightarrow{QM} &= \|\overrightarrow{QM}\| \sin a \vec{e}_1 - \|\overrightarrow{QM}\| \cos a \vec{e}_2 \\ &= R \sin c \cos B \sin a \vec{e}_1 - R \sin c \cos B \cos a \vec{e}_2 \\ \overrightarrow{MA_1} &= \|\overrightarrow{QA_1}\| \sin B \vec{e}_3 \\ &= R \sin c \sin B \vec{e}_3\end{aligned}$$

En égalant les deux expressions de la première composante, on trouve la formule fondamentale

$$\cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B.$$

En prenant un autre repère pour effectuer les calculs, on obtiendrait les formules analogues pour $\cos a$ et $\cos b$ ³. Finalement, on appelle

relations ou formules fondamentales

les relations

$\cos a$	$=$	$\cos c \cos b + \sin c \sin b \cos A$
$\cos b$	$=$	$\cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B$
$\cos c$	$=$	$\cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$

L'égalité entre les deux expressions des dernières composantes donne

$$\sin b \sin C = \sin c \sin B$$

donc

la formule des sinus (car analogue avec a, A)

$\frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C} = \frac{\sin a}{\sin A}$

³une seule formule suffit en fait car elle est indépendante de la façon dont on a désigné les angles et les côtés, en conservant toutefois l'analogie de face à face pour a, A etc)

Ces relations peuvent aussi se déduire des formules fondamentales (voir exercices).

En égalant les deux expressions de la deuxième composante, on trouve la

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{formule des cinq éléments} \\ \sin b \cos C = \sin a \cos c - \sin c \cos a \cos B. \end{array}}$$

Ces relations peuvent aussi se déduire des formules fondamentales (voir exercices).

En divisant par $\sin c$ et en utilisant la relation des sinus, on obtient

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{la relation des cotangentes} \\ \sin B \cotg C = \sin a \cotg c - \cos a \cos B. \end{array}}$$

Les relations dites “des cinq éléments et des cotangentes” sont aussi valables pour un autre réarrangement adéquat des angles et côtés. On a finalement les relations

$$\begin{array}{l} \sin b \cos C = \sin a \cos c - \sin c \cos a \cos B \\ \sin a \cos B = \sin c \cos b - \sin b \cos c \cos A \\ \sin c \cos A = \sin b \cos a - \sin a \cos b \cos C \\ \dots \quad \dots \quad \dots \end{array}$$

et

$$\begin{array}{l} \sin B \cotg C = \sin a \cotg c - \cos a \cos B \\ \sin A \cotg B = \sin c \cotg b - \cos c \cos A \\ \sin C \cotg A = \sin b \cotg a - \cos b \cos C \\ \dots \quad \dots \quad \dots \end{array}$$

On établit aussi la *forme polaire des formules fondamentales*

$$\begin{array}{l} \cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a \\ \cos B = -\cos A \cos C + \sin A \sin C \cos b \\ \cos C = -\cos B \cos A + \sin B \sin A \cos c \end{array}$$

Applications: repérage d'étoiles (sphère céleste), repérage et mesures sur le globe terrestre (navigation,...)

2.4 Aire d'un fuseau, d'une zone, d'un triangle sphérique

Soit une surface de l'espace paramétrée de façon bijective (presque partout) par les fonctions réelles

$$f_1(u, v), f_2(u, v), f_3(u, v), \quad (u, v) \in K.$$

On suppose que ce paramétrage est suffisamment régulier pour que les opérations suivantes aient un sens.

L'aire de la surface

$$\mathcal{S} = \{\vec{f}(u, v) = (f_1(u, v), f_2(u, v), f_3(u, v)) : (u, v) \in K\}$$

est, par définition, le nombre

$$\mathcal{A}_S = \int \int_K \|D_u \vec{f} \wedge D_v \vec{f}\| \, dudv.$$

Cette définition est naturelle en vertu de l'interprétation géométrique (voir annexe).

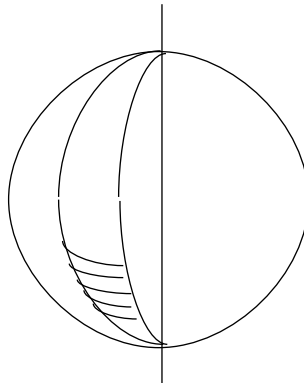
Dans le cas d'une surface située sur une sphère, supposée centrée à l'origine et de rayon $r > 0$, on peut prendre

$$f_1(\varphi, \theta) = r \cos \varphi \sin \theta, \quad f_2(\varphi, \theta) = r \sin \varphi \sin \theta, \quad f_3(\varphi, \theta) = r \cos \theta$$

où $(\varphi, \theta) \in K \subset [0, 2\pi] \times [0, \pi]$. Ce paramétrage conduit à

$$\|D_\varphi \vec{f} \wedge D_\theta \vec{f}\| = r^2 \sin \theta.$$

2.4.1 Aire d'un fuseau



Soit le fuseau

$$\mathcal{F} = \{\vec{f}(\varphi, \theta) : \theta \in [0, \pi], \varphi \in [\varphi_0, \varphi_1]\}.$$

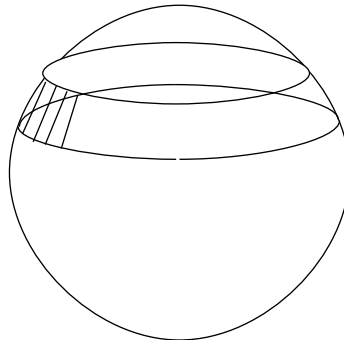
Son aire est

$$\mathcal{A}_\mathcal{F} = r^2(\varphi_1 - \varphi_0) \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta = 2r^2(\varphi_1 - \varphi_0).$$

En particulier, l'aire de la sphère est

$$4\pi r^2.$$

2.4.2 Aire d'une zone



Soit la zone

$$\mathcal{Z} = \{\vec{f}(\varphi, \theta) : \theta \in [\theta_0, \theta_1], \varphi \in [0, 2\pi]\}.$$

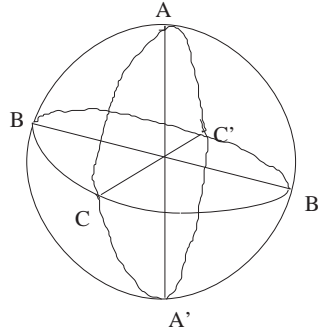
Son aire est

$$\mathcal{A}_\mathcal{Z} = r^2 2\pi \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sin \theta \, d\theta = 2\pi r^2 (\cos \theta_0 - \cos \theta_1).$$

2.4.3 Aire d'un triangle sphérique

L'aire du triangle sphérique T d'angles A, B, C situé sur une sphère de rayon r est

$$\mathcal{A}_T = r^2(A + B + C - \pi).$$



En considérant les grands cercles déterminés par le triangle sphérique ABC et en considérant les points A', B', C' diamétralement opposés respectivement à A, B, C , on met en évidence différents triangles sphériques qui donnent lieu aux égalités suivantes

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{ABC} + \mathcal{A}_{A'BC} &= \mathcal{A}_{\text{fuseau}A} \\ \mathcal{A}_{ABC} + \mathcal{A}_{AB'C} &= \mathcal{A}_{\text{fuseau}B} \\ \mathcal{A}_{ABC} + \mathcal{A}_{ABC'} &= \mathcal{A}_{\text{fuseau}C}.\end{aligned}$$

En additionnant membre à membre, on obtient

$$2\mathcal{A}_{ABC} + (\mathcal{A}_{A'BC} + \mathcal{A}_{AB'C} + \mathcal{A}_{ABC'}) = 2r^2(A + B + C).$$

Comme

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{ABC'} &= \mathcal{A}_{A'B'C} \\ \mathcal{A}_{ABC} + \mathcal{A}_{A'BC} + \mathcal{A}_{AB'C} + \mathcal{A}_{A'B'C} &= \text{aire d'une demi-sphère} = 2\pi r^2\end{aligned}$$

on obtient finalement

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} (2r^2(A + B + C) - 2\pi r^2) = r^2(A + B + C - \pi).$$

2.5 Exercices

Dans tout ce qui suit, on utilise les notations⁴ installées précédemment (pour les angles et les côtés).

1. Etablir la formule des sinus et la formule des cotangentes à partir de la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique.
2. A partir des triangles polaires, établir que l'on a

$$\begin{aligned}\cos A &= -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a \\ \cos B &= -\cos A \cos C + \sin A \sin C \cos b \\ \cos C &= -\cos B \cos A + \sin B \sin A \cos c\end{aligned}$$

⁴Les angles sont donnés par leur mesure en degrés ou en radians; parfois des conversions sont nécessaires pour rendre les données compatibles. Bien sûr, écrire $\cos x$ avec x exprimé en degrés signifie cosinus du réel x' où x' est l'expression en radian de l'angle de mesure x degrés

3. Démontrer que, dans un triangle sphérique, on a

$$\cos a = \cos(b+c) \sin^2\left(\frac{A}{2}\right) + \cos(b-c) \cos^2\left(\frac{A}{2}\right)$$

4. Démontrer que, dans un triangle sphérique, on a

$$\cos^2\left(\frac{a}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{b+c}{2}\right) \sin^2\left(\frac{A}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{b-c}{2}\right) \cos^2\left(\frac{A}{2}\right)$$

5. Démontrer que, dans un triangle sphérique, on a

$$\cos A = -\cos(B+C) \cos^2\left(\frac{a}{2}\right) - \cos(B-C) \sin^2\left(\frac{a}{2}\right)$$

6. Démontrer que, dans un triangle sphérique, on a

$$\sin A \cos c - \cotg B \cos A = \frac{\sin c}{\sin b} \cotg C$$

7. Démontrer que, dans un triangle sphérique, on a

$$\sin a \sin(B-C) + \sin b \sin(C-A) + \sin c \sin(A-B) = 0$$

8. Dans un triangle sphérique, si $a+b+c = \pi$, démontrer que l'on a

$$\begin{aligned} \sin^2\left(\frac{A}{2}\right) &= \cotg b \cotg c, & \cos^2\left(\frac{A}{2}\right) &= \frac{\cos a}{\sin b \sin c} \\ \sin^2\left(\frac{A}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{B}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{C}{2}\right) &= 1, & \tg\left(\frac{B}{2}\right) \tg\left(\frac{C}{2}\right) &= \cos a \end{aligned}$$

9. Dans un triangle sphérique, si $A+B+C = 2\pi$ démontrer que

$$\cos a + \cos b + \cos c = -1$$

10. Dans un triangle sphérique, on donne

$$a = 50^\circ 48' 20'', \quad b = 116^\circ 44' 20'', \quad c = 129^\circ 11' 40''$$

On demande de calculer A, B, C (en degrés, minutes, secondes).

(Solution: $A = 59^\circ 51' 04'', B = 94^\circ 49' 43'', C = 120^\circ 08' 56''$)

11. Dans un triangle sphérique, on donne

$$a = 76^\circ 35' 36'', \quad b = 50^\circ 10' 30'', \quad C = 34^\circ 15' 03''$$

On demande de calculer A, B, c (en degrés, minutes, secondes).

(Solution: $c = 40^\circ 00' 10'', A = 121^\circ 36' 18'', B = 42^\circ 15' 14''$)

12. Calculer la distance entre les deux points P_1, P_2 situés à la surface de la Terre et donnés de la manière suivante:

P_1 de longitude est $L_1 = 37^\circ 34' 18''$ et de latitude nord $l_1 = 55^\circ 45' 19''$,

P_2 de longitude est $L_2 = 116^\circ 28' 54''$ et de latitude nord $l_2 = 39^\circ 54' 18''$

(Remarque: la longueur d'un grand cercle est 40000 kms)

(Solution: 5797 kms)

13. Calculer la distance qui sépare
- Rio de Janeiro ($23^{\circ}27'S, 43^{\circ}10'O$) et le cap de Bonne-Espérance ($34^{\circ}32'S, 18^{\circ}30'E$)
 - l'observatoire d'Uccle ($50^{\circ}47'56''N, 4^{\circ}21'45''E$) et celui de Zurich ($47^{\circ}22'40''N, 8^{\circ}33'E$)
- (Solution: RJ-CBE: 6027,43kms; U-Z: 487,03kms)
14. Un navire veut se rendre d'un point M_1 ($74^{\circ}03'$ de longitude ouest et $33^{\circ}02'$ de latitude sud) à un point M_2 ($170^{\circ}45'$ de longitude est et $43^{\circ}51'$ de latitude sud) par le plus court chemin. On demande
- la distance entre ces deux points
 - l'angle de route initial (angle indiqué sur la boussole par la direction du navire au départ)
 - de montrer que la latitude maximum que le navire atteint est $56^{\circ}33'42''$ sud.
- (Solution: 9232,7kms et $138^{\circ}54'23''$)

2.6 Annexe

On reprend les notations introduites précédemment (cf Section 2.4). Interprétons géométriquement ce que l'on entend de façon intuitive comme l'aire d'une surface et montrons pourquoi la définition

$$\mathcal{A}_S = \int \int_K \|D_u \vec{f} \wedge D_v \vec{f}\| \, dudv.$$

est naturelle.

Afin de ne pas alourdir cette présentation nous considérons que la surface est paramétrée par

$$f_1(u, v), f_2(u, v), f_3(u, v)$$

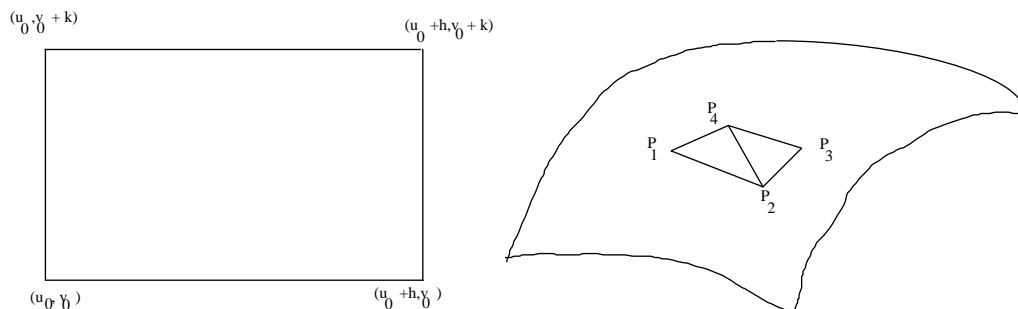
avec $(u, v) \in A = [a, b] \times [c, d]$. En fait, on a l'idée d'approcher l'aire de la surface à partir de petites surfaces obtenues de façon naturelle après avoir partitionné le domaine A . Pour cela, on s'inspire de ce qui se passe pour calculer la longueur d'une courbe. Cependant, ici, la partition du domaine se fait non plus en intervalles, mais en rectangles. Les extrémités des intervalles permettaient de déterminer des segments, qui allaient approcher la courbe; ici, les extrémités de chacun des petits rectangles vont définir quatre points, en général pas dans un même plan, qui vont permettre de définir deux triangles qui vont, au même titre que les segments, finalement approcher la surface. L'aire de la surface sera ainsi approchée par une somme de surfaces de triangles.

On partitionne le rectangle A en sous-rectangles et, à chacun d'eux, on associe les deux triangles définis comme suit à partir de la surface:

triangles T_1, T_2 de sommets respectivement P_1, P_2, P_4 et P_2, P_3, P_4

où

- P_1 a pour coordonnées cartésiennes $\vec{f}(u_0, v_0)$
- P_2 a pour coordonnées cartésiennes $\vec{f}(u_0 + h, v_0)$
- P_3 a pour coordonnées cartésiennes $\vec{f}(u_0 + h, v_0 + k)$
- P_4 a pour coordonnées cartésiennes $\vec{f}(u_0, v_0 + k)$



L'aire du triangle T_1 est égale à

$$\frac{1}{2} \left\| \overrightarrow{P_1 P_2} \wedge \overrightarrow{P_1 P_4} \right\|.$$

Par le théorème des accroissements finis, la première composante de $\overrightarrow{P_1 P_2}$ est égale à

$$f_1(u_0 + h, v_0) - f_1(u_0, v_0) = h D_u f_1(u_0 + h_1, v_0)$$

où h_1 est un réel de $]0, h[$. En procédant de même avec les autres composantes, on obtient que les composantes du vecteur $\overrightarrow{P_1 P_2}$ peuvent s'écrire

$$h \begin{pmatrix} D_u f_1(u_0 + h_1, v_0) \\ D_u f_2(u_0 + h_2, v_0) \\ D_u f_3(u_0 + h_3, v_0) \end{pmatrix}$$

où h_1, h_2, h_3 sont compris entre 0 et h .

De même, les composantes du vecteur $\overrightarrow{P_1 P_4}$ peuvent s'écrire

$$k \begin{pmatrix} D_v f_1(u_0, v_0 + k_1) \\ D_v f_2(u_0, v_0 + k_2) \\ D_v f_3(u_0, v_0 + k_3) \end{pmatrix}$$

où k_1, k_2, k_3 appartiennent à $]0, k[$.

Lorsque h, k sont petits, l'aire de ce triangle est donc proche de

$$\frac{hk}{2} \left\| D_u \vec{f}(u_0 + h', v_0 + k') \wedge D_v \vec{f}(u_0 + h', v_0 + k') \right\|$$

où h' est compris entre 0 et h et où k' est compris entre 0 et k .

Par un raisonnement analogue, on obtient que l'aire du triangle T_2 est aussi proche de

$$\frac{hk}{2} \left\| D_u \vec{f}(u_0 + h', v_0 + k') \wedge D_v \vec{f}(u_0 + h', v_0 + k') \right\|$$

où h' est compris entre 0 et h et où k' est compris entre 0 et k .

Il s'ensuit que si on partitionne le domaine de départ en n sous-rectangles (d'où des h_j, k_j), on obtient que la somme des aires des $2n$ triangles est (approximativement) égale à

$$S_n = \sum_{j=1}^n h_j k_j \left\| D_u \vec{f}(u_0 + h'_j, v_0 + k'_j) \wedge D_v \vec{f}(u_0 + k'_j, v_0 + k'_j) \right\|$$

ce qui est une "somme de Riemann" définissant l'intégrale

$$\int \int_K \| D_u \vec{f} \wedge D_v \vec{f} \| \, dudv.$$

Chapitre 3

Quelques exemples d'approximations numériques

3.1 Rappels et compléments sur les suites de réels

Nous n'envisagerons ici que des suites de nombres réels. La plupart des résultats se démontrent également dans le cas des suites de complexes et, plus généralement des suites d'éléments de \mathbb{R}^n (sauf, bien sûr, ceux qui font appel à la relation d'ordre sur \mathbb{R} !).

Pour les définitions standards relatives aux notions de suites, de convergence vers une limite finie ou vers l'infini, ainsi que plusieurs exemples, nous renvoyons au cours *Mathématiques générales A*.

Toutefois, rappelons ici la définition d'une suite convergente de réels. Cette notion est celle de convergence vers *une limite finie*. Il existe aussi la notion de convergence vers l'infini; pour les définitions relatives à celle-ci, nous renvoyons au cours A.

Définition 3.1.1 *On dit que la suite x_m ($m \in \mathbb{N}_0$) est convergente (ou simplement converge) s'il existe un réel r tel que,*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{N}_0 : |x_m - r| \leq \varepsilon, \forall m \geq M.$$

Autrement dit, la suite x_m ($m \in \mathbb{N}_0$) est convergente (ou simplement converge) s'il existe un réel r tel que, quel que soit $\varepsilon > 0$, on puisse trouver un naturel à partir duquel les éléments de la suite soient situés dans l'intervalle fermé d'extrémités $r - \varepsilon$ et $r + \varepsilon$.

On démontre facilement qu'un tel nombre r est unique et on dit alors que la suite converge vers r ou encore que r est la limite de la suite. On écrit

$$r = \lim_{m \rightarrow +\infty} x_m \quad \text{ou encore} \quad x_m \rightarrow r \quad \text{si} \quad m \rightarrow +\infty.$$

Nous allons énoncer et démontrer deux propriétés (déjà annoncées dans le cours A) et qui sont d'une extrême utilité pour étudier la convergence de suite; en particulier, elles sont très utiles dans le cadre de ce chapitre.

Théorème 3.1.2 (Convergence des suites bornées monotones) *Si une suite de nombres réels est croissante (resp. décroissante) et si l'ensemble de ses éléments est majoré (resp. minoré), alors elle converge. Sa limite est la borne supérieure (resp. inférieure) de l'ensemble de ses éléments.*

Preuve. Soit x_m ($m \in \mathbb{N}_0$) une suite croissante de réels telle que l'ensemble $E = \{x_m : m \in \mathbb{N}_0\}$ soit majoré. Notons S la borne supérieure de cet ensemble. Démontrons que la suite donnée converge vers le réel S .

Soit un réel strictement positif quelconque ε . Par définition des bornes supérieures, $S - \varepsilon$ n'est pas un majorant de E . Il existe donc un élément de cet ensemble qui est plus grand ou égal à $S - \varepsilon$; autrement dit

$$\exists M \in \mathbb{N}_0 : S - \varepsilon \leq x_M.$$

Comme la suite est croissante, on obtient directement $S - \varepsilon \leq x_m$ quel que soit l'indice m pour autant qu'il soit supérieur ou égal M . Puisque S est un majorant de E , on obtient ainsi

$$S - \varepsilon \leq x_m \leq S \leq S + \varepsilon, \quad \forall m \geq M$$

c'est-à-dire

$$|x_m - S| \leq \varepsilon, \quad \forall m \geq M.$$

On procède de manière tout à fait analogue dans le cas décroissant. \square

Définition 3.1.3 *On dit que la suite x_m ($m \in \mathbb{N}_0$) est de Cauchy si, quel que soit $\varepsilon > 0$, on peut trouver $M \in \mathbb{N}_0$ tel que*

$$|x_p - x_q| \leq \varepsilon, \quad \forall p, q \geq M.$$

En langage imagé, cela signifie que la distance entre deux éléments de la suite est aussi petite que l'on veut pour autant que les indices de ces éléments soient suffisamment grands.

On démontre très aisément et rapidement qu'une suite qui converge est de Cauchy. Par contre, la réciproque est moins immédiate. C'est bien sûr ce résultat réciproque qui est très utile! De fait, il n'exige pas de connaître à priori le nombre r vers lequel on souhaiterait que la suite converge!

La preuve de cette réciproque fait intervenir la notion de sous-suite d'une suite donnée. Nous en rappelons la définition ci-dessous.

Si x_m ($m \in \mathbb{N}_0$) est une suite donnée, une sous-suite de celle-ci est simplement une suite constituée d'une "partie" de ses éléments, en prenant soin de ne considérer que les éléments dont les indices forment une suite de naturels strictement croissante.

Définition 3.1.4 *Une sous-suite de x_m ($m \in \mathbb{N}_0$) est une suite $x_{k(m)}$ ($m \in \mathbb{N}_0$) où, pour tout naturel m , $k(m)$ est aussi un naturel¹ et où on a $k(m) < k(m+1)$ pour tout m .*

Ainsi par exemple, la suite des naturels impairs est une sous-suite de la suite des naturels: si $x_m = m$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$ alors la suite des naturels impairs, à savoir la suite $2m - 1$ ($m \in \mathbb{N}_0$), peut aussi être notée $x_{k(m)}$ ($m \in \mathbb{N}_0$), avec $k(m) = 2m - 1$ pour tout m .

Propriété 3.1.5 *Une suite de Cauchy qui admet une sous-suite convergente converge vers la même limite que la sous-suite.*

Preuve. Soit x_m ($m \in \mathbb{N}_0$) une suite de Cauchy et $x_{k(m)}$ ($m \in \mathbb{N}_0$) une sous-suite de celle-ci, que l'on suppose convergente vers le réel r . Démontrons que la suite x_m ($m \in \mathbb{N}_0$) converge aussi vers r .

Soit $\varepsilon > 0$. Vu la convergence de $x_{k(m)}$ ($m \in \mathbb{N}_0$) et vu le fait que la suite x_m ($m \in \mathbb{N}_0$) est de Cauchy, il existe un entier M tel que

$$|x_{k(m)} - r| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad |x_p - x_q| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall m \geq M.$$

Comme la suite $x_{k(m)}$ ($m \in \mathbb{N}_0$) est en fait une sous-suite de la suite x_m ($m \in \mathbb{N}_0$), on a $k(m) \geq m$ quel que soit m donc, pour tout $m \geq M$, on a

$$\begin{aligned} |x_m - r| &= |x_m - x_{k(m)} + x_{k(m)} - r| = \left| \left(x_m - x_{k(m)} \right) + \left(x_{k(m)} - r \right) \right| \\ &\leq |x_m - x_{k(m)}| + |x_{k(m)} - r| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

¹mais pas nécessairement m lui-même!

et on peut donc conclure à la convergence de la suite x_m ($m \in \mathbb{N}_0$) vers r . \square

Théorème 3.1.6 (Critère de Cauchy) *Une suite de Cauchy est convergente.*

Preuve. Soit x_m ($m \in \mathbb{N}_0$) une suite de Cauchy. Pour démontrer qu'elle converge, il suffit d'en extraire une sous-suite convergente (en vertu du résultat précédent).

Construisons une telle sous-suite.

Soit² $k(1)$ un naturel strictement positif tel que

$$|x_p - x_q| \leq \frac{1}{2}, \quad \forall p, q \geq k(1).$$

Soit³ ensuite $k(2)$ un naturel strictement plus grand que $k(1)$ tel que

$$|x_p - x_q| \leq \frac{1}{2^2}, \quad \forall p, q \geq k(2).$$

Par récurrence, on construit ainsi une suite $k(m)$ ($m \in \mathbb{N}_0$) de naturels telle que

$$k(m) < k(m+1), \quad \forall m \in \mathbb{N}_0 \quad \text{et} \quad |x_p - x_q| \leq \frac{1}{2^m} \quad \forall p, q \geq k(m), \forall m \in \mathbb{N}_0.$$

Montrons maintenant que cette sous-suite $x_{k(m)}$ ($m \in \mathbb{N}_0$) de la suite x_m ($m \in \mathbb{N}_0$) converge.

Tout naturel r s'écrit

$$r = r_+ - r_- \quad \text{avec} \quad r_+ = \sup\{r, 0\}, \quad r_- = \sup\{-r, 0\}.$$

On voit directement que le nombre r_+ (resp. r_-) est le nombre qui est égal à r (resp. $-r$) si r est positif (resp. négatif) et est égal à 0 sinon. Le réel r_+ est appelé "partie positive de r " et le réel r_- est appelé "partie négative de r "; ce sont tous les deux des réels positifs, quel que soit le signe de r . Cela étant, pour tout m , on a

$$x_{k(m)} = (x_{k(m)} - x_{k(m-1)}) + \dots + (x_{k(2)} - x_{k(1)}) + x_{k(1)}$$

donc

$$x_{k(m)} = S_{m,+} - S_{m,-}$$

avec

$$\begin{aligned} S_{m,+} &= (x_{k(m)} - x_{k(m-1)})_+ + \dots + (x_{k(2)} - x_{k(1)})_+ + (x_{k(1)})_+ \\ S_{m,-} &= (x_{k(m)} - x_{k(m-1)})_- + \dots + (x_{k(2)} - x_{k(1)})_- + (x_{k(1)})_- \end{aligned}$$

Pour prouver que la suite $x_{k(m)}$ ($m \in \mathbb{N}_0$) converge, il suffit donc de prouver que les suites

$$S_{m,+} \quad (m \in \mathbb{N}_0) \quad \text{et} \quad S_{m,-} \quad (m \in \mathbb{N}_0)$$

convergent. C'est effectivement le cas car, comme nous allons l'établir ci-dessous, ces suites sont croissantes et l'ensemble de leurs éléments est majoré

Étudions le cas de la suite $S_{m,+}$ ($m \in \mathbb{N}_0$); celui de $S_{m,-}$ ($m \in \mathbb{N}_0$) est tout à fait analogue.

La suite $S_{m,+}$ ($m \in \mathbb{N}_0$) est croissante car, pour tout m , on a

$$\begin{aligned} S_{m+1,+} &= (x_{k(m+1)} - x_{k(m)})_+ + (x_{k(m)} - x_{k(m-1)})_+ + \dots + (x_{k(2)} - x_{k(1)})_+ + (x_{k(1)})_+ \\ &= (x_{k(m+1)} - x_{k(m)})_+ + S_{m,+} \end{aligned}$$

²Ce nombre existe car la suite est de Cauchy!

³Ce nombre existe aussi car la suite est de Cauchy!

avec $(x_{k(m+1)} - x_{k(m)})_+ \geq 0$. De plus, par construction, pour tout $m \geq 2$, on a

$$\begin{aligned} S_{m,+} &= (x_{k(m)} - x_{k(m-1)})_+ + \dots + (x_{k(2)} - x_{k(1)})_+ + (x_{k(1)})_+ \\ &\leq |x_{k(m)} - x_{k(m-1)}| + \dots + |x_{k(2)} - x_{k(1)}| + |x_{k(1)}| \\ &\leq \frac{1}{2^{m-1}} + \dots + \frac{1}{2} + |x_{k(1)}| \\ &= |x_{k(1)}| + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{2^k} \\ &\leq |x_{k(1)}| + 1. \end{aligned}$$

□

3.2 Calcul de zéros de fonctions

3.2.1 Introduction

En général, les solutions d'équations du type $f(x) = 0$ ne peuvent pas être trouvées explicitement. Même si f est un polynôme, des formules explicites par radicaux⁴ donnant les solutions n'existent que pour une degré inférieur ou égal à 4.

Pour "résoudre" de telles équations, on utilise des méthodes approchées, souvent itératives: en partant d'une condition initiale, on construit une suite d'approximations, que l'on espère de plus en plus proches (en un sens qu'il convient de préciser!) de la solution cherchée.

Dans le cadre de ce cours, nous considérerons (presque) exclusivement quelques méthodes de **construction** de suites d'approximations. Pour une étude numérique complète, on devrait aussi étudier le choix des **conditions initiales**, les **conditions de convergence**, la **vitesse de convergence**, les **critères d'arrêt** et l'"effort de calcul".

Faisons aussi le rappel fondamental suivant qui concerne la localisation des zéros d'une fonction continue d'une variable réelle et à valeurs réelles. Ce résultat est un cas particulier du **théorème des valeurs intermédiaires**.

Propriété 3.2.1 *Si a, b sont réels, si f est continu sur $[a, b]$ et si $f(a)f(b) < 0$ alors il existe un réel $x_0 \in]a, b[$ tel que $f(x_0) = 0$.*

Même si nous ne nous éterniserons pas sur l'étude théorique des erreurs commises, nous ne voudrions pas terminer cette brève introduction sans donner des définitions précises rencontrées et utilisées de façon classique dans les méthodes d'approximations numériques.

Soit une suite de réels x_k ($k \in \mathbb{N}$) qui converge vers le réel r . Pour tout m , on appelle *erreur exacte* commise à l'étape m dans l'approximation de r par la suite x_k ($k \in \mathbb{N}$) est

$$\Delta_m = |x_m - r|.$$

Cela étant, on dit que la convergence de la suite est (asymptotiquement)

- d'ordre 1 (ou linéaire) et de taux $\delta \in]0, 1[$ s'il existe M tel que

$$\Delta_{m+1} \leq \delta \Delta_m \quad \forall m \geq M,$$

- d'ordre $\rho > 1$ et de taux $\delta > 0$ s'il existe M tel que

$$\Delta_{m+1} \leq \delta \Delta_m^\rho \quad \forall m \geq M.$$

Lorsque $\rho = 2$, on parle de convergence quadratique.

⁴Théorie de Galois, quelques informations: <http://www.bib.ulb.ac.be/coursmath/bio/galois.htm>

3.2.2 Méthode de la bisection

Supposons que f soit défini et continu sur l'intervalle borné fermé $[a, b]$ et que cette fonction prenne des valeurs de signes opposés en a et b . On sait donc qu'il existe au moins un zéro de f dans $]a, b[$.

Décrivons brièvement la méthode de la bisection qui consiste à construire une suite de points de $]a, b[$ qui converge vers un zéro de f dans $]a, b[$. L'intérêt de cette méthode réside dans le fait qu'elle est toujours convergente; cependant, la convergence est en général très lente (à un sens que nous précisons quelque peu, notamment dans une comparaison avec d'autres méthodes).

CONSTRUCTION

Posons $a_0 = a$, $b_0 = b$ et $c_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$. On calcule $f(c_0)$;

- si $f(a_0)f(c_0) < 0$, on pose $a_1 = a_0$ et $b_1 = c_0$;
- si $f(a_0)f(c_0) > 0$, on pose $a_1 = c_0$ et $b_1 = b_0$;
- si $f(c_0) = 0$, le réel c_0 est un zéro de f et on peut s'arrêter.

Ceci est la première étape. Les autres sont analogues: étant donné

$$a_m, b_m,$$

on pose

$$c_m = \frac{a_m + b_m}{2}$$

et on calcule $f(c_m)$;

- si $f(a_m)f(c_m) < 0$, on pose $a_{m+1} = a_m$ et $b_{m+1} = c_m$;
- si $f(a_m)f(c_m) > 0$, on pose $a_{m+1} = c_m$ et $b_{m+1} = b_m$;
- si $f(c_m) = 0$, le réel c_m est un zéro de f et on peut s'arrêter.

Nous allons montrer que toute suite x_m ($m \in \mathbb{N}$) telle que $x_m \in [a_m, b_m]$ pour tout m converge vers un zéro de f appartenant à $[a, b]$. En pratique, on considère souvent $x_m = c_m = \frac{a_m + b_m}{2}$.

Propriété 3.2.2 Toute suite x_m ($m \in \mathbb{N}$) telle que $x_m \in [a_m, b_m]$ pour tout m converge vers un zéro de f appartenant à $[a, b]$.

Preuve. Par construction, les intervalles $[a_m, b_m]$ sont emboîtés en décroissant et on a $b_m - a_m = 2^{-m}(b - a)$ pour tout m . Il s'ensuit que si $p, q \geq M$, alors $x_p, x_q \in [a_M, b_M]$ donc

$$|x_p - x_q| \leq b_M - a_M = \frac{b - a}{2^M}.$$

Dès lors la suite x_m ($m \in \mathbb{N}$) est de Cauchy donc converge. Notons r sa limite.

Soit un naturel M ; comme $x_m \in [a_M, b_M]$ pour tout $m \geq M$, on obtient $r \in [a_M, b_M]$. Il s'ensuit que

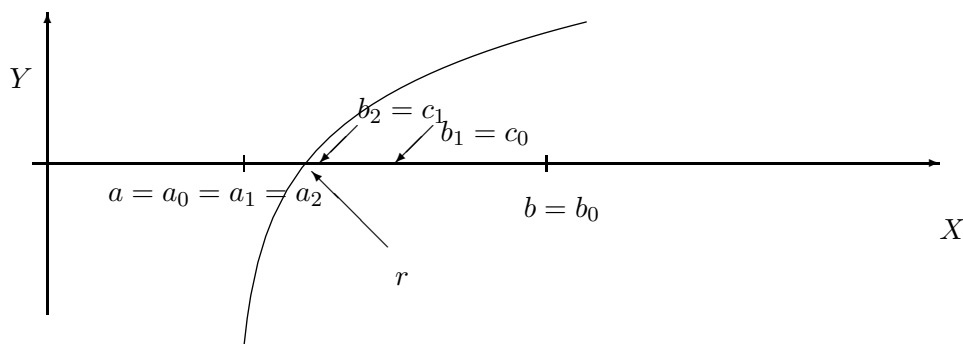
$$r \in \bigcup_{M \in \mathbb{N}} [a_M, b_M].$$

Comme les longueurs des intervalles $[a_M, b_M]$ forment une suite qui converge vers 0, l'intersection de ces intervalles est en fait réduite au seul point r .

On vient donc de démontrer que r est la limite de n'importe quelle suite x_m ($m \in \mathbb{N}$ vérifiant $x_m \in [a_m, b_m]$ pour tout m). Il reste à montrer que $f(r) = 0$. De fait, par construction, chaque intervalle $[a_m, b_m]$ contient un zéro de f ; on peut donc prendre un tel zéro en guise de x_m . La fonction f étant continue, on obtient finalement

$$0 = \lim_{m \rightarrow +\infty} f(x_m) = f(r)$$

□



REMARQUE SUR L'ERREUR COMMISE (ET LE TEST D'ARRÊT)

En pratique, on choisit au départ $\varepsilon > 0$ (qui, en un certain sens, concrétise l'erreur tolérée) et on arrête les calculs d'approximations (si on n'est pas tombé directement sur un zéro) lorsque m est tel que

$$0 \leq b_m - a_m \leq \varepsilon.$$

L'erreur exacte commise, à savoir $\Delta_m = |x_m - r|$ est alors inférieure à ε .

Comme on a toujours

$$|x_m - r| \leq \frac{1}{2}(b_m - a_m)$$

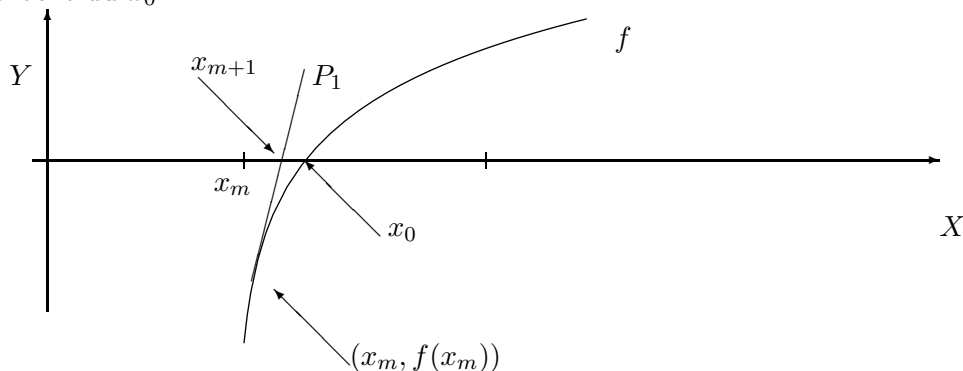
on dit que la méthode est linéaire de taux $1/2$. Il faut cependant remarquer que ceci n'est qu'un abus de langage si l'on compare avec la définition mentionnée ci-dessous; on n'a en effet pas toujours $|x_{m+1} - r| \leq |x_m - r|$ pour tout m grand.

3.2.3 Méthode de la tangente (ou de Newton)

Soit f est une fonction réelle continûment dérivable sur un intervalle ouvert I de \mathbb{R} et soit x_0 un zéro de f dans cet intervalle. Considérons une valeur approchée $x_m \in I$ de x_0 et la tangente au graphique de f au point d'abscisse x_m ou, ce qui revient au même, l'approximation polynomiale à l'ordre 1 de f en x_m :

$$P_1(x) = f(x_m) + Df(x_m)(x - x_m).$$

Supposons $Df(x_m) \neq 0$. Comme $P_1(x)$ est proche de $f(x)$ si x est proche de x_m et comme $f(x_0) = 0$, on peut espérer que, sous certaines conditions, l'intersection du graphique de P_1 avec l'axe des X soit aussi (plus) proche du x_0 .



CONSTRUCTION

La méthode de la tangente consiste donc à construire une suite d'approximations d'un zéro de f de la manière suivante.

On part d'un réel x_1 (condition initiale) et on construit les x_m suivants par récurrence: si x_m est connu et si la tangente au graphique de f en x_m n'est pas parallèle à X , alors on prend en guise de x_{m+1} l'abscisse du point d'intersection de cette tangente avec l'axe des X . L'équation cartésienne de la tangente dont il est question étant $y - f(x_m) = Df(x_m)(x - x_m)$, à chaque étape, x_{m+1} est donc défini par $0 - f(x_m) = Df(x_m)(x_{m+1} - x_m)$ c'est-à-dire

$$x_{m+1} = x_m - \frac{f(x_m)}{Df(x_m)}.$$

REMARQUE SUR LA CONVERGENCE ET L'ORDRE DE CONVERGENCE

Contrairement au cas de la méthode de la bisection, la méthode de Newton ne fournit pas toujours de suite convergente. Voici des résultats donnant des conditions suffisantes pour assurer effectivement la convergence. Ils renseignent aussi sur l'ordre de convergence: la méthode de Newton est une méthode d'ordre 2, c'est-à-dire quadratique.

Proposition 3.2.3 *Soit f une fonction à valeurs réelles et soit x_0 un zéro de celle-ci. Si f est deux fois continûment dérivable au voisinage de x_0 et si $Df(x_0) \neq 0$ alors il existe $r > 0$ tel que la suite définie par*

$$x_1 \in [x_0 - r, x_0 + r], \quad x_{m+1} = x_m - \frac{f(x_m)}{Df(x_m)}$$

converge vers x_0 et la convergence est quadratique. De plus, si $D^2f(x_0) \neq 0$ alors

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{x_{m+1} - x_0}{(x_m - x_0)^2} = \frac{D^2f(x_0)}{2Df(x_0)}.$$

On a cependant le résultat plus global suivant⁵.

Proposition 3.2.4 *Soit f une fonction à valeurs réelles deux fois continûment dérivable sur un intervalle contenant $[a, b]$. Si*

- $f(a)f(b) < 0$
- $Df(x) \neq 0$ quel que soit $x \in]a, b[$
- $D^2f \geq 0$ (resp. $D^2f \leq 0$) sur $]a, b[$

alors, quelle que soit la condition initiale $x_1 \in]a, b[$ telle que $f(x_1) \geq 0$ (resp. $f(x_1) \leq 0$), la méthode de Newton fournit une suite qui converge vers l'unique zéro de f dans $[a, b]$. La convergence est quadratique.

3.2.4 Méthode de la sécante

Ici encore, on construit une suite d'approximations d'un zéro de f . Cependant, remarquons une fois de plus que cette méthode de construction ne donne pas toujours lieu à une suite convergente vers un zéro; la dépendance en les conditions initiales est importante.

Brièvement, on peut encore dire que la méthode de la sécante est semblable à la méthode précédente si l'on remplace les tangentes par des sécantes. Cette méthode permet d'éviter le calcul de Df (en les approximations), lequel peut se révéler délicat, car elle consiste en fait à remplacer le nombre $Df(x_m)$ à chaque itération par l'approximation $\frac{f(x_m) - f(x_{m-1})}{x_m - x_{m-1}}$. Elle n'a cependant pas un aussi bon ordre de convergence que la méthode de la tangente.

⁵Le résultat précédent donne en effet uniquement un résultat local

CONSTRUCTION

Au départ, on choisit deux réels distincts x_1, x_2 (c'est-à-dire les conditions initiales; c'est ici que des résultats théoriques interviendraient pour assurer la convergence de la méthode), soient x_1 et x_2 , et on considère la droite d passant par les points du graphique de f dont les abscisses sont x_1, x_2 . Si cette droite n'est pas parallèle à X , le réel x_3 est défini comme l'intersection de cette droite avec l'axe X . Puisque l'équation cartésienne de d est $y - f(x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_2)$, on a

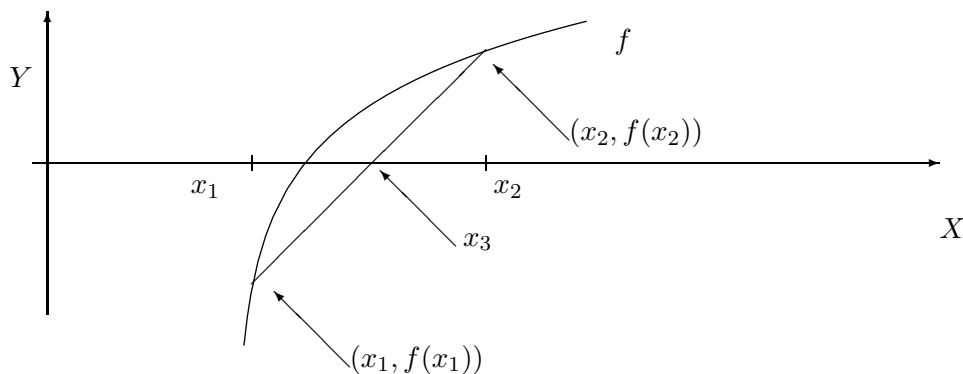
$$x_3 = x_2 - f(x_2) \frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)}.$$

On continue la construction de la même manière: étant donné x_{m-1} et x_m , l'équation cartésienne de la droite passant par les points du graphique de f dont les abscisses sont ces réels est (pour autant que $x_{m-1} \neq x_m$)

$$y - f(x_m) = \frac{f(x_m) - f(x_{m-1})}{x_m - x_{m-1}}(x - x_m)$$

et l'on pose (pour autant que cette droite ne soit pas parallèle à X)

$$x_{m+1} = x_m - f(x_m) \frac{x_m - x_{m-1}}{f(x_m) - f(x_{m-1})}.$$



REMARQUE SUR LA CONVERGENCE ET L'ORDRE DE CONVERGENCE

Sous de bonnes hypothèses sur f , on obtient qu'avec des conditions initiales convenables, on a les estimations suivantes sur l'erreur commise dans les approximations x_m du zéro x_0 de f : il existe une constante C telle que

$$|x_{m+1} - x_0| \leq C|x_m - x_0|^p$$

pour tout m suffisamment grand, avec

$$p = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} (\simeq 1.6).$$

La méthode est donc d'ordre $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Terminons cette section par l'énoncé précis de conditions sous lesquelles on a effectivement la convergence de la méthode et des résultats sur l'ordre de convergence.

Proposition 3.2.5 Soit f une fonction à valeurs réelles deux fois continûment dérivable sur un intervalle ouvert I de \mathbb{R} et un réel $x_0 \in I$ tel que

$$f(x_0) = 0, \quad Df(x_0) \neq 0, \quad D^2f(x_0) \neq 0.$$

Alors il existe $r > 0$ tel que, étant donné points distincts x_1, x_2 de $[x_0 - r, x_0 + r] \setminus \{x_0\}$, la suite x_m ($m \in \mathbb{N}_0$) définie par

$$x_{m+2} = x_{m+1} - f(x_{m+1}) \frac{x_{m+1} - x_m}{f(x_{m+1}) - f(x_m)}$$

converge vers x_0 et

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{|x_{m+1} - x_0|}{|x_m - x_0|^p} = \left| \frac{D^2 f(x_0)}{2Df(x_0)} \right|^{1/p}$$

avec $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1.618$.

3.2.5 Méthode de Stefenssen

Comme la méthode de la sécante, la méthode de Stefenssen peut être vue comme une tentative de remplacer l'utilisation de la dérivée $Df(x_m)$ dans la méthode de Newton (c'est-à-dire de la tangente). Comme la suite $f(x_m)$ ($m \in \mathbb{N}_0$) converge vers 0 si la suite x_m ($m \in \mathbb{N}_0$) converge vers un zéro de f , dans cette méthode, la valeur $Df(x_m)$ est approchée par

$$\frac{f(x_m + f(x_m)) - f(x_m)}{f(x_m)}.$$

CONSTRUCTION

La méthode itérative de Stefenssen consiste en la construction de la suite x_m ($m \in \mathbb{N}_0$) à partir d'une valeur initiale x_1 et de l'expression

$$x_{m+1} = x_m - \frac{f^2(x_m)}{f(x_m + f(x_m)) - f(x_m)}.$$

REMARQUE SUR LA CONVERGENCE ET L'ORDRE DE CONVERGENCE

La méthode de Steffensen ne fournit pas toujours de suite convergente. Des conditions suffisantes peuvent cependant être données. Nous n'en parlerons pas dans cette brève introduction; cependant, comme cette méthode est en fait un cas particulier de la méthode du point fixe qui va être décrite dans la suite, on peut trouver des informations en reprenant les résultats qui vont y être décrits et en les adaptant à ce cas particulier.

Signalons encore qu'on démontre que la méthode de Steffensen est une méthode quadratique comme la méthode de Newton (de la tangente).

3.2.6 Méthode du point fixe

Un outil standard pour la résolution numérique d'une équation du type $f(x) = 0$ est l'utilisation de méthodes itératives, à savoir la construction d'une suite d'approximations par une formule de récurrence du type

$$x_{m+1} = F(x_m) \quad (m \in \mathbb{N}_0).$$

On vient d'ailleurs déjà d'en voir deux exemples⁶, présentés de manière indépendante de cette section étant donné leurs interprétations géométriques particulièrement explicites.

Si une telle suite converge, si on note x_0 sa limite et si g est continu, on obtient

$$x_0 = F(x_0)$$

ce qui signifie que x_0 , limite de la suite construite par récurrence, est un **point fixe** de la fonction F .

⁶les méthodes de Newton et de Steffensen sont de ce type!

Un autre exemple direct de l'utilisation de la méthode du point fixe dans la recherche de zéros de fonctions est fourni par la simple remarque suivante

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) + x = x$$

et même, dans un cadre un peu plus général,

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x)h(x) + x = x$$

pour autant que h soit une fonction qui ne s'annule pas dans l'intervalle considéré. Ainsi, la recherche d'un zéro de f revient à chercher un point fixe pour F où $F(x) = f(x)h(x) + x$. Le succès de cette recherche étant soumis à des propriétés de F , il est utile de savoir qu'en fait, à partir d'une même fonction f , cette méthode autorise plusieurs possibilités (car plusieurs choix de F possibles!). Notons que les exemples rappelés précédemment, à savoir les méthodes de Newton et de Steffensen, consistent à utiliser respectivement

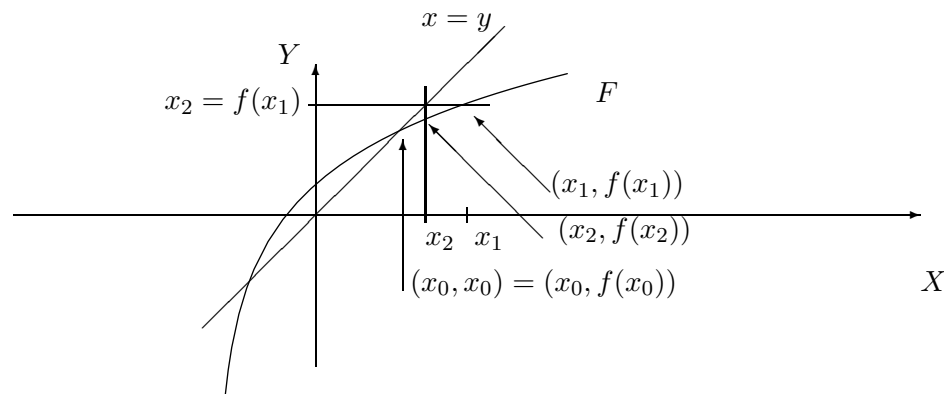
$$F(x) = x - \frac{f(x)}{Df(x)}, \quad F(x) = x - \frac{f^2(x)}{f(x+f(x)) - f(x)}.$$

CONSTRUCTION

La recherche pratique d'un point fixe pour une fonction F consiste en la construction d'une suite définie par récurrence à partir d'une condition initiale. Si x_1 désigne ce point de départ, la suite x_m ($m \in \mathbb{N}_0$) est définie par la récurrence suivante:

$$x_{m+1} = F(x_m), \quad m \in \mathbb{N}_0.$$

Si cette suite converge et si F est continu, alors la limite de la suite est un point fixe pour F .



Bien sûr, la description précédente exige plusieurs précisions notamment quant aux domaines de définitions utilisés, quant aux propriétés de F assurant la convergence et quant à la condition initiale⁷. En fait, on peut donner le résultat suivant, très direct à démontrer et d'une grande utilité pratique (même s'il ne fournit que des conditions suffisantes, certainement pas nécessaires).

REMARQUE SUR LA CONVERGENCE ET L'ORDRE DE CONVERGENCE

Théorème 3.2.6 (Un théorème de point fixe) Soit $F : [a, b] \rightarrow [a, b]$ une fonction continue pour laquelle il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que

$$|F(x) - F(y)| \leq \theta|x - y|, \quad \forall x, y \in [a, b].$$

Alors, quel que soit le réel x_1 choisi dans $[a, b]$, la suite définie par $x_{m+1} = F(x_m)$ ($m \in \mathbb{N}_0$) converge vers l'unique point fixe de F dans $[a, b]$. La convergence est au moins linéaire.

⁷Déjà sur cette représentation, on voit que si l'on tente de partir d'un point x_1 situé bien plus "à gauche" de façon à espérer arriver au second point fixe, on voit que la méthode ne fonctionne pas

Preuve. Démontrons l'unicité. De fait, si x_0 et x'_0 sont deux points de $[a, b]$ tels que $F(x_0) = x_0$ et $F(x'_0) = x'_0$ alors

$$|F(x_0) - F(x'_0)| = |x_0 - x'_0| \leq \theta |x_0 - x'_0|$$

ce qui implique nécessairement $x_0 = x'_0$ étant donné le fait que θ est strictement inférieur à 1.

Cela étant, pour démontrer la convergence, il suffit de prouver que la suite est de Cauchy. On a successivement, pour tout $m \geq 2$,

$$\begin{aligned} |x_{m+1} - x_m| &= |F(x_m) - F(x_{m-1})| \\ &\leq \theta |x_m - x_{m-1}| = \theta |F(x_{m-1}) - F(x_{m-2})| \\ &\leq \theta^2 |x_{m-1} - x_{m-2}| \\ &\leq \dots \\ &\leq \theta^{m-1} |x_2 - x_1| \end{aligned}$$

donc, pour $q > p$,

$$\begin{aligned} |x_p - x_q| &\leq |x_p - x_{p+1}| + \dots + |x_{q-1} - x_q| \\ &\leq (\theta^{p-1} + \dots + \theta^{q-2}) |x_2 - x_1| \\ &= \theta^{p-1} (1 + \theta + \dots + \theta^{q-p-1}) |x_2 - x_1| \\ &= \theta^{p-1} \frac{1 - \theta^{q-p}}{1 - \theta} |x_2 - x_1| \\ &\leq \frac{\theta^{p-1}}{1 - \theta} |x_2 - x_1|; \end{aligned}$$

dès lors, comme

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \theta^{p-1} = 0$$

on conclut. \square

Remarque.

La condition suffisante énoncée sur F ci-dessus est en particulier satisfaite si F est continûment dérivable sur un intervalle contenant $[a, b]$ est si $\sup_{x \in [a, b]} |DF(x)| < 1$.

On vérifie en effet directement ceci en utilisant le développement limité de Taylor à l'ordre 1.

De plus, si x_0 est un point fixe de F , si F est p fois continûment dérivable sur un intervalle contenant x_0 et si $D^k F(x_0) = 0$ pour les naturels $k = 1, \dots, p-1$, alors la méthode du point fixe est d'ordre p .

3.3 Approximation d'intégrales

Dans tout ce qui suit, on considère une fonction continue $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. L'objectif de cette section est de donner quelques exemples de méthodes permettant d'approcher numériquement la valeur exacte de l'intégrale

$$\int_a^b f(x) dx.$$

3.3.1 Méthode des rectangles

Bien sûr, on peut en tout premier lieu se référer à la définition que nous avons adoptée pour l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle borné fermé $[a, b]$ (cf cours *Mathématiques générales A*), à

savoir la définition faisant intervenir les sommes de Riemann (on parle alors d'intégrale de Riemann). Ainsi, on a

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} S(\sigma_n, f)$$

avec

$$S(\sigma_n, f) = \sum_{k=1}^n f(r_k) (x_k - x_{k-1})$$

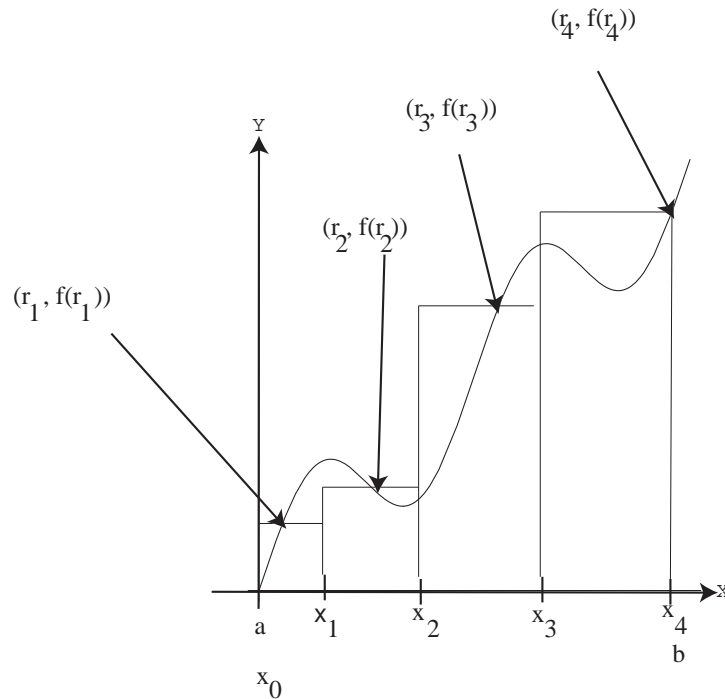
quelle que soit la suite de découpages σ_n ($n \in \mathbb{N}_0$) donnée par

$$x_0 = a < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b, \quad r_k \in [x_{k-1}, x_k], \quad k = 1, \dots, n$$

pour autant que

$$L_n = \sup\{x_1 - x_0, \dots, x_{n-1} - x_{n-2}, x_n - x_{n-1}\} \rightarrow 0 \text{ si } n \rightarrow +\infty.$$

Si f est à valeurs positives, cela signifie que l'intégrale de f sur $[a, b]$ peut être approchée à une précision voulue par la somme des aires des rectangles de côtés de longueurs $x_k - x_{k-1}$ et $f(r_k)$.



En particulier, si on choisit

$$x_k = a + k \frac{b-a}{n}, \quad k = 0, \dots, n$$

on a

$$S(\sigma_n, f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(r_k)$$

donc

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(r_k) = (b-a) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left(f(r_1) + \dots + f(r_{n-1}) + f(r_n) \right);$$

en particulier, lorsque par exemple $r_k = x_k$,

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left(f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) + f(b) \right).$$

Remarquons (rappelons) que, quel que soit n , l'intégrale est exactement égale à $\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(r_k)$ pour autant que les r_k soient choisis convenablement (et c'est ceci, qui n'est en fait pas pratique⁸).

Cela étant, quand on souhaite calculer une valeur approchée de $\int_a^b f(x) dx$ par la méthode des rectangles, on calcule donc un élément de la suite $S(\sigma_n, f)$ ($n \in \mathbb{N}_0$). Par définition, l'erreur commise à l'étape n (ou le reste de l'approximation) est

$$E_n = \int_a^b f(x) dx - S(\sigma_n, f).$$

On a les résultats suivants quant aux estimations de ces erreurs.

Proposition 3.3.1 *Si f est continûment dérivable sur un intervalle contenant $[a, b]$ et si*

$$x_k = a + k \frac{b-a}{n}, \quad r_k = x_{k-1} + \delta \frac{b-a}{n}, \quad k = 1, \dots, n$$

pour un $\delta \in [0, 1]$, alors

$$|E_n| = \left| \int_a^b f(x) dx - S(\sigma_n, f) \right| \leq \frac{b-a}{n} \sup_{x \in [a, b]} |Df(x)|, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

En outre, si $\delta = \frac{1}{2}$ et si f est deux fois continûment dérivable, on a même

$$|E_n| = \left| \int_a^b f(x) dx - S(\sigma_n, f) \right| \leq \frac{(b-a)^2}{24n^2} \sup_{x \in [a, b]} |D^2 f(x)|, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

3.3.2 Méthode des trapèzes

Si f est à valeurs positives, la méthode des trapèzes consiste en fait à approcher l'intégrale de f sur $[a, b]$ à une précision voulue par la somme des aires des trapèzes de sommets de coordonnées $(x_{k-1}, 0)$, $(x_k, 0)$, $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$, $(x_k, f(x_k))$ c'est-à-dire par

$$T(\sigma_n, f) = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \frac{f(x_k) + f(x_{k-1})}{2}.$$

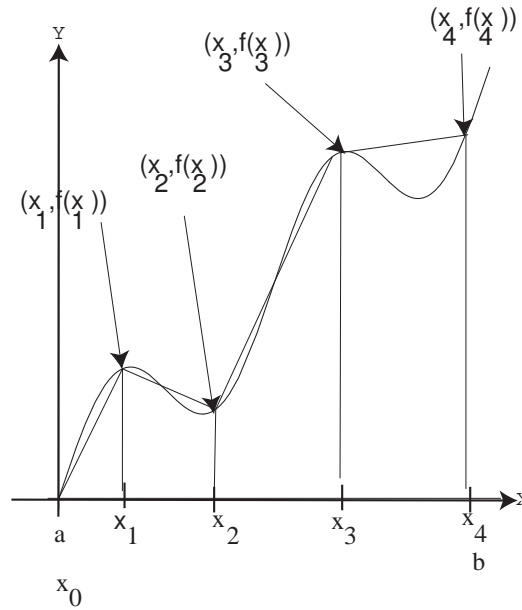
⁸En effet, rappelons qu'étant donné $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$, en utilisant le théorème des accroissements finis sur chaque intervalle $[x_{k-1}, x_k]$ appliqué à la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$, primitive de f sur $[a, b]$, on obtient qu'il existe $r_1 \in [x_0, x_1], \dots, r_n \in [x_{n-1}, x_n]$ tels que

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx = \sum_{k=1}^n \left(F(x_{k-1}) - F(x_k) \right) dx = \sum_{k=1}^n (x_{k-1} - x_k) f(r_k)$$

ce qui donne exactement

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(r_k)$$

lorsque $x_k = a + k \frac{b-a}{n}$, $k = 0, \dots, n$.



Si l'on prend soin de prendre une suite de découpages dont la suite des largeurs tend vers 0, c'est-à-dire tels que

$$L_n = \sup\{x_1 - x_0, \dots, x_{n-1} - x_{n-2}, x_n - x_{n-1}\} \rightarrow 0 \text{ si } n \rightarrow +\infty$$

alors on a effectivement

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} T(\sigma_n, f) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \frac{f(x_k) + f(x_{k-1})}{2} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) f(x_k) + \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) f(x_{k-1}) \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b f(x) dx + \frac{1}{2} \int_a^b f(x) dx \\ &= \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

en vertu de la définition de l'intégrale (définition de l'intégrale de Riemann).

Lorsque

$$x_k = a + k \frac{b-a}{n}, \quad k = 0, \dots, n$$

on obtient

$$T(\sigma_n, f) = \frac{b-a}{2n} \left(f(a) + 2f(x_1) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(b) \right).$$

Cela étant, quand on souhaite calculer une valeur approchée de $\int_a^b f(x) dx$ par la méthode des trapèzes, on calcule donc un élément de la suite $T(\sigma_n, f)$ ($n \in \mathbb{N}_0$). Par définition, l'erreur commise à l'étape n (ou le reste de l'approximation) est

$$E_n = \int_a^b f(x) dx - T(\sigma_n, f).$$

On a les résultats suivants quant aux estimations de ces erreurs.

Proposition 3.3.2 On considère les découpages σ_n ($n \in \mathbb{N}_0$) de $[a, b]$ définis à partir des réels $x_k = a + k \frac{b-a}{n}$, $k = 0, \dots, n$.

Si f est deux fois continûment dérivable sur un intervalle contenant $[a, b]$, on a

$$|E_n| = \left| \int_a^b f(x) dx - T(\sigma_n, f) \right| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \sup_{x \in [a, b]} |D^2 f(x)|, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

On remarque donc que cette méthode donne en général moins de précision que la méthode des rectangles dans le cas $\delta = \frac{1}{2}$.

Cependant, la méthode des trapèzes est avantageuse car elle permet de diminuer le nombre de certains calculs intermédiaires.

En effet, d'une part, en posant

$$h = \frac{b-a}{n}$$

pour la clarté de la présentation, on a successivement

$$\begin{aligned} T(\sigma_{2n}, f) &= \frac{b-a}{4n} \left(f(a) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + 2f(x_4) + \dots + 2f(x_{2n-1}) + f(b) \right) \\ &= \frac{h}{4} \left(f(a) + 2f\left(a + \frac{h}{2}\right) + 2f(a+h) + 2f\left(a + 3\frac{h}{2}\right) + 2f(a+2h) \dots + 2f\left(a + (n-1)h + \frac{h}{2}\right) + f(b) \right) \\ &= \frac{h}{4} \left(f(a) + 2f(a+h) + 2f(a+2h) \dots + f(b) \right) \\ &\quad + \frac{h}{4} \left(2f\left(a + \frac{h}{2}\right) + 2f\left(a + 3\frac{h}{2}\right) + \dots + 2f\left(a + (n-1)h + \frac{h}{2}\right) \right) \\ &= \frac{T(\sigma_n, f)}{2} + \frac{h}{2} \left(f\left(a + \frac{h}{2}\right) + f\left(a + 3\frac{h}{2}\right) + \dots + f\left(a + (n-1)h + \frac{h}{2}\right) \right). \end{aligned}$$

On peut donc calculer $T(\sigma_{2n}, f)$ à partir de $T(\sigma_n, f)$ grâce à une multiplication, deux divisions, n additions et n évaluations de f .

D'autre part, pour $n = 2$ et $h = \frac{b-a}{2}$ par exemple, on a

$$S(\sigma_4, f) = \frac{b-a}{4} \left(f\left(a + \frac{1}{2}h\right) + f\left(a + \frac{3}{2}h\right) + f\left(a + \frac{5}{2}h\right) + f\left(a + \frac{7}{2}h\right) + f(b) \right)$$

et

$$S(\sigma_2, f) = \frac{b-a}{2} \left(f\left(a + \frac{1}{2}h\right) + f\left(a + \frac{3}{2}h\right) + f(b) \right).$$

De même, en toute généralité, on ne peut exploiter le calcul de $S(\sigma_n, f)$ pour celui de $S(\sigma_{2n}, f)$: pour obtenir ce dernier, on a besoin de $2n$ évaluations de f et de $2n$ additions.

3.3.3 Méthode de Simpson

La méthode des rectangles et la méthode des trapèzes pour le calcul d'approximations de l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle borné fermé viennent d'être introduites. Dans le cas d'une fonction continue à valeurs positives, leur interprétation géométrique est claire: sur un intervalle $[x_{k-1}, x_k]$

- la méthode des rectangles consiste à "remplacer" f par la constante $f(r_k)$ et à considérer l'aire de ce rectangle en guise d'approximation de l'intégrale de f :

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx \quad \text{approché par} \quad \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(r_k) dx = f(r_k) (x_k - x_{k-1})$$

- la méthode des trapèzes consiste à “remplacer” f par le polynôme du premier degré (en général) qui prend les mêmes valeurs que f aux extrémités de l'intervalle et à considérer l'intégrale de ce polynôme en guise d'approximation de l'intégrale de f :

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx$$

approché par
$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} \left(f(x_{k-1}) + \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}(x - x_{k-1}) \right) dx = (x_k - x_{k-1}) \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}$$

A l'étape n , l'approximation de l'intégrale de f sur $[a, b]$ est alors obtenue en faisant la somme de chacune des approximations sur chacun des intervalles $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \dots, n$.

La méthode de Simpson peut être présentée comme étant un processus analogue (voir aussi remarques terminant cette section à propos des méthodes de Newton-Cotes): sur chacun des sous-intervalles considérés, elle consiste à remplacer f par le polynôme de degré 2 (en général) qui prend les mêmes valeurs que f aux extrémités et au milieu de cet intervalle: le polynôme⁹ du second degré (en général) qui interpole¹⁰ f aux points¹¹ $a_1, a_1 + h = (a_1 + b_1)/2, b_1$ est

$$p_2(x) = f(a_1) + \frac{f(a_1 + h) - f(a_1)}{h}(x - a_1) + \frac{f(a_1) - 2f(a_1 + h) + f(b_1)}{2h^2}(x - a_1)(x - b_1)$$

et son intégrale sur l'intervalle $[a_1, b_1]$ est

$$\int_{a_1}^{b_1} p_2(x) dx = \frac{h}{3} \left(f(a_1) + 4f(a_1 + h) + f(b_1) \right).$$

Ainsi, pour n naturel pair, en considérant le découpage σ_n de $[a, b]$ déterminé par les points $x_k = a + k \frac{b-a}{n}$ ($k = 0, \dots, n$), on “découpe” l'intervalle $[a, b]$ en $n/2$ sous-intervalles $[x_{2k}, x_{2k+2}]$ ($k = 0, \dots, n/2 - 1$) et on applique ce qui vient d'être décrit à chacun de ces sous-intervalles (par construction, le point milieu de $[x_{2k}, x_{2k+2}]$ est le point x_{2k+1}); l'approximation de l'intégrale de f à l'étape n est donc définie par

$$\begin{aligned} P(\sigma_n, f) &= \int_{x_0}^{x_2} p_2^{(0)}(x) dx + \int_{x_2}^{x_4} p_2^{(1)}(x) dx + \dots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} p_2^{(n/2-1)}(x) dx \\ &= \frac{h}{3} \left(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2) \right) + \frac{h}{3} \left(f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4) \right) + \\ &\quad \dots + \frac{h}{3} \left(f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n) \right) \\ &= \frac{h}{3} \left(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \dots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n) \right) \end{aligned}$$

avec $h = \frac{b-a}{n}$.

Montrons effectivement que la suite $P(\sigma_n, f)$ ($n \in 2\mathbb{N}_0$) converge vers l'intégrale de f sur $[a, b]$. De fait, on a en regroupant les termes de manière appropriée, on obtient dans le cas où $n = 4$,

$$\begin{aligned} &\frac{h}{3} \left(f(a) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(b) \right) \\ &= \frac{h}{3} \left(f(x_1) + f(x_1) + f(x_3) + f(x_3) \right) + \frac{h}{3} \left(f(a) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) \right) \\ &\quad + \frac{h}{3} \left(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(b) \right). \end{aligned}$$

⁹on démontre aisément, par des méthodes de base d'analyse et d'algèbre linéaire, l'existence et l'unicité de ce polynôme

¹⁰c'est-à-dire qui prend les mêmes valeurs que

¹¹ $h = (b_1 - a_1)/2$

Cette répartition de la somme totale en une somme de trois termes permettant chacun de se ramener à une expression de type $S(\sigma'_4, f)$ s'effectue dans le cas général d'un naturel n pair et conduit à

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(\sigma_n, f) = \frac{1}{3} \int_a^b f(x) dx + \frac{1}{3} \int_a^b f(x) dx + \frac{1}{3} \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

On a les résultats suivants quant aux estimations des erreurs d'approximation

$$E_n = \int_a^b f(x) dx - P(\sigma_n, f).$$

Proposition 3.3.3 *On reprend les notations introduites ci-dessus. Si f est quatre fois continûment dérivable sur un intervalle contenant $[a, b]$, on a*

$$|E_n| = \left| \int_a^b f(x) dx - T(\sigma_n, f) \right| \leq \frac{(b-a)^3}{2880n^4} \sup_{x \in [a,b]} |D^4 f(x)|, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

3.3.4 Remarque: introduction des méthodes de Newton-Cotes

Présentation générale

Bien souvent, l'intégration d'une fonction continue sur un intervalle de \mathbb{R} n'est pas possible explicitement. Du point de vue numérique, les intégrales sont le plus souvent approchées par des combinaisons linéaire de valeurs de la fonction à intégrer.

Les méthodes de Newton-Cotes consistent à approcher l'intégrale de f sur $[a, b]$ par l'approximation

$$\sum_{k=0}^m c_k f(x_k)$$

avec

$$x_j = a + j \frac{b-a}{m}, \quad j = 0, \dots, m$$

en imposant que cette expression soit exactement égale à l'intégrale de f sur $[a, b]$ pour tous les polynômes de degré au plus m . La détermination des coefficients c_j se ramène à la résolution¹² d'un système linéaire de dimension $m+1$.

On montre qu'en fait, l'approximation ainsi obtenue est l'intégrale du polynôme d'interpolation de f aux points x_0, \dots, x_m . Plus précisément, le polynôme qui interpole f aux points x_0, \dots, x_m est

$$\sum_{j=0}^m f(x_j) L_j(x)$$

où les L_j sont appelés les *polynômes de Lagrange* et sont donnés par

$$L_j(x) = \prod_{k=1, \dots, m; k \neq j} \frac{x - x_k}{x_j - x_k},$$

et

$$\int_a^b \sum_{j=0}^m f(x_j) L_j(x) dx = \sum_{j=0}^m \int_a^b L_j(x) dx f(x_j)$$

et par suite

$$c_j = \int_a^b L_j(x) dx.$$

¹²on obtient par la même occasion l'unicité des c_j ayant ces propriétés

Exemples

En écrivant

$$c_j = \frac{b-a}{s} d_j,$$

on obtient le tableau suivant

m	d_j						s	
1	1	1					2	
2	1	4	1				6	
3	1	3	3	1			8	
4	7	32	12	32	7		90	
5	19	75	50	50	75	19	288	
6	41	216	27	272	27	216	41	840

Ainsi, pour $m = 1$, on retrouve la méthode du trapèze:

$$\int_a^b f(x) dx \quad \text{approché par} \quad \sum_{j=0}^1 c_j f(x_j) = \frac{b-a}{2} \left(f(a) + f(b) \right)$$

Pour $m = 2$, on retrouve la méthode de Simpson:

$$\int_a^b f(x) dx \quad \text{approché par} \quad \sum_{j=0}^2 c_j f(x_j) = \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right).$$

Propriétés générales

On démontre également la propriété suivante, un peu surprenante à priori: *si m est pair, la méthode de Newton-Cotes donne lieu à*

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{j=0}^m c_j f(x_j)$$

pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à $m + 1$. Ainsi, "gratuitement", une formule exacte pour tout polynôme de degré au plus m l'est aussi pour tout polynôme de degré $m + 1$, pour autant que m soit pair!

C'est en fait cette propriété qui peut expliquer pourquoi, de façon assez surprenante à priori, on a une estimation de l'erreur en $1/n^2$ dans le cas de la méthode des trapèzes et une estimation en $1/n^4$ dans le cas de la méthode de Simpson! On s'attendrait plutôt à voir une estimation en $1/n^3$ étant donné l'utilisation de polynômes de degré 1 puis 2.

3.4 Exercices

UTILISATION DE LA CALCULATRICE

3.4.1 Calcul de zéros

- Justifier graphiquement le fait que l'équation

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 - \sin x = 0$$

possède trois solutions distinctes: $0, r, -r$ avec $r > 0$. Déterminer une approximation de r .

- Utiliser des représentations graphiques pour déterminer les zéros des fonctions suivantes, avec une erreur d'une décimale au plus.

$$a) 4 \sin x + 1 - x, \quad b) 1 - x - e^{-2x}, \quad c) x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 8.$$

- Utiliser la méthode de la bisection pour approcher un zéro de f avec une erreur de moins de $1/16$.

$$a) f(x) = x^2 - 2, \quad b) f(x) = x^2 - 7, \quad c) f(x) = x^3 + x - 3, \quad d) f(x) = x^3 - 3.$$

- Montrer que les équations suivantes ont toutes une solution dans l'intervalle $]0, 1.6[$. Déterminer cette solution avec une erreur inférieure à 0.02 en utilisant la méthode de la bisection.

$$a) x \cos x = \ln x, \quad b) 2x - e^{-x}, \quad c) e^{-2x} = 1 - x$$

- Montrer graphiquement que l'équation $x = 1 - e^{-2x}$ possède une solution non nulle (bien sûr 0 est solution). Utiliser la méthode de la tangente pour en donner une approximation avec une erreur d'au plus 10^{-4} .

- Utiliser la méthode de la tangente pour trouver des approximations (à 10^{-5}) des zéros de

$$f(x) = x^4 + 2x^2 - x - \frac{1}{4}.$$

- Utiliser la méthode de la sécante pour déterminer les solutions des équations suivantes avec une erreur d'au plus 0.0001 .

$$a) 2x = e^{-x}, \quad b) \operatorname{tg} x + \operatorname{ch} x = 0, \quad c) x^3 - x - 5.$$

- Utiliser la méthode du point fixe pour résoudre l'équation

$$x - e^{-x} = 0.$$

- Résoudre $f(x) = 0$ avec

$$a) f(x) = \cos x - x, \quad b) f(x) = \frac{3}{2} - \frac{\cos(2x)}{2} - x, \quad c) f(x) = x^3 + x^2 - x.$$

3.4.2 Approximation d'intégrales

- Déterminer N qui donne une erreur inférieure à 10^{-6} dans le calcul de l'approximation de l'intégrale $\int_1^2 x^{-1} dx$ par la méthode du trapèze (resp. de Simpson).
- Déterminer une approximation de l'intégrale $\int_0^1 \sqrt{1+x^4} dx$ par la méthode du trapèze (resp. de Simpson) avec $N = 2, 4$.
- Déterminer une valeur approchée de $\int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2) dx$ (pour rappel, la valeur exacte de cette intégrale est $\sqrt{\pi}$, cf Chapitre 7 (A))
- Par la méthode du trapèze et par la méthode de Simpson, déterminer une approximation des intégrales suivantes (n désigne chaque fois le nombre de sous-intervalles à utiliser).

$$a) \int_1^3 \frac{1}{x} dx, n = 6; \quad b) \int_0^1 e^{-x^2} dx, n = 10, n = 40; \quad c) \int_0^1 \sin(x^2) dx, n = 10.$$

- Pour chacune des intégrales suivantes, déterminer une borne d'erreur de l'approximation calculée avec la méthode et le nombre (n) de sous-intervalles demandés.

$$a) \int_1^3 \frac{1}{x} dx, \text{ trapèze}, n = 10; \quad b) \int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx, \text{ trapèze}, n = 10;$$

$$c) \int_{-1}^2 \frac{1}{3+x} dx, \text{ Simpson}, n = 210; \quad d) \int_1^4 x \ln x dx, \text{ Simpson}, n = 20.$$

Chapitre 4

Transformations et séries trigonométriques de Fourier

4.1 Rappels sur le calcul intégral

4.1.1 Critères d'intégrabilité

Par définition, une fonction définie presque partout sur $]a, b[\subset \mathbb{R}$ (intervalle non nécessairement borné) est intégrable en a^+ s'il existe un réel $a' \in]a, b[$ tel que f soit intégrable sur $]a, a'[$. De même, f est intégrable en b^- s'il existe un réel $b' \in]a, b[$ tel que f soit intégrable sur $]b', b[$. De la sorte, lorsque f est continu sur $]a, b[$, son intégrabilité sur $]a, b[$ est équivalente à son intégrabilité en a^+ et en b^- .

Citons tout d'abord deux cas très utiles où il est aisé de vérifier l'intégrabilité d'une fonction continue f sur $]a, b[$:

- (i) si F est intégrable sur $]a, b[$ et si $|f| \leq F$ presque partout sur $]a, b[$ alors f est intégrable sur $]a, b[$;
- (ii) si a est réel et si f admet une limite finie en a^+ , alors f est intégrable en a^+ ; de même en b^- .

De même, on obtient aisément le résultat suivant:

- (iii) si f est une fonction mesurable, réelle et de signe constant sur $]a, b[$ et si elle est intégrable sur tout intervalle du type $]a', b[$ ($a' \in]a, b[$)¹, alors f est intégrable sur $]a, b[$ si et seulement si il existe une suite décroissante a_m ($m \in \mathbb{N}$) de l'intervalle $]a, b[$ telle $a_m \rightarrow a^+$ et telle que la suite $\int_{a_m}^b f(x) dx$ ($m \in \mathbb{N}$) converge vers une limite finie. Analogie en b^- , avec une suite croissante b_m ($m \in \mathbb{N}$) de l'intervalle $]a, b[$, $b_m \rightarrow b^-$.

Les critères pratiques d'intégrabilité suivants sont basés sur le premier résultat (i) rappelé ci-dessus et sur l'intégrabilité de $x \mapsto \frac{1}{x^s}$ en 0^+ ou en $+\infty$.

Soit f une fonction continue sur $]a, b[$.

- Si $a \in \mathbb{R}$, alors f est intégrable en a^+ s'il existe $s < 1$ tel que

$$\lim_{x \rightarrow a^+} (x - a)^s |f(x)| \quad \text{existe et est fini.}$$

- Si $a = -\infty$, alors f est intégrable en $-\infty$ s'il existe $s > 1$ tel que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^s |f(x)| \quad \text{existe et est fini.}$$

- Si $b \in \mathbb{R}$, alors f est intégrable en b^- s'il existe $s < 1$ tel que

$$\lim_{x \rightarrow b^-} (b - x)^s |f(x)| \quad \text{existe et est fini.}$$

¹ce qui arrive notamment si f est continu sur l'intervalle $]a, b[$ et intégrable en b^-

²rappelons que cette fonction est intégrable en 0^+ si et seulement si $s < 1$ et est intégrable en $+\infty$ si et seulement si $s > 1$; ce résultat est aisément démontré en utilisant (iii)

- Si $b = +\infty$, alors f est intégrable en $+\infty$ s'il existe $s > 1$ tel que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^s |f(x)| \quad \text{existe et est fini.}$$

De même, on obtient des *critères de non-intégrabilité* sur $]a, b[$: si $f \in C_0(]a, b[)$, alors f n'est pas intégrable sur cet intervalle dans les cas suivants:

- $a \in \mathbb{R}$ et $\lim_{x \rightarrow a^+} (x - a)f(x)$ existe et diffère de 0
- $a = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} |x|f(x)$ existe et diffère de 0
- $b \in \mathbb{R}$ et $\lim_{x \rightarrow a^+} (b - x)f(x)$ existe et diffère de 0
- $b = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x)$ existe et diffère de 0

4.1.2 Changement de variables

Voir le fascicule du cours "Mathématiques générales, A"

4.1.3 Un calcul d'intégrale fléchée

Voir le fascicule du cours "Mathématiques générales, A"

4.2 La transformation de Fourier

La transformation de Fourier est une technique mathématique permettant de déterminer le spectre de fréquences d'un signal (par exemple un son). La définition mathématique de la transformée de Fourier d'une fonction intégrable f est la suivante :

$$\mathcal{F}_y f = \int_{\mathbb{R}} e^{-ity} f(t) dt, \quad y \in \mathbb{R}$$

(f est le signal d'entrée (fonction du temps), y la fréquence).

Le signal d'entrée peut être à valeurs réelles ou complexes. En revanche, la transformée de Fourier est un nombre complexe. Pour chaque fréquence y , le module de $\mathcal{F}_y f$ représente l'énergie associée à cette fréquence. La représentation de ce module en fonction de y constitue le spectre de fréquences du signal.

Le cadre le plus naturel pour définir les transformées de Fourier est celui des fonctions intégrables. Toutefois, de nombreuses opérations (dérivations, transformée de Fourier inverse) ne peuvent être écrites en toute généralité. On doit à Plancherel l'introduction de la transformation de Fourier pour les fonctions de carré intégrable, pour lesquelles la formule d'inversion est vraie. C'est en fait la théorie des distributions de Schwartz qui donne un cadre parfaitement adapté.

4.2.1 Transformation de Fourier des fonctions intégrables

Rappelons que l'ensemble des fonctions intégrables sur un sous-ensemble A de \mathbb{R} est noté

$$L^1(A).$$

Définition 4.2.1 Si f est intégrable dans \mathbb{R} , la transformée de Fourier (négative) de f est la fonction

$$\hat{f}(y) = \mathcal{F}_y^- f := \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} f(x) dx, \quad y \in \mathbb{R}.$$

On définit aussi la transformée positive

$$\mathcal{F}_y^+ f := \mathcal{F}_{-y}^- f = \int_{\mathbb{R}} e^{ixy} f(x) dx, \quad y \in \mathbb{R}.$$

On est fréquemment amené à préciser les notations comme suit (pour la bonne compréhension des développements des calculs)

$$\mathcal{F}_y^- f = \mathcal{F}_{x \rightarrow y}^- f(x) = \mathcal{F}_{t \rightarrow y}^- f(t), \dots$$

Il faut noter que certains auteurs utilisent $e^{\pm 2i\pi xy}$ ou aussi un facteur $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ devant l'intégrale; il est donc important de vérifier la définition utilisée car les formules associées s'expriment alors un peu différemment (voir suite).

Cette application transforme en fait une fonction intégrable en une fonction bornée, mais qui n'est pas toujours intégrable (voir exemples); ceci sera à comparer avec la transformée des fonctions de carré intégrable (voir suite). La transformée de Fourier d'une fonction intégrable jouit cependant d'autres propriétés remarquables; par exemple, on va voir que "la dérivation et la multiplication par une puissance" sont en quelque sorte des "opérations duales". Nous verrons que ces propriétés se traduisent aussi par des résultats analogues dans le cadre des séries trigonométriques de Fourier.

Exemple 4.2.2 *Si a est un réel strictement positif, alors*

$$\mathcal{F}_y^- \chi_{[-a,a]} = \begin{cases} 2a & \text{si } y = 0 \\ \frac{2 \sin(ay)}{y} & \text{si } y \neq 0 \end{cases}$$

et

$$\mathcal{F}_{x \rightarrow y}^- e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{y^2}{4a}}.$$

Remarquer que le deuxième exemple exprime que la transformée de Fourier d'une fonction gaussienne est encore une fonction gaussienne.

Enonçons à présent quelques propriétés fondamentales de la transformation de Fourier.

Proposition 4.2.3 - *La transformation de Fourier est une application linéaire.*

- *Si f est intégrable et si $a \in \mathbb{R}_0, b \in \mathbb{R}$, on a*

$$\mathcal{F}_{x \rightarrow y}^- \left(f(ax + b) \right) = \frac{1}{|a|} e^{i\frac{b}{a}y} \mathcal{F}_{y/a} f$$

- *Si $f \in C_1(\mathbb{R})$ et si f, Df sont intégrables, alors*

$$\mathcal{F}_y^- Df = iy \mathcal{F}_y^- f$$

- *Si f et $x \mapsto xf(x)$ sont intégrables, alors*

$$D \mathcal{F}_y^- f = -i \mathcal{F}_{x \rightarrow y}^- (xf(x))$$

Ces résultats s'étendent bien sûr au cas des dérivées multiples.

Signalons également que les propriétés précédentes se généralisent au cas des fonctions de carré intégrable et de leur transformée de Fourier.

Quant aux propriétés fonctionnelles fondamentales de la transformée de Fourier des fonctions intégrables, elles s'énoncent comme suit.

Théorème 4.2.4 *Si f est intégrable, alors sa transformée de Fourier $\mathcal{F}^- f$ est une fonction*

- *uniformément continue sur \mathbb{R} , c'est-à-dire telle que*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sup_{y \in \mathbb{R}} |\mathcal{F}_{y+h}^- f - \mathcal{F}_y^- f| = 0$$

- bornée, c'est-à-dire qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\sup_{y \in \mathbb{R}} |\mathcal{F}_y^- f| \leq C$$

- qui tend vers 0 à l'infini, c'est-à-dire

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \mathcal{F}_y^- f = 0$$

Pour terminer cette introduction à la transformation de Fourier, énonçons deux résultats fondamentaux (théorème de transfert et théorème de Fourier) qu'il sera utile aussi de comparer avec les résultats analogues dans le cas des fonctions de carré intégrable.

Théorème 4.2.5 (Transfert) *Si f et g sont des fonctions intégrables, alors*

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}_y^\pm f g(y) dy = \int_{\mathbb{R}} f(y) \mathcal{F}_y^\pm g dy$$

Théorème 4.2.6 (Théorème de Fourier) *Si f est intégrable et si sa transformée de Fourier est intégrable, alors*

$$\mathcal{F}_y^\pm (\mathcal{F}^\mp f) = 2\pi f(y)$$

pour presque tout y et pour tout y de chaque intervalle où f est continu.

4.2.2 Transformation de Fourier des fonctions de carré intégrable

Si A est une partie (mesurable) de \mathbb{R} , l'ensemble des fonctions (mesurables) de carré intégrable sur A est noté

$$L^2(A).$$

On sait que le produit de deux fonctions intégrables n'est pas nécessairement intégrable; on a cependant le résultat fort intéressant suivant quant aux fonctions de carré intégrable: *si f, g sont de carré intégrable, alors leur produit est une fonction intégrable.* (Cela se justifie directement par l'inégalité $2|fg| \leq |f|^2 + |g|^2$).

Remarquons (voir exemples) que les espaces $L^1(A)$ et $L^2(A)$ diffèrent. Cependant, comme on a $|f| \leq \frac{|f|^2+1}{2}$, on obtient l'inclusion $L^2(A) \subset L^1(A)$ lorsque A est un ensemble borné.

Sans entrer dans les détails, donnons quelques propriétés fondamentales de cet espace. Il se révèle en effet être de toute première importance dans le domaine des sciences (et particulièrement dans celui de l'analyse des signaux). On peut en effet qualifier cet espace "d'espace de la physique" car sa structure d'espace de Hilbert (voir ci-dessous) en fait un outil privilégié pour la modélisation de nombreux phénomènes.

L'espace $L^2(A)$ est un espace vectoriel (complexe) dans lequel on définit de façon naturelle l'application suivante, appelée *produit scalaire* et qui jouit des propriétés analogues au produit scalaire connu entre vecteurs

$$\langle f, g \rangle = \int_A f(x) \overline{g(x)} dx, \quad f, g \in L^2(A).$$

On pose également

$$\|f\| = \sqrt{\int_A |f(x)|^2 dx}, \quad f \in L^2(A).$$

On démontre alors *l'inégalité de Schwarz*

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \|g\|, \quad f, g \in L^2(A).$$

L'application $\|\cdot\|$ est appelée *norme* sur $L^2(A)$ en raison des propriétés qu'elle possède et qui sont les mêmes que celles de la norme des vecteurs "géométriques":

$$\|cf\| = |c| \|f\|, \quad \|f\| = 0 \text{ si et seulement si } f = 0, \quad \|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$$

quels que soient $f, g \in L^2(A)$ et $c \in \mathbb{C}$.

Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire s'appelle un espace *pré-hilbertien*. Lorsque les suites de Cauchy de cet espace convergent (pour la norme définie à partir du produit scalaire), on dit que l'on a affaire à *un espace de Hilbert*. En fait, les espaces de Hilbert peuvent être considérés comme la généralisation naturelle en dimension infinie de l'espace des vecteurs (cf cours A par exemple et l'introduction aux espaces vectoriels de dimension finie); on y définit des bases orthonormées, des projections orthogonales, ... La section consacrée aux séries trigonométriques de Fourier reviendra sur ces notions.

Faute de temps, il n'est pas question ici de donner les éléments et preuves mathématiques précis concernant les espaces $L^2(\mathbb{R})$ permettant une introduction complète et générale de la transformation de Fourier dans le cas des fonctions de carré intégrable. Nous nous contenterons d'une introduction et de résultats pratiques.

Le but est de donner une définition qui se rapproche du cas des fonctions intégrables, car celui-ci en constitue un cas particulier et est vraiment un cadre idéal pour les développements techniques, les preuves (vu les expressions explicites sous forme d'intégrales).

Définition 4.2.7 Soit f une fonction de $L^2(\mathbb{R})$. Pour $y \in \mathbb{R}$, on considère la limite

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{-m}^m e^{-ixy} f(x) dx.$$

Si cette limite existe pour presque tout y , on définit alors la fonction

$$y \mapsto F_y^- f = \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{-m}^m e^{-ixy} f(x) dx$$

et on appelle cette fonction la transformée de Fourier négative de f

Remarquons tout de suite que lorsque f est intégrable, on retrouve

$$F_y^- f = \mathcal{F}_y^- f.$$

Bien sûr, on adopte une définition analogue dans le cas des "transformées +".

Les propriétés relatives à la dérivation (cf transformation de Fourier dans L^1) sont conservées dans ce cadre. La propriété de transfert et le théorème de Fourier prennent ici la forme tout à fait générale suivante.

Théorème 4.2.8 (Théorème de Fourier) Si f est de carré intégrable alors sa transformée de Fourier dans L^2 est aussi de carré intégrable et on a

$$F_y^\pm (F^\mp f) = 2\pi f(y)$$

pour presque tout y .

Théorème 4.2.9 (Transfert) Si f et g sont des fonctions de carré intégrable, alors

$$\int_{\mathbb{R}} F_y^\pm f g(y) dy = \int_{\mathbb{R}} f(y) F_y^\pm g dy$$

En particulier

$$\langle F^\pm f, F^\pm g \rangle = 2\pi \langle f, g \rangle, \quad \|F^\pm f\| = \sqrt{2\pi} \|f\|.$$

En guise de premiers exemples, on demande de calculer les transformées de Fourier des fonctions suivantes, en spécifiant s'il s'agit d'une transformée dans L^1 ou dans L^2 .

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$e^{-|x|}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

On demande aussi de calculer les intégrales suivantes

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{(4x^2 + 1)(x^2 + 9)} dx.$$

4.3 Les séries trigonométriques de Fourier

4.3.1 Définitions et propriétés de base

Le développement en série trigonométrique de Fourier consiste à développer une fonction³ de carré intégrable sur un intervalle borné $I =]a, b[$, c'est-à-dire un élément de l'espace $L^2(]a, b[)$, selon une base orthonormée de cet espace.

Nous utilisons les notations suivantes pour les fonctions trigonométriques (exponentielles)

$$e_m(x) = \frac{1}{\sqrt{b-a}} e^{\frac{2i\pi mx}{b-a}}, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Elles sont orthonormées pour le produit scalaire de $L^2(I)$

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Les coefficients de Fourier de $f \in L^2(I)$ relatifs à cette base sont les complexes

$$c_m = \langle f, e_m \rangle = \int_a^b f(x) \overline{e_m(x)} dx, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

On a les résultats suivants.

Théorème 4.3.1 (Développement en série trigonométrique de Fourier dans la base e_m ($m \in \mathbb{Z}$))

Si $f, g \in L^2(I)$, on a

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \int_a^b \left| f(x) - \sum_{m=-M}^M c_m e_m(x) \right|^2 dx = 0 \quad (\text{convergence en norme } L^2),$$

$$f(x) = \lim_{M \rightarrow +\infty} \sum_{m=-M}^M c_m e_m(x) \quad \text{pour presque tout } x \in I$$

et

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} \sum_{m=-M}^M c_m \overline{c'_m}$$

si les c_m (resp. c'_m) désignent les coefficients de Fourier de f (resp. g). \square

³mesurable

Etant donné une fonction $f \in L^2([a, b])$, on utilise souvent la notation suivante pour désigner les sommes partielles de sa série trigonométrique de Fourier

$$S_M(f, x) = \sum_{m=-M}^M \langle f, e_m \rangle e_m(x), \quad M \in \mathbb{N}.$$

Comme cas particulier de la dernière formule, on obtient

$$\|f\|^2 = \int_a^b |f(x)|^2 dx = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |c_m|^2.$$

En utilisant les fonctions sin et cos on en déduit le résultat ci-dessous.

Propriété 4.3.2 Si $f \in L^2(I)$ et si on utilise les notations

$$u_0(x) = \frac{1}{\sqrt{b-a}}, \quad u_m(x) = \sqrt{\frac{2}{b-a}} \cos\left(\frac{2\pi mx}{b-a}\right), \quad v_m(x) = \sqrt{\frac{2}{b-a}} \sin\left(\frac{2\pi mx}{b-a}\right)$$

alors les fonctions u_0, u_m, v_m ($m \in \mathbb{N}_0$) forment une base orthonormée de $L^2(I)$ et, avec $r_m = \langle f, u_m \rangle$, $s_m = \langle f, v_m \rangle$, on a

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \int_a^b \left| f(x) - r_0 u_0(x) - \sum_{m=1}^M \left(r_m u_m(x) + s_m v_m(x) \right) \right|^2 = 0$$

$$f(x) = r_0 u_0(x) + \lim_{M \rightarrow +\infty} \sum_{m=1}^M \left(r_m u_m(x) + s_m v_m(x) \right) \quad \text{pour presque tout } x \in I$$

et

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx = r_0 r'_0 + \lim_{M \rightarrow +\infty} \sum_{m=1}^M (r_m \overline{r'_m} + s_m \overline{s'_m})$$

si les r'_m, s'_m désignent les coefficients de Fourier de g relatifs aux fonctions cosinus et sinus. \square

Comme dans le cas des exponentielles, on définit aussi les sommes partielles associées à la série.

La convergence des séries de Fourier est une convergence en norme L^2 , donc une convergence d'intégrales et pas une convergence en tout point du domaine de définition (de manière imagée, c'est "une convergence d'aires" et pas une convergence de suites numériques). Dans de nombreuses situations pratiques, il est cependant possible de préciser ces notions de convergence et aussi de connaître la relation qui existe entre les valeurs de f et la somme de la série de Fourier. Ainsi, des compléments aux résultats précédents peuvent être énoncés.

4.3.2 Propriétés relatives à la convergence

Examinons des résultats "optimistes", en ce sens qu'ils fournissent des réponses précises et complémentaires en ce qui concerne la convergence dans plusieurs cas usuels.

Propriété 4.3.3 (Convergence ponctuelle) (i) Si f est continu sur $[a, b]$ et si la série de ses coefficients de Fourier c_m (resp. r_m, s_m) est absolument convergente, alors

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m e_m(x) \quad \forall x \in [a, b] \quad (\text{resp. } f(x) = r_0 u_0(x) + \sum_{m=1}^{+\infty} (r_m u_m(x) + s_m v_m(x)) \quad \forall x \in [a, b])$$

(ii) Si f est continu sur $]a, b[$, de carré intégrable sur $]a, b[$ et si la série de ses coefficients de Fourier c_m (resp. r_m, s_m) est absolument convergente, alors

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m e_m(x) \quad \forall x \in]a, b[\quad (\text{resp. } f(x) = r_0 u_0(x) + \sum_{m=1}^{+\infty} (r_m u_m(x) + s_m v_m(x)) \quad \forall x \in]a, b[)$$

(iii) Il existe d'autres résultats ne faisant intervenir que la semi-convergence des séries (notamment dans le cas des séries alternées).

Propriété 4.3.4 (Convergence ponctuelle) Si f est une fonction bornée et monotone⁴ sur $]a, b[$ alors elle est intégrable, de carré intégrable sur $]a, b[$ et on a

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} S_M(x) = \begin{cases} \frac{f(x+) + f(x-)}{2}, & \forall x \in]a, b[\\ \frac{f(a+) + f(b-)}{2}, & x \in \{a, b\} \end{cases}$$

avec

$$S_M(x) = r_0 u_0(x) + \sum_{m=1}^M (r_m u_m(x) + s_m v_m(x)), \quad M \in \mathbb{N}_0$$

et

$$f(r+) = \lim_{t \rightarrow r, t > r} f(t), \quad f(r-) = \lim_{t \rightarrow r, t < r} f(t).$$

□

4.3.3 Le phénomène de Gibbs

Gibbs.. En bref...

Au niveau d'un point de discontinuité de f , S_n subit une forte oscillation, une sorte de "sursaut". Les images laissent soupçonner et le calcul montre effectivement que l'amplitude de ce sursaut tend vers une constante. Précisément si la fonction a une discontinuité d'amplitude Δy , alors S_n , tout en restant continue, connaîtra un "saut" en ordonnée valant de l'ordre de 18% de plus.

Voici une illustration du phénomène de Gibbs.

On part de l'exemple du développement de $f(x) = x$ en série trigonométrique de Fourier dans $L^1([0, 1])$, à savoir

$$x = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\sin(2\pi m x)}{m}.$$

On pose

$$S_M(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^M \frac{\sin(2\pi m x)}{m}, \quad M \in \mathbb{N}_0.$$

Vu ce qui précède, on a

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \int_0^1 |S_M(x) - x|^2 dx = 0 \quad (\text{convergence dans } L^2([0, 1]))$$

⁴ou combinaison linéaire de telles fonctions; il est aussi possible d'utiliser d'autres hypothèses-cf cours pour une première approche

et

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} S_M(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\sin(2\pi mx)}{m} = x \quad \forall x \in]0, 1[$$

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} S_M(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\sin(2\pi mx)}{m} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{pour } x=0, x=1.$$

Voici quelques représentations: f et S_2 , f périodisée et S_2 , f et S_{10} , f et S_{64} .

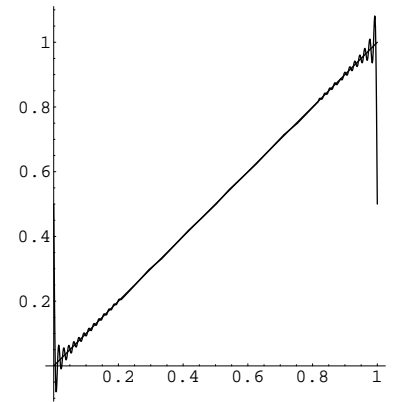
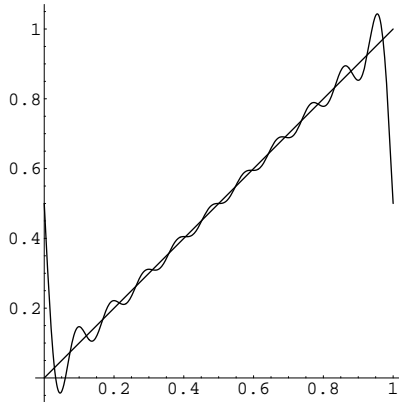
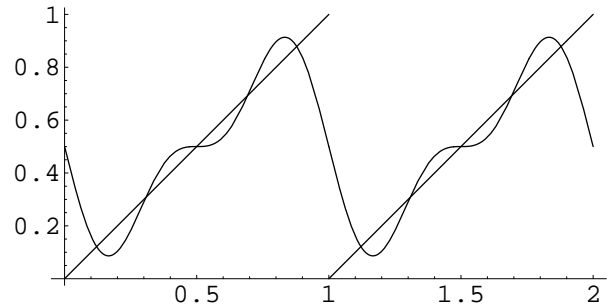
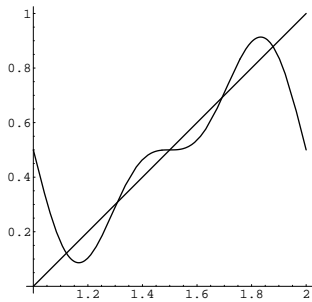


Illustration du phénomène de Gibbs à partir de cet exemple (résumé)

Le phénomène de Gibbs décrit le comportement des sommes partielles S_M au voisinage des points de discontinuité (de la fonction f périodisée). Ici, les points considérés sont donc 0 et 1.

On a

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} S_M \left(1 - \frac{1}{2M} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx$$

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} S_M \left(\frac{1}{2M} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx.$$

Démontrons par exemple la première égalité. L'autre cas se traite exactement de la même manière. On a successivement

$$S_M \left(1 - \frac{1}{2M} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^M \frac{\sin(\pi m/M)}{m}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^M \frac{1}{M} \frac{\sin(\pi m/M)}{m/M}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^M \frac{1}{M} F(x_m) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^M (x_m - x_{m-1}) F(x_m) \\
&\rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^1 F(x) dx \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{x} dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx
\end{aligned}$$

en utilisant la définition de l'intégrale (de Riemann) pour le prolongement continu sur $[0, 1]$ de $F(x) = \frac{\sin(\pi x)}{x}$ et le découpage $x_m = \frac{m}{M}$, $m = 0, \dots, M$ de $[0, 1]$.

En utilisant des inégalités et approximations de séries, on démontre alors que

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx \geq 1 + \delta$$

avec $0,17 = \delta > 0$. Il s'ensuit l'explication du "saut" quand on s'approche des points de discontinuité:

$$S_M \left(1 - \frac{1}{2M}\right) \rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\delta}{2} = 1 + \frac{\delta}{2}.$$

Ici, démontrons simplement l'existence de $\delta > 0$, sans préciser sa valeur. Le but est donc de prouver que

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx > \frac{\pi}{2}.$$

Or, on sait que

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx + \int_\pi^{3\pi} \frac{\sin x}{x} dx + \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{3\pi}^{m\pi} \frac{\sin x}{x} dx$$

donc

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} - \int_\pi^{3\pi} \frac{\sin x}{x} dx - \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{3\pi}^{m\pi} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Pour conclure, il suffit donc de prouver que

$$(a) \int_\pi^{3\pi} \frac{\sin x}{x} dx < 0 \quad \text{et} \quad (b) \int_{3\pi}^{m\pi} \frac{\sin x}{x} dx \leq 0 \quad \forall m \geq 3.$$

On a (a) car

$$\begin{aligned}
\int_\pi^{3\pi} \frac{\sin x}{x} dx &= \int_\pi^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx + \int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin x}{x} dx \\
&= \int_{2\pi}^{3\pi} \sin x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x - \pi} \right) dx \\
&< 0.
\end{aligned}$$

Démontrons (b).

Si $m = 5$, on a

$$\int_{3\pi}^{5\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \int_{3\pi}^{4\pi} \frac{\sin x}{x} dx + \int_{4\pi}^{5\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \int_{4\pi}^{5\pi} \sin x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x - \pi} \right) dx < 0$$

et, en groupant de la même manière les termes deux par deux, on obtient aussi (b) pour tous les naturels impairs $m \geq 3$.

Si $m = 4$ on a directement $\int_{3\pi}^{4\pi} \frac{\sin x}{x} dx < 0$. Si $m = 6$, alors

$$\int_{3\pi}^{6\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \int_{3\pi}^{5\pi} \frac{\sin x}{x} dx + \int_{5\pi}^{6\pi} \frac{\sin x}{x} dx$$

qui est la somme de deux nombres négatifs, donc est négatif. On procède de même pour les autres nombres pairs: on a

$$\int_{3\pi}^{m\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \int_{3\pi}^{(m-1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx + \int_{(m-1)\pi}^{m\pi} \frac{\sin x}{x} dx,$$

ce qui est en fait la somme de deux nombres négatifs (le premier correspond au cas "impair puisque m est pair et le second est négatif puisque \sin est négatif sur l'intervalle $[(m-1)\pi, m\pi]$).

4.3.4 Le théorème de Shannon

Le théorème d'échantillonnage de Shannon est un résultat fondamental de la théorie du signal. Il exprime qu'un signal limité en fréquence est entièrement déterminé à partir d'un échantillonnage de ce signal correspondant à deux échantillons par période (dans le langage de l'analyse du signal: échantillonnage deux fois par cycle de la plus haute fréquence). (Dans les notations ci-dessous: période $T = \frac{2\pi}{\nu}$; pas d'échantillonnage $= \frac{\pi}{\nu} = \frac{T}{2}$: la fonction est évaluée "deux fois" par période.)

Ce théorème peut aussi être démontré en utilisant la théorie des distributions (ici les distributions de Dirac). Cette preuve fait ressortir davantage les aspects de la théorie du signal mais nous ne la présentons pas ici car l'acquis mathématique n'est pas suffisant à ce stade.

Théorème 4.3.5 (Théorème d'échantillonnage de Shannon) *Soit ν un réel strictement positif. Si f est une fonction définie sur \mathbb{R} , continue sur \mathbb{R} , appartenant à $L^2(\mathbb{R})$ et dont le support de la transformée de Fourier (négative) est inclus dans $[-\nu, \nu]$, alors, dans $L^2(\mathbb{R})$, on a*

$$f(x) = \lim_{M \rightarrow +\infty} \sum_{m=-M}^M f\left(\frac{m\pi}{\nu}\right) \frac{\sin(\nu x - m\pi)}{\nu x - m\pi}$$

Preuve. Le développement en série trigonométrique de Fourier de \hat{f} dans $L^2([-\nu, \nu])$ donne

$$\begin{aligned} \hat{f}(y) &= \frac{1}{2\nu} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\nu}^{\nu} \hat{f}(u) e^{im\pi u/\nu} du \right) e^{-im\pi y/\nu} \\ &= \frac{1}{2\nu} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left(\mathcal{F}_{\frac{m\pi}{\nu}}^+ \hat{f} \right) e^{-im\pi y/\nu} \\ &= \frac{\pi}{\nu} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{m\pi}{\nu}\right) e^{-im\pi y/\nu}. \end{aligned}$$

En prenant la transformée de Fourier des deux membres⁵ et en tenant compte du fait que

$$\int_{-\nu}^{\nu} e^{ixy} e^{-im\pi y/\nu} dy = 2 \frac{\sin(\nu x - m\pi)}{x - m\pi/\nu}$$

on obtient

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{m\pi}{\nu}\right) \frac{\sin(\nu x - m\pi)}{\nu x - m\pi}.$$

⁵l'intégrale se fait uniquement sur $[-\nu, \nu]$ étant donné la propriété de support

□

Remarques

En étudiant plus précisément la convergence des séries obtenues, on peut directement obtenir des résultats de convergence autres que ceux en norme L^2 et presque partout.

Ainsi, les séries du type

$$\sum_{m=0}^{+\infty} a_m \cos(mx), \quad \sum_{m=1}^{+\infty} b_m \sin(mx)$$

définissent des fonctions 2π -périodiques sur \mathbb{R} et continues sur $]0, 2\pi[$ pour autant que la suite a_m ($m \in \mathbb{N}$) (resp. b_m ($m \in \mathbb{N}_0$)) soit une suite de réels décroissante qui converge vers⁶ 0.

Si cette série est le développement d'une fonction régulière⁷, on peut aussi immédiatement obtenir des estimations des coefficients du type $\sup_m |a_m| m^r \leq R$ (resp. $\sup_m |b_m| m^r \leq R$).

4.3.5 Autres bases orthonormées

Dans de nombreuses situations liées à la résolution d'équations différentielles (par exemple), on est amené à introduire d'autres fonctions (formant des bases orthonormées) particulièrement utiles.

Les polynômes de Legendre

Les polynômes

$$P_0(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad P_m(x) = \frac{\sqrt{m+1/2}}{2^m m!} D^m (x^2 - 1)^m, \quad m \in \mathbb{N}_0$$

sont appelés *polynômes de Legendre*; ils forment une base orthonormée de $L^2([-1, 1])$.

Les fonctions de Laguerre

Les fonctions

$$L_0(x) = e^{-x/2}, \quad L_m(x) = \frac{1}{m!} e^{x/2} D^m (x^m e^{-x}), \quad m \in \mathbb{N}_0$$

sont appelés *fonctions de Laguerre*; elles forment une base orthonormée de $L^2([0, +\infty[)$.

Les fonctions de Hermite

Les fonctions

$$H_0(x) = \pi^{-1/4} e^{-x^2}, \quad H_m(x) = \frac{1}{\pi^{1/4} \sqrt{2^m m!}} e^{x^2/2} D^m e^{-x^2}, \quad m \in \mathbb{N}_0$$

sont appelés *fonctions de Hermite*; elles forment une base orthonormée de $L^2(-\infty, +\infty[)$.

⁶cela résulte du fait que sous cette hypothèse, la convergence de la série est uniforme dans tout compact du complémentaire des multiples entiers de 2π

⁷c'est-à-dire avec des propriétés de dérivabilité sur \mathbb{R}

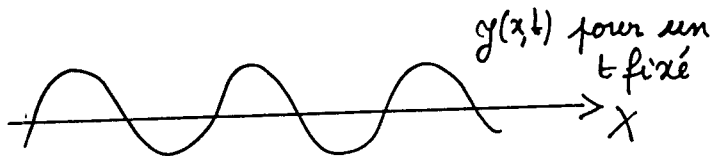
Application de la transformation de Fourier à la résolution d'une équation aux dérivées partielles

Dans ce qui suit, on suppose que l'on a de bonnes propriétés d'intégrabilité sur les fonctions pour que toutes les transformées de Fourier aient un sens.

L'équation des cordes vibrantes (équation des ondes) est l'équation aux dérivées partielles

$$\boxed{D_x^2 y(x,t) = \frac{1}{v^2} D_t^2 y(x,t)} \quad (*)$$

où v est la vitesse de prop. de l'onde le long de x ,
 où $y(x,t)$ est l'amplitude de l'onde en fonction de la position x et du temps t



Supposons avoir une solution $y(x,t)$ vérifiant les conditions initiales

$$\boxed{y(x,0) = f(x)} \text{ (fonction initiale)}, x \in \mathbb{R} \text{ et } \boxed{D_t y(x,0) = F(x)} \text{ vitesse initiale}, x \in \mathbb{R}$$

En prenant la transformée de Fourier positive des deux membres de (*) pour tout t fixé, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} e^{ixu} D_x^2 y(x,t) dx = \frac{1}{v^2} \int_{\mathbb{R}} e^{ixu} D_t^2 y(x,t) dx.$$

On démontre que $\int_{\mathbb{R}} e^{ixu} D_t^2 y(x,t) dx = D_t^2 \int_{\mathbb{R}} e^{ixu} y(x,t) dx.$

On a aussi

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} e^{ixu} D_x^2 y(x,t) dx &= \left[e^{ixu} D_x y(x,t) \right]_{x \rightarrow -\infty}^{x \rightarrow +\infty} - iu \int_{\mathbb{R}} e^{ixu} D_x y(x,t) dx \\ &= -iu \int_{\mathbb{R}} e^{ixu} D_x y(x,t) dx \\ &= -iu \left(\left[e^{ixu} y(x,t) \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} iu e^{ixu} y(x,t) dx \right) \\ &= -u^2 \int_{\mathbb{R}} e^{ixu} y(x,t) dx \end{aligned}$$

0 car intégrabilité par hyp.

0 car int. par hyp.

Posons $Y(u, t) = \int_{\mathbb{R}} e^{ixu} y(x, t) dx$.

Remarquons que, pour t fixé, c'est la transf. de Fourier positive prise en u de la fonction (de x) $y(x, t)$.

Avec cette notation, en utilisant les résultats précédents, on trouve

$$\boxed{-u^2 Y(u, t) = \frac{1}{v^2} D_t^2 Y(u, t)}$$

Cela signifie donc que, $\forall u$, la fonction (de t) $Y(u, t)$ vérifie l'équation différentielle linéaire à coefficients constants homogène d'ordre 2

$$D_t^2 g(t) + v^2 u^2 g(t) = 0.$$

La solution générale de cette équation est

$$g(t) = c_1 e^{iuvt} + c_2 e^{-iuvt}$$

c_1, c_2 constantes par rapport à t .

dorsqu'on fixe deux conditions initiales, $g_0(t_0)$ et $D_t g_0(t_0)$, on trouve des valeurs con. pour c_1, c_2 .

Revenons à notre cas: on sait donc que

$$Y(u, t) = c_1(u) e^{iuvt} + c_2(u) e^{-iuvt}$$

En utilisant les deux conditions initiales, on obtient

$$Y(u, 0) = \int_{\mathbb{R}} e^{ixu} y(x, 0) dx = \int_{\mathbb{R}} e^{ixu} f(x) dx = f \text{ connue}$$

$$(D_t Y)(u, 0) = \left(D_t \int_{\mathbb{R}} e^{ixu} y(x, t) dx \right)_{t=0} = \int_{\mathbb{R}} e^{ixu} (D_t y)(x, 0) dx = \int_{\mathbb{R}} e^{ixu} F(x) dx = f' \text{ connue}$$

Dès lors, on détermine $c_1(u)$ et $c_2(u)$ à partir des conditions initiales.

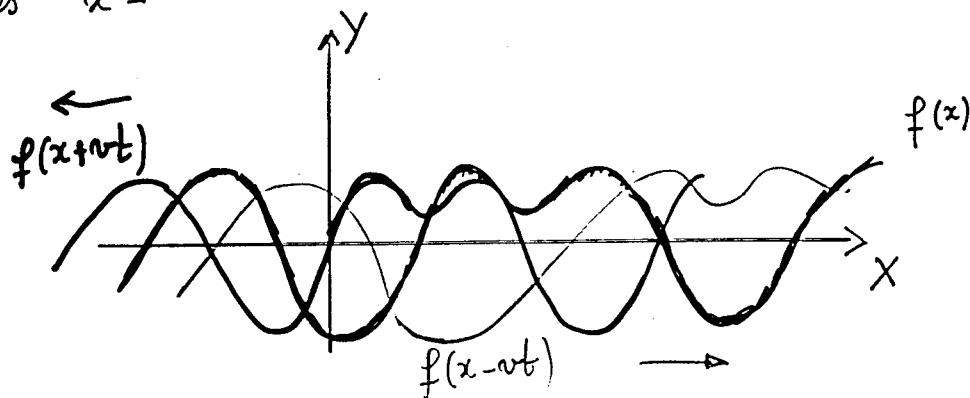
Finalement, à partir de $2\pi y(x, t) = \int_x^- \int_u^+ y = \int_x^- Y$, on a

$$\begin{aligned} 2\pi y(x, t) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-ixu} Y(u, t) du = \int_{\mathbb{R}} \left(c_1(u) e^{-iux} e^{iuvt} + c_2(u) e^{-iux} e^{-iuvt} \right) du \\ &= \int_{\mathbb{R}} c_1(u) e^{-iu(x-vt)} du + \int_{\mathbb{R}} c_2(u) e^{-iu(x+vt)} du \\ &= \text{fonction de } x-vt \quad - \quad \text{fonction de } x+vt \end{aligned}$$

Au total, une fonction $y(x, t)$ solution de l'éq. $\mathcal{D}_x^2 y(x, t) = \frac{1}{v^2} \mathcal{D}_t^2 y(x, t)$ est donc la somme de multiples de fonctions du type

$$f_0(x - vt) \quad \text{et} \quad f_0(x + vt)$$

c'est la somme de deux "vagues" qui vont dans le sens des "x+" et des "x-"



Remarques. Il est possible d'obtenir ce résultat par d'autres méthodes.

- Il existe des résultats théoriques assurant l'existence et l'unicité des solutions de problèmes de type présenté ici.

7. Séries trigonométriques de Fourier (une intro) B4.

INTRODUCTION

Dans de nombreux exemples pratiques (en sciences, en économie, ...), qd on veut modéliser et traiter un phénomène où intervient une certaine fonction f , on est obligé de travailler avec des approximations de f . Cela a pour but de rendre les calculs réalisables (car f est trop compliqué, très souvent); plusieurs types d'approx. sont gouvernées par des résultats théoriques précis qui autorisent le fait que le résultat analysé après traitement du problème soit considéré comme étant bon le reflet de la réalité.

Nous avons déjà rencontré les approximations polynomiales (on approche une fonction suffisamment dérivable par des polynômes). Sous forme exacte, les fonctions sont développées en série de puissances, et non seulement approchées par des polynômes.

Une autre forme habituelle d'approximation est celle des sommes partielles trigonométriques de Fourier. Sous forme exacte, les fonctions sont développées en séries trigonométriques, et non plus seulement approchées par des sommes partielles trigonométriques.

Un avantage des séries (et sommes) trigon. de Fourier est le fait qu'on peut les utiliser même quand la fonction n'est pas dérivable. Cependant, des phénomènes spéciaux peuvent apparaître (phénomène de Gibbs), même dans des cas très simples.

De plus, les séries trigonométriques de Fourier apparaissent comme étant des exemples privilégiés de développement d'une fonction (vecteur) dans une base orthonormée. Seulement ici, contrairement à l'espace et aux vecteurs habituels, il s'agit d'espaces de dimension infinie. La présentation générale de cette théorie serait trop longue à développer ici. Nous ne verrons donc que les résultats les plus utiles et qui se fient le mieux à cette introduction.

Une chose importante aussi à souligner dans le cadre des dev. en série de Fourier est le fait que l'on se place dans un cadre périodique.

C'est d'ailleurs* dans le cadre des "ondes" que sont historiquement apparues ces séries trigonométriques (si l'on excepte les Babyloniens qui utilisaient une forme primitive des séries trig. pour prévoir les événements célestes). Dès la seconde moitié du 18^e siècle, d'Alembert et Euler se sont penchés sur le problème de savoir comment on pouvait écrire explicitement (de façon "simple") le déplacement $u = u(t, x)$ d'une corde de violon qui elle oscille. L'éq. à résoudre est l'éq. des ondes (avec conditions au bord); si on modélise le plus simplement possible:

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u &= \partial_x^2 u, \quad t > 0, \quad x \in]0, 1[\quad \text{et} \quad u(t, 0) = u(t, 1) = 0 \quad t \geq 0 \\ \partial_t u(0, x) &= \text{donnée} \quad x \in [0, 1] \\ u(0, x) &= \text{donnée} \quad x \in [0, 1] \end{aligned}$$

La sol. qu'ils proposaient était du type série trig. de sinus (suite à 99 raisonnements). Nous allons y revenir.

* Réf: Fourier Series & Integrals, Dym, McKean, Ac. Press, 1972

Chapitre 5

Compléments à l'étude des fonctions de plusieurs variables

5.1 Le théorème des accroissements finis et le développement limité de Taylor

5.1.1 Résultats dans \mathbb{R}

Rappelons que pour une fonction réelle d'une variable réelle, le théorème des accroissements finis (TAF) et développement limité de Taylor s'énoncent comme suit.

Théorème 5.1.1 1) (TAF) Soit f une fonction dérivable dans $I =]a, b[$ et soit $x_0 \in]a, b[$. Pour tout $x \in I$, il existe u compris entre x_0 et x tel que

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)Df(u).$$

2) (Développement limité de Taylor) Soient $I =]a, b[$, f une fonction p fois dérivable dans I et $x_0 \in I$. Pour tout $x \in I$ il existe u compris entre x_0 et x tel que

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)Df(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^{p-1}}{(p-1)!}D^{p-1}f(x_0) + \frac{(x - x_0)^p}{p!}D^p f(u).$$

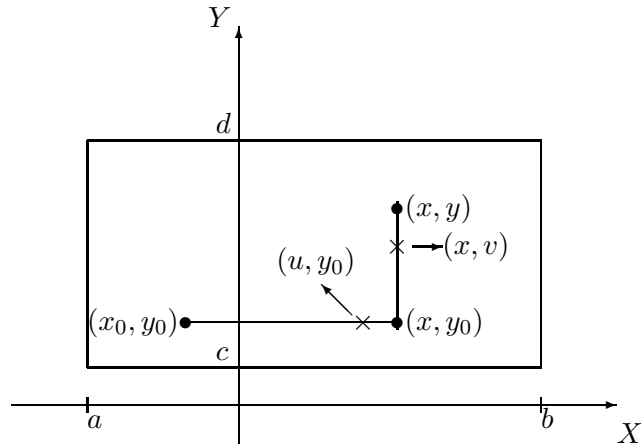
Ces résultats se généralisent aisément au cas de plusieurs variables réelles. Prenons le cas de deux variables; pour plus de deux variables, on procède exactement de manière analogue.

On se contentera aussi d'énoncer les résultats dans le cas de rectangle $]a, b[\times]c, d[$ (on pose $I =]a, b[$ et $J =]c, d[$). Ces résultats s'étendent facilement au cas d'ouverts plus généraux. Il faudra simplement veiller à travailler localement, de façon à ce que les segments joignant les différents points considérés restent inclus dans l'ensemble où la fonction est régulière.

5.1.2 TAF

Théorème 5.1.2 (TAF) Soit f une fonction dérivable dans $I \times J$ et soient $x_0 \in I, y_0 \in J$. Pour tous $x \in I, y \in J$, il existe u compris entre x_0 et x et v compris entre y_0 et y tels que

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + (x - x_0)D_1f(u, y_0) + (y - y_0)D_2f(x, v).$$



Preuve. Ce résultat résulte simplement de l'application du TAF dans \mathbb{R} à deux reprises. En effet, on a

$$f(x, y) = f(x, y) - f(x, y_0) + f(x, y_0) - f(x_0, y_0) + f(x_0, y_0);$$

de plus, il existe u compris entre x et x_0 , v compris entre y et y_0 tels que

$$f(x, y_0) - f(x_0, y_0) = (x - x_0)D_1f(u, y_0), \quad f(x, y) - f(x, y_0) = (y - y_0)D_2f(x, v).$$

Dès lors

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + (x - x_0)D_1f(u, y_0) + (y - y_0)D_2f(x, v).$$

□

A une variable, on sait (cf Chapitre 2 du cours *Mathématiques générales A*) qu'une fonction dérivable est toujours continue. A plusieurs variables, des exemples montrent que ce résultat n'est plus vrai. Cependant, si f est dérivable et si ses dérivées partielles sont continues, alors f est continu dans U ; ce résultat est une conséquence du théorème des accroissements finis.

Corollaire 5.1.3 *Si f est dérivable dans un ouvert U de \mathbb{R}^2 et si ses dérivées partielles sont continues dans U alors f est continu dans U .*

Preuve. Fixons $(x_0, y_0) \in U$. Si (x, y) est voisin de (x_0, y_0) , par le théorème des accroissements finis, il existe des réels u et v respectivement compris entre x et x_0 , y et y_0 tels que

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + (x - x_0)D_1f(u, y_0) + (y - y_0)D_2f(x, v).$$

Vu la continuité des dérivées partielles de f , on obtient

$$\lim_{x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0} D_1f(u, y_0) = D_1f(x_0, y_0), \quad \lim_{x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0} D_2f(x, v) = D_2f(x_0, y_0)$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

□

Il s'ensuit que l'ensemble $C_p(U)$ est en fait l'ensemble des fonctions dont toutes les dérivées partielles jusqu'à l'ordre p existent dans U et dont les dérivées d'ordre p sont continues dans U .

Signalons sans démonstration un résultat très important de la théorie des fonctions de plusieurs variables (nous l'énonçons dans le cas de deux variables mais il se généralise bien sûr de façon naturelle au cas de plus de deux variables).

Théorème 5.1.4 *Si f est une fonction définie sur un ouvert U de \mathbb{R}^2 et si les dérivées D_1f , D_2f , D_2D_1f existent et si D_2D_1f est continu dans U , alors D_1D_2f existe et est égal à D_2D_1f dans U .*

En particulier, si f appartient à $C_2(U)$, alors $D_1D_2f = D_2D_1f$ dans U .

5.1.3 Développement limité de Taylor

Théorème 5.1.5 (*Développement limité de Taylor*) Soient $(x_0, y_0), (x, y) \in I \times J$.

Si $f \in C_1(I \times J)$, il existe $t_0 \in]0, 1[$ tel que

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + (x - x_0)D_1f(u_0, v_0) + (y - y_0)D_2f(u_0, v_0)$$

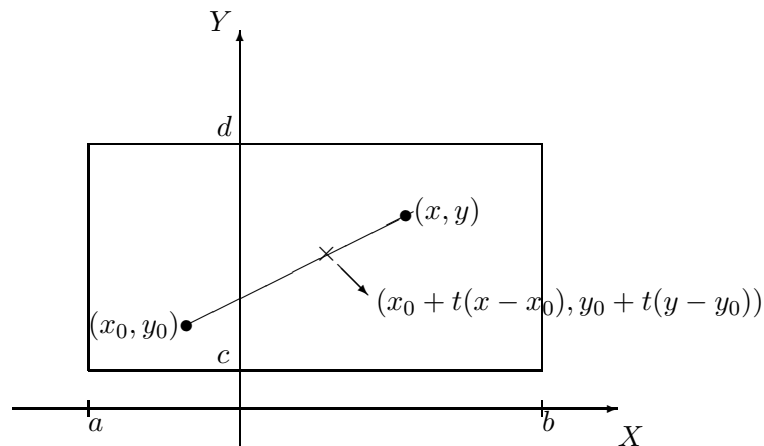
où on a posé $u_0 = x_0 + t_0(x - x_0)$, $v_0 = y_0 + t_0(y - y_0)$.

Si $f \in C_2(I \times J)$, il existe $t_0 \in]0, 1[$ tel que

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_0, y_0) + (x - x_0)D_1f(x_0, y_0) + (y - y_0)D_2f(x_0, y_0) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left((x - x_0)^2 D_1^2 f(u_0, v_0) + 2(x - x_0)(y - y_0) D_1 D_2 f(u_0, v_0) + (y - y_0)^2 D_2^2 f(u_0, v_0) \right) \end{aligned}$$

où on a posé $u_0 = x_0 + t_0(x - x_0)$, $v_0 = y_0 + t_0(y - y_0)$.

Le résultat se généralise au cas de $f \in C_p(I \times J)$; la formule est assez longue mais est la généralisation naturelle des précédentes.



Les points du segment de droite joignant les points de coordonnées (x_0, y_0) et (x, y) ont pour coordonnées $(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0))$, $t \in [0, 1]$.

Preuve. Considérons le cas $p = 2$. Définissons la fonction

$$F(t) = f(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0)).$$

Cette fonction est définie et deux fois continûment dérivable dans un intervalle du type $]-\delta, 1 + \delta[$ où δ est un réel strictement positif.¹ Cela signifie que l'on considère la fonction de deux variables en des points d'un segment un peu plus long que celui joignant les points (x_0, y_0) et (x, y) . Pour alléger les notations, posons

$$f_1(t) = x_0 + t(x - x_0), \quad f_2(t) = y_0 + t(y - y_0).$$

Une application du développement de Taylor à la fonction F à l'ordre 2 dans cet intervalle de \mathbb{R} fournit alors $t_0 \in [0, 1]$ tel que

$$F(1) = F(0) + DF(0) + \frac{1}{2} D^2 F(t_0).$$

On a

$$DF(t) = (x - x_0)D_1f|_{(f_1(t), f_2(t))} + (y - y_0)D_2f|_{(f_1(t), f_2(t))},$$

$$D^2 F(t) = (x - x_0)^2 D_1^2 f|_{(f_1(t), f_2(t))} + 2(x - x_0)(y - y_0) D_2 D_1 f|_{(f_1(t), f_2(t))} + (y - y_0)^2 D_2^2 f|_{(f_1(t), f_2(t))}$$

¹En effet, il existe $\delta > 0$ tel que $x_0 + t(x - x_0) \in I, y_0 + t(y - y_0) \in J$ pour tout $t \in]-\delta, 1 + \delta[$; le théorème de dérivation des fonctions composées peut alors s'appliquer.

et

$$F(1) = f(x, y), \quad F(0) = f(x_0, y_0).$$

En posant

$$u_0 = f_1(t_0) = x_0 + t_0(x - x_0), \quad v_0 = f_2(t_0) = y_0 + t_0(y - y_0)$$

on obtient la formule annoncée. \square

INTERPRÉTATION

1) Rappelons encore que, dans le cas d'une variable, lorsque f est dérivable en x_0 , ces résultats traduisent le fait que les points de la tangente au graphique de f en x_0 donnent une approximation à l'ordre 1 de f en x_0 . En effet, la tangente au graphique de f en x_0 est la droite d'équation $y = f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0)$ et on a

$$\begin{aligned} \text{approx} &= f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - \text{approx}}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - [f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0)]}{x - x_0} = 0. \end{aligned}$$

Lorsque f appartient à $C_1(|a, b|)$, on a une bonne approximation du reste (et c'est ce qui est utile dans les applications):

$$f(x) - \text{approx} = f(x) - [f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0)] = (x - x_0)[Df(u) - Df(x_0)]$$

où u est donné par le développement de Taylor. On a

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (Df(u) - Df(x_0)) = 0.$$

2) Prenons maintenant le cas de $f \in C_1(U)$, $(x_0, y_0) \in U$. La représentation graphique de f est la surface \mathcal{S} d'équation cartésienne

$$z = f(x, y) \quad \text{ou encore} \quad G(x, y, z) = 0$$

avec $G(x, y, z) = f(x, y) - z$. Le point de coordonnées (x_0, y_0, z_0) , où $z_0 = f(x_0, y_0)$ est un point du graphique de f . Le plan d'équation cartésienne

$$z = f(x_0, y_0) + (x - x_0)D_1f(x_0, y_0) + (y - y_0)D_2f(x_0, y_0)$$

est appelé plan tangent au graphique de f en (x_0, y_0) (ou plan tangent à la surface \mathcal{S} au point de coordonnées (x_0, y_0, z_0)). Les points de ce plan donnent une approximation à l'ordre 1 de f en (x_0, y_0) . En effet on a

$$\begin{aligned} \text{approx} &= f(x_0, y_0) + (x - x_0)D_1f(x_0, y_0) + (y - y_0)D_2f(x_0, y_0) \\ f(x, y) - \text{approx} &= f(x, y) - [f(x_0, y_0) + (x - x_0)D_1f(x_0, y_0) + (y - y_0)D_2f(x_0, y_0)] \\ &= (x - x_0)[D_1f(u_0, v_0) - D_1f(x_0, y_0)] + (y - y_0)[D_2f(u_0, v_0) - D_2f(x_0, y_0)]. \end{aligned}$$

Comme

$$\lim_{x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0} [D_1f(u_0, v_0) - D_1f(x_0, y_0)] = 0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0} [D_2f(u_0, v_0) - D_2f(x_0, y_0)] = 0$$

et comme

$$|x - x_0| \leq \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad |y - y_0| \leq \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

on obtient

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0} \frac{f(x, y) - \text{approx}}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} &= \lim_{x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0} \frac{(x - x_0)[D_1 f(u_0, v_0) - D_1 f(x_0, y_0)]}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \\ &\quad + \lim_{x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0} \frac{(y - y_0)[D_2 f(u_0, v_0) - D_2 f(x_0, y_0)]}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Vu la définition du plan tangent, le vecteur de composantes

$$(D_1 f(x_0, y_0), D_2 f(x_0, y_0), -1) = \text{grad}G|_{(x_0, y_0, z_0)}$$

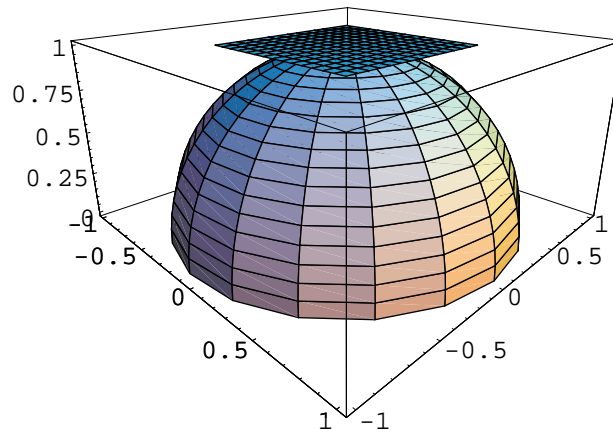
est un vecteur normal au plan tangent à la surface d'équation $G(x, y, z) = 0$ au point (x_0, y_0, z_0) .

Voici deux illustrations. La première représente une demi-sphère (équation de la sphère centrée à l'origine et de rayon 1: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$; on a représenté les points de cote positive) et le plan tangent au point $(0, 0, 1)$. Comme l'équation de la sphère est $G(x, y, z) = 0$ avec $G(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$, on a

$$\text{grad}G|_{(x, y, z)} = (2x, 2y, 2z)$$

et le plan en question a donc pour équation

$$0 = \text{grad}G|_{(0, 0, 1)} \bullet (x, y, z - 1) = z - 1.$$

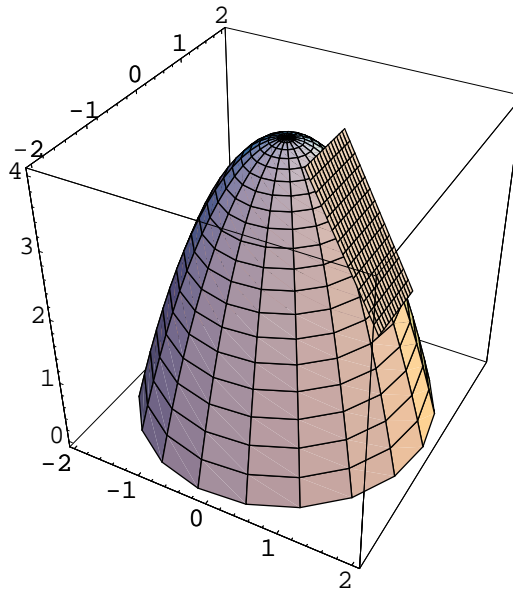


La seconde représente les points du paraboloïde elliptique d'équation $z = 4 - x^2 - y^2$ dont la cote est positive et le plan tangent au point de coordonnées $(1, 0, 3)$. Comme $G(x, y, z) = z - 4 + x^2 + y^2$, on a ici

$$\text{grad}G|_{(x, y, z)} = (2x, 2y, 1)$$

et le plan tangent au point de coordonnées $(1, 0, 3)$ a donc pour équation

$$0 = \text{grad}G|_{(1, 0, 3)} \bullet (x - 1, y, z - 3) = z + 2x - 5.$$



De nombreuses autres illustrations figurent par exemple dans le livre “Calculus, with analytic geometry”, R. Ellis, D. Gulick.

3) Une autre interprétation justifiant le nom “plan tangent” à la surface \mathcal{S} pour le plan

$$z = f(x_0, y_0) + (x - x_0)D_1f(x_0, y_0) + (y - y_0)D_2f(x_0, y_0)$$

ou plus généralement pour le plan

$$(z - z_0)D_3G(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0)D_2G(x_0, y_0, z_0) + (x - x_0)D_1G(x_0, y_0, z_0) = 0$$

est celle-ci: si $(f_1(t), f_2(t), f_3(t))$, $t \in I$ est une courbe régulière incluse dans \mathcal{S} passant par (x_0, y_0, z_0) en $t = t_0$, on a

$$G(f_1(t), f_2(t), f_3(t)) = 0, \quad t \in I$$

donc, en dérivant les deux membres par rapport à t et en considérant l'égalité obtenue pour $t = t_0$, on obtient

$$\begin{aligned} Df_1(t_0)D_3G(x_0, y_0, z_0) + Df_2(t_0)D_2G(x_0, y_0, z_0) + Df_3(t_0)D_1G(x_0, y_0, z_0) \\ = \text{grad}G|_{(x_0, y_0, z_0)} \bullet (Df_1(t_0), Df_2(t_0), Df_3(t_0)) = 0. \end{aligned}$$

Le plan (vectoriel) dont il est question ci-dessus contient donc la tangente à toute courbe incluse dans la surface.

5.2 Extrema libres

On introduit la notion de maximum, de minimum (local ou global) comme dans les cas des fonctions d'une variable réelle (et à valeurs réelles). Considérons le cas de deux variables; celui de trois variables ou même plus se traite de même.

Définition 5.2.1 Si f est défini dans A et si $(x_0, y_0) \in A$, on dit que (x_0, y_0) correspond à un maximum local des valeurs de f s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0) \quad \forall (x, y) \in A, |x - x_0| \leq \varepsilon, |y - y_0| \leq \varepsilon.$$

Si, dans l'inégalité précédente entre les valeurs de f , on peut prendre tous les points de A , on dit que le maximum est global. De plus, si l'inégalité est stricte pour $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ on ajoute le qualificatif strict au terme maximum.

Une définition analogue existe bien sûr pour un minimum.

On dit que (x_0, y_0) est un extremum de f s'il est minimum ou maximum.

Comme dans le cas des fonctions d'une variable réelle encore, on donne des conditions (nécessaires, suffisantes) pour qu'un point donne lieu à un extremum. Ces conditions font intervenir ici les dérivées partielles. Bien sûr, si la fonction n'est pas dérivable, seule une étude directe (repassant à la définition) est possible.

Propriété 5.2.2 Soit f défini et dérivable dans un ouvert U de \mathbb{R}^2 et soit $(x_0, y_0) \in U$. Si (x_0, y_0) est un extremum de f , alors

$$D_1f(x_0, y_0) = D_2f(x_0, y_0) = 0.$$

Preuve. Cela se démontre comme dans le cas d'une variable. \square

Définition 5.2.3 Un point où toutes les dérivées partielles de f sont nulles est appelé point stationnaire pour f .

Signalons encore que si on désigne (quel que soit le nombre de variables) par $\text{grad}f_{(x,y,z)}$ le vecteur des dérivées partielles de f , un point stationnaire correspond à un point où le gradient de f est nul.

Comme dans le cas des fonctions d'une variable, il ne suffit pas qu'un point soit stationnaire pour qu'il soit extremum. La condition suffisante pratique pour rechercher les extrema d'une fonction d'une variable (à savoir f deux fois continûment dérivable, $Df(x_0) = 0$, $D^2f(x_0) > 0$ ou $D^2f(x_0) < 0$) se traduit ici par l'étude des valeurs propres d'une matrice réelle symétrique, appelée matrice hessienne de f . Introduisons cette matrice et une égalité fondamentale dans laquelle elle intervient.

Dans le cas d'une fonction de deux variables, deux fois continûment dérivable dans U , en utilisant le développement limité de Taylor, rappelons que l'on a

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{2} \left((x - x_0)^2 D_1^2 f(u_0, v_0) + 2(x - x_0)(y - y_0) D_1 D_2 f(u_0, v_0) + (y - y_0)^2 D_2^2 f(u_0, v_0) \right)$$

ou encore

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{2} (x - x_0, y - y_0) H_f(u_0, v_0) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

si (x_0, y_0) est un point stationnaire pour f , si (x, y) est proche de (x_0, y_0) et si on a défini la

matrice hessienne de f

par

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} D_1^2 f(x, y) & D_2 D_1 f(x, y) \\ D_1 D_2 f(x, y) & D_2^2 f(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1^2 f(x, y) & D_2 D_1 f(x, y) \\ D_2 D_1 f(x, y) & D_2^2 f(x, y) \end{pmatrix}.$$

Réécrivons

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{2} E_f(x, y)$$

où

$$E_f(x, y) = (x - x_0, y - y_0) H_f(u_0, v_0) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}.$$

On voit donc directement que, selon le signe de $E_f(x, y)$ au voisinage de (x_0, y_0) , on pourra donner des informations quant au caractère extremal de (x_0, y_0) pour f . Cette expression s'étudie au moyen d'outils relevant de l'algèbre linéaire. En effet, pour tout (x, y) , la matrice hessienne de f en (x, y) est hermitienne et réelle (autrement dit réelle symétrique); ses valeurs propres sont donc toujours réelles et le signe de la fonction $E_f(x, y)$ au voisinage de (x_0, y_0) est conditionné par la répartition en signes différents de ces valeurs propres.

L'intérêt de la présentation ci-dessus et de l'étude générale des matrices hermitiennes réelles réside dans le fait que les résultats sont généralisables à n variables sans aucune difficulté. Dans le cas de deux variables, de nombreuses simplifications apparaissent (dans les résultats d'algèbre linéaire). Nous commençons par étudier ce cas.

Exemple 1 Considérons la fonction $f(x, y) = 3 - x^2 + 2x - y^2 - 4y$ et recherchons ses extrema éventuels.

Cette fonction est indéfiniment continûment dérivable dans \mathbb{R}^2 et à valeurs réelles. Sa représentation graphique est une surface quadrique. On peut voir assez directement que sa représentation graphique est un paraboloides elliptique et donc déjà deviner le résultat.

Recherchons ses points stationnaires. Pour cela, on doit résoudre le système

$$\begin{cases} D_1 f(x, y) = 0 \\ D_2 f(x, y) = 0. \end{cases}$$

Ici, cela donne directement $x = 1, y = -2$ comme unique solution.

La matrice hessienne $H_f(x, y)$ est constante et même diagonale; en tout (x, y) , elle est égale à

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

On obtient donc

$$f(x, y) = f(1, -2) + (-(x-1)^2 - (y+2)^2) = 8 - (x-1)^2 - (y+2)^2$$

pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On obtient donc facilement

$$E_f(x, y) < 0, \forall (x, y) \neq (1, -2)$$

donc

$$f(x, y) = f(1, -2) + \frac{1}{2} E_f(x, y) < f(1, -2)$$

et $(1, -2)$ donne lieu à un maximum strict global de f dans \mathbb{R}^2 .

Exemple 2 Considérons la fonction $f(x, y) = x^2 - y^2$ et recherchons ses extrema éventuels.

Cette fonction est indéfiniment continûment dérivable dans \mathbb{R}^2 et à valeurs réelles. Sa représentation graphique est une surface quadrique; on voit directement qu'il s'agit d'un paraboloides hyperbolique.

Recherchons ses points stationnaires. Pour cela, on doit résoudre le système

$$\begin{cases} D_1 f(x, y) = 0 \\ D_2 f(x, y) = 0. \end{cases}$$

Ici, cela donne directement $x = 0, y = 0$ comme unique solution.

On voit directement que ce point ne donne pas lieu à un extremum car, si $y = 0, x \neq 0$, on a

$$f(x, 0) = f(0, 0) + x^2 = x^2 > 0$$

et, si $x = 0, y \neq 0$, on a

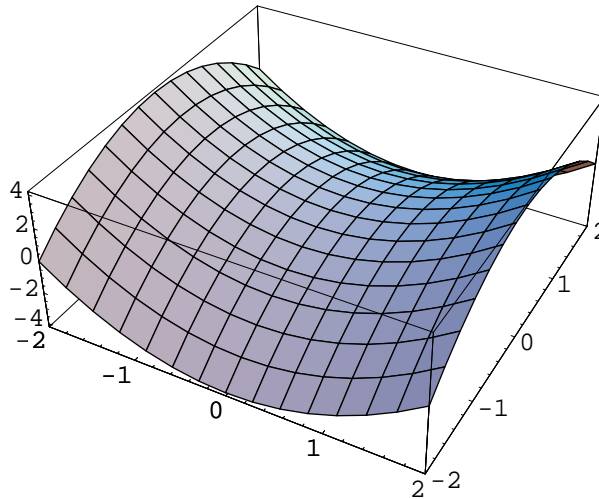
$$f(0, y) = f(0, 0) - y^2 = -y^2 < 0.$$

Remarquons que, dans ce cas, la matrice hessienne $H_f(x, y)$ est constante et même diagonale; en tout (x, y) , elle est égale à

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Elle donne lieu à

$$E_f(x, y) = 2x^2 - 2y^2.$$



Représentation de $f(x, y) = x^2 - y^2$

Dans ces exemples, l'étude du signe de $E_f(x, y)$ est très simple car la matrice hessienne est diagonale ET constante. Cela ne se passe bien sûr pas toujours aussi bien.

Énonçons les résultats permettant une étude plus générale dans le cas d'une fonction de deux variables.

Propriété 5.2.4 *Considérons un ouvert U de \mathbb{R}^2 , une fonction $f \in C_2(U)$ et un point stationnaire $(x_0, y_0) \in U$ de f .*

1) *Si $\det(H_f(x_0, y_0)) > 0$ et si $D_1^2 f(x_0, y_0) > 0$ alors (x_0, y_0) est un minimum local strict de f dans U .*

2) *Si $\det(H_f(x_0, y_0)) > 0$ et si $D_1^2 f(x_0, y_0) < 0$ alors (x_0, y_0) est un maximum local strict de f dans U .*

3) *Si $\det(H_f(x_0, y_0)) < 0$ alors (x_0, y_0) n'est pas extremum de f dans U .*

Preuve. À compléter.

Remarquons que dans si $\det(H_f(x_0, y_0)) > 0$ et si $D_1^2 f(x_0, y_0) > 0$ (resp. $D_2^2 f(x_0, y_0) > 0$) alors $D_2^2 f(x_0, y_0) > 0$ (resp. $D_1^2 f(x_0, y_0) > 0$). La propriété pourrait donc tout aussi bien s'exprimer à l'aide de la dérivée seconde par rapport à y .

Exemple 3 Considérons la fonction $f(x, y) = x^2 - 2xy + \frac{1}{3}y^3 - 3y$ et recherchons ses extrema éventuels.

Cette fonction est indéfiniment continûment dérivable dans \mathbb{R}^2 et à valeurs réelles.

Recherchons ses points stationnaires. Pour cela, on doit résoudre le système

$$\begin{cases} D_1 f(x, y) = 0 \\ D_2 f(x, y) = 0. \end{cases}$$

Après quelques calculs, on obtient les solutions $(3, 3)$ et $(-1, -1)$.

On a

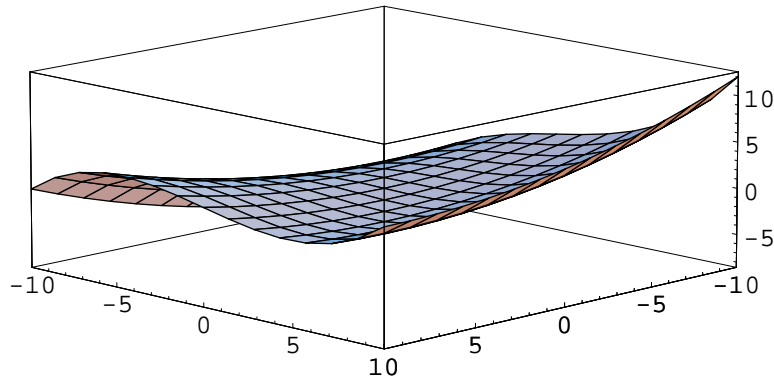
$$\det(H_f(3,3)) = 8, \quad D_1^2 f(3,3) = 2$$

donc $(3,3)$ correspond à un minimum local strict.

On a

$$\det(H_f(-1,-1)) = -8$$

donc $(-1,-1)$ n'est pas un extremum.



5.3 Application: la régression linéaire

Il s'agit d'une application de l'étude des extrema des fonctions dites "quadratiques".

5.3.1 Généralités

Une fonction de deux variables réelles² du type

$$f(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c$$

où les coefficients des variables x, y sont des réels et où les a_{ij} ne sont pas tous nuls est appelée *fonction quadratique*. On les a déjà rencontrées précédemment dans le cadre de ce cours car elles sont intimement liées aux coniques et aux quadriques: dans le plan muni d'un repère, une équation du type $f(x, y) = 0$ est l'équation cartésienne d'une conique (en toute généralité) et dans l'espace muni d'un repère, une équation du type $z = f(x, y)$ est l'équation d'une quadrique³.

Dans ce cas simple, le système permettant de déterminer les points stationnaires de f s'écrit

$$\begin{cases} D_x f(x, y) = 2a_{11}x + 2a_{12}y + 2b_1 = 0 \\ D_y f(x, y) = 2a_{22}y + 2a_{12}x + 2b_2 = 0 \end{cases}$$

et la matrice hessienne

$$H_f = \begin{pmatrix} D_x^2 f(x, y) & D_x D_y f(x, y) \\ D_x D_y f(x, y) & D_y^2 f(x, y) \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

est constante. En un point stationnaire (x_0, y_0) , on a ainsi

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 \end{pmatrix} H_f \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

On en déduit donc la propriété suivante (dans CE cas de fonction f).

²cela s'étend à plus de deux variables réelles

³de type 'parabolôïde'. Il s'agit en effet d'un cas particulier d'une équation du type $F(x, y, z) = 0$ où F est une fonction quadratique de trois variables réelles.

Propriété 5.3.1 a) Si le déterminant de la matrice hessienne est non nul, alors il existe un point stationnaire unique.

b) Un extremum est toujours global.

□

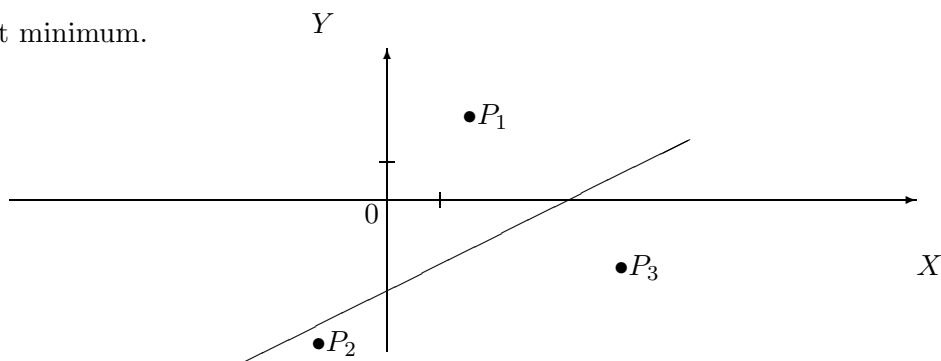
5.3.2 La régression linéaire

En guise d'application, examinons le problème de la *régression linéaire*.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on donne un nombre fini de points distincts $P_j (j = 1, \dots, J)$ par leurs coordonnées cartésiennes $(x_j, y_j) (j = 1, \dots, J)$. Dans le cas où les x_j ne sont pas tous égaux, on demande de chercher la droite⁴ d (dite *droite de régression*) d'équation cartésienne $y = mx + b$ telle que

$$E(m, b) = \sum_{j=1}^J (y_j - (mx_j + b))^2$$

soit minimum.



Comme $|y_j - (mx_j + b)|$ est la valeur absolue de la différence entre l'ordonnée du point P_j et celle du point de d dont l'abscisse est x_j , l'expression $E(m, b)$ mesure d'une certaine manière la façon dont les points P_j sont répartis autour de⁵ d . La fonction E définie ci-dessus s'appelle *l'erreur quadratique totale*.

Le problème est donc celui de la recherche des extrema (libres) éventuels d'une fonction quadratique, notée ici E et dont les variables sont notées m et b .

Dans ce cas particulier⁶, l'expression de E permet de conclure immédiatement à l'existence d'un minimum (que l'on sait donc aussi être global). La recherche de l'équation cartésienne de d (correspondant à la recherche du minimum de E) consiste donc en la détermination de ou des solutions du système caractérisant les points stationnaires.

En utilisant les notations de la section précédente, les coefficients de $m^2, b^2, 2mb$ dans l'expression de E , sont respectivement

$$a_{11} = \sum_{j=1}^J x_j^2, \quad a_{22} = J, \quad a_{12} = \sum_{j=1}^J x_j$$

⁴existence et unicité aussi

⁵remarquons que dans le cas où les points ont tous la même abscisse r , la droite verticale d'équation $x = r$ contient tous les points P_j

⁶bien sûr si l'on s'attache à la méthode générale, c'est l'examen de la matrice hessienne qui permet de conclure au fait que l'on a affaire à un minimum

ce qui correspond à la matrice hessienne

$$H_E = 2 \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^J x_j^2 & \sum_{j=1}^J x_j \\ \sum_{j=1}^J x_j & J \end{pmatrix}.$$

En utilisant les hypothèses sur les abscisses x_j et la propriété ci-dessous, on en déduit *qu'il existe un point stationnaire unique et que celui-ci donne lieu à un minimum strict global.*

Propriété. Par récurrence (sur J), montrons que, quel que soit $J \in \mathbb{N}_0$ et quels que soient les réels x_j ($j = 1, \dots, J$), on a

$$\left(\sum_{j=1}^J x_j \right)^2 \leq J \sum_{j=1}^J x_j^2.$$

De plus, on a l'égalité si et seulement si tous les x_j sont égaux.

De fait, pour $J = 1$ et aussi pour $J = 2$ c'est clair. Supposons à présent la propriété correcte pour J . On obtient successivement

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^{J+1} x_j \right)^2 &= \left(\sum_{j=1}^J x_j + x_{J+1} \right)^2 = \left(\sum_{j=1}^J x_j \right)^2 + x_{J+1}^2 + 2x_{J+1} \left(\sum_{j=1}^J x_j \right) \\ &\leq J \sum_{j=1}^J x_j^2 + x_{J+1}^2 + 2x_{J+1} \left(\sum_{j=1}^J x_j \right) \\ &\leq J \sum_{j=1}^J x_j^2 + x_{J+1}^2 + \left(\sum_{j=1}^J (x_j^2 + x_{J+1}^2) \right) \\ &= (J+1) \sum_{j=1}^{J+1} x_j^2 \end{aligned}$$

Le cas de l'égalité se démontre en affinant un peu la preuve ci-dessus. \square

5.4 Extrema dans des ensembles bornés fermés

5.5 Extrema liés: la méthode des multiplicateurs de Lagrange

5.6 Exercices

1. Déterminer l'équation cartésienne du plan tangent à la surface d'équation $z = f(x, y)$ au point d'abscisse et d'ordonnée (x_0, y_0) dans chacun des cas ci-dessous.

1) $f(x, y) = 6 - 3x^2 - y^2$, $(1, 2)$; 2) $f(x, y) = y^2 + x \sin(x^2 y)$, $(1, \pi)$; 3) $f(x, y) = \frac{x+2}{y+1}$, $(2, 3)$.

2. Déterminer l'équation cartésienne du plan tangent à la surface d'équation $f(x, y, z) = 0$ au point de coordonnées (x_0, y_0, z_0) dans chacun des cas suivants.

1) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{\sqrt{2}})$; 2) $ye^{xy} + z^2 = 0$, $(0, -1, 1)$.

3. Soit un plan π non parallèle à l'axe Z . Montrer qu'il y a exactement un plan tangent au paraboloïde d'équation $z = x^2 + y^2$ parallèle à π .

4. Déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre 2 de la fonction $f(x, y) = e^x \cos y$ au point de coordonnées $(0, 0)$.

5. Déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre 1 de la fonction $f(x, y) = \frac{x+1}{3xy+y^2+2}$ au point de coordonnées $(1, 1)$. En déduire une approximation de $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Comparer ce résultat avec la valeur exacte de $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

6. Soit $f(x, y) = \frac{x^2}{y+1}$. Déterminer l'équation du plan tangent à la surface d'équation $z = f(x, y)$ au point d'abscisse et d'ordonnée $(3, 2)$. Utiliser cette expression pour obtenir une approximation de $f(\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$.

7. Soit une boîte parallélépipédique de dimensions extérieures $14\text{cm} \times 14\text{cm} \times 28\text{cm}$. Si les parois ont une épaisseur de $1/8\text{cm}$, déterminer une approximation du volume de la boîte.

8. Soit $f(x, y) = xy$. Trouver les points stationnaires de f et déterminer s'il s'agit d'extrema.

9. Soit $f(x, y) = \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} - 2xy$. Trouver les points stationnaires de f et déterminer s'il s'agit d'extrema.

10. Soit $f(x, y) = x^4 - x^2 + 2xy + y^2$. Trouver les points stationnaires de f et déterminer s'il s'agit d'extrema.

11. Déterminer les extrema des fonctions suivantes définies sur \mathbb{R}^2

1) $f(x, y) = x^2 + 6xy + 2y^2 - 6x + 10y - 2$	2) $f(x, y) = x^2 - xy - 2y^2 + 7x - 8y + 3$
3) $f(x, y) = x^2 y - 2xy + 2y^2 - 15y$	4) $f(x, y) = x^2 - e^{y^2}$
5) $f(x, y) = e^x \sin y$	6) $f(x, y) = x + y $
7) $f(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)^2$	8) $f(x, y) = 4xy + 2x^2 y - xy^2$
9) $f(x, y) = x^4 - x^2 + 2xy + y^2$	10) $f(x, y) = 3x^2 - 3xy^2 + y^3 + 3y^2$
11) $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3x^2 - 8$	12) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + x - 4y + 5$.

12. Déterminer les extrema de la fonction

$$f(x, y) = \sin x + \sin y + \sin(x + y), \quad x, y \in]0, \pi[.$$

13. Déterminer les extrema de la fonction

$$f(x, y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \quad (x, y) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \neq 0\}.$$

14. Déterminer les extrema des fonctions suivantes

$$f(x, y) = y^4 - x^4, (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x, y) = x^4 + y^4, (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad h(x, y) = x^5 + x^3 + y^3, (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

15. Soit la fonction

$$f(x, y) = e^{-y^2}(2x^3 - 3x^2 + 1) + e^{-y}(2x^3 - 3x^2), (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Montrer que f a un seul point stationnaire et qu'il donne lieu à un maximum local.

Montrer ensuite que cet extremum n'est pas global. (Ce résultat montre encore une différence entre les fonctions d'une et de plusieurs variables. En effet, si $f \in C_1([a, b])$ possède un extremum local unique, alors cet extremum est global.)

16. Déterminer les extrema de f sur A dans chacun des cas suivants.
- $f(x, y) = x^2 - y^2$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$
 - $f(x, y) = ye^{-x}$, A est le rectangle de sommets de coordonnées $(0, 0)$, $(\ln 2, 0)$, $(\ln 2, 3)$, $(0, 3)$.
17. Une boîte parallélépipédique sans couvercle doit avoir un volume de $32m^3$. Déterminer les dimensions de cette boîte de telle sorte que la surface latérale soit minimale.
18. Déterminer trois nombres positifs dont la somme est 48 et dont le produit est maximal. Calculer ce produit.
19. Déterminer trois nombres positifs dont le produit est 48 et dont la somme est minimale. Calculer cette somme.
20. Pour quelles coordonnées (x, y) la fonction $f(x, y) = x + 2y$ admet-elle un extremum lorsque $x^2 + y^2 = 5$?
21. Déterminer les extrema éventuels de la fonction $f(x, y) = xy$ sous la contrainte $x + y = 3$ (resp. sous la contrainte $x^2 + y^2 = 1$).
22. Déterminer les extrema éventuels de la fonction $f(x, y) = 3x + 2y$ sous la contrainte $x^2/4 + y^2/8 = 1$.
23. Déterminer le point de la courbe d'équation $x^2y = 2$ le plus proche de l'origine des axes.
24. Les colis postaux parallélépipédiques doivent être de format x, y, z avec $2(x + y) + z \leq 100$. Déterminer le volume maximal d'un envoi qui répond aux contraintes imposées.
25. Dans chacun des cas suivants, déterminer la droite de régression linéaire pour les points dont on donne les coordonnées. Représenter ces points ainsi que la droite trouvée.
- $(1, 1)$, $(2, 3)$, $(3, 4)$
 - $(0, 0)$, $(1, -1)$, $(-2, 1)$
 - $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(4, 5)$.
- Que se passe-t-il si on donne seulement deux points?

2.5 Recherche des extrema dans des ensembles bornés fermés. B 64

Comme dans le cas d'une variable, on a le résultat suivant:

Si $f \in C_0(A)$, A borné fermé du plan, alors il existe $(x_2, y_2) \in A$ et $(x_1, y_1) \in A$ tels que

$$f(x_2, y_2) = \inf \{ f(x, y) : (x, y) \in A \}, \quad f(x_1, y_1) = \sup \{ f(x, y) : (x, y) \in A \}.$$

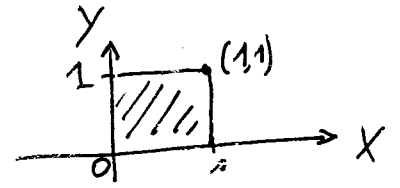
Remarquons que si (x_0, y_0) est un extremum pour f dans A , $\Omega \subset A$ si $f \in C_1(\Omega)$ où $\Omega = \text{ouvert}$, si $(x_0, y_0) \in \Omega$ alors $D_x f(x_0, y_0) = 0$ et $D_y f(x_0, y_0) = 0$.

Pour rechercher les extrema globaux de f dans A (qui existent très vu) ce qui précède), on procède comme suit

- recherche de $\Omega \subset A$, $(x_0, y_0) \in \Omega$ tel que $D_x f(x_0, y_0) = D_y f(x_0, y_0) = 0$
- puis étude du caractère extremal de (x_0, y_0)
- examiner les valeurs extrêmes de f sur la frontière de A
- puis comparer avec ce que l'on a trouvé avant.

Prenons un exemple.

Soit $f(x, y) = xy - x^2$ et $A = [0, 1] \times [0, 1]$.

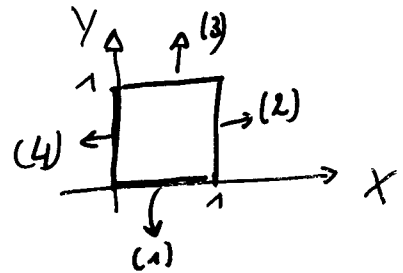


Recherchons les points stationnaires de f dans l'ouvert $]0, 1[\times]0, 1[$:

$$\begin{cases} D_x f = 0 \\ D_y f = 0 \end{cases} \quad (x, y) \in]0, 1[\times]0, 1[\iff \begin{cases} y - 2x = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad (x, y) \in]0, 1[\times]0, 1[$$

Il n'y a pas de solution.

Examinons donc f sur le bord du rectangle



Sur (1), on a $y=0$ et $0 \leq x \leq 1$

donc $f(x, y) = f(x, 0) = -x^2$.

On obtient un maximum pour $x=0$ et un minimum pour $x=1$

des valeurs correspondantes de f sont $f(0, 0) = 0$ (max) et $f(1, 0) = -1$ (min)

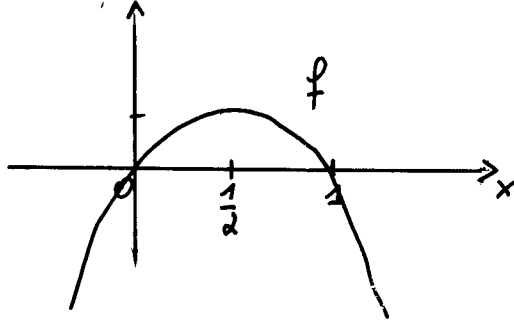
Sur (2), on a $x=1$ et $0 \leq y \leq 1$ donc $f(x, y) = f(1, y) = y - 1$.

On obtient un max pour $y=1$ et un min pour $y=0$.
Les valeurs corresp. de f sont $f(1, 1) = 0$ (max) et $f(1, 0) = -1$ (min)

Sur (3), on a $y=1$ et $0 \leq x \leq 1$ donc $f(x,y) = f(x,1) = x - x^2$

On obtient un maximum pour $x = \frac{1}{2}$ et un minimum pour $x=0, x=1$.

Les valeurs corr. de f sont $f(\frac{1}{2}, 1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ (max)
et $f(0,1) = f(1,1) = 0$ (min).



Sur (4), on a $x=0$ et $0 \leq y \leq 1$ donc $f(x,y) = f(0,y) = 0$

Au total, on a

$$0 = f(0,0) = f(1,1) = f(0,1)$$

$$\frac{1}{4} = f(\frac{1}{2}, 1)$$

pour les valeurs maximales trouvées
séparément

$$-1 = f(1,0)$$

$$0 = f(0,1) = f(1,1)$$

pour les valeurs minimales trouvées
séparément.

En conclusion

$(\frac{1}{2}, 1)$ donne lieu à un max global ($f(\frac{1}{2}, 1) = \frac{1}{4}$)

$(1, 0)$ donne lieu à un min global ($f(1, 0) = -1$)

3. Extrema sous contraintes (multiplicateurs de Lagrange). 566

Dans ce qui vient d'être présenté, on a recherché les extrema de f dans un ouvert, c'est-à-dire les extrema sans contrainte.

Mais, dans la pratique, on est bien souvent amené à rechercher des extrema sous contrainte, c'est-à-dire les extrema d'une f et $(x, y) \rightarrow f(x, y)$ (à valeurs réelles) lorsque (x, y) ne varie pas dans un ouvert, mais par exemple est un point d'une courbe (bref, lorsque (x, y) doit aussi vérifier contrainte $g(x, y) = 0$). Ceci se généralise au cas de plus de deux variables.

Dans certains cas, il est facile de tenir compte de la contrainte dans la recherche des extrema (ex...)

Dans d'autres cas, c'est plus difficile. On a alors introduit une méthode, appelée méthode des multiplicateurs de Lagrange, pour aider à résoudre les problèmes de recherche d'extrema sous contrainte.

Remarque sur l'existence des extrema

Si f est continue sur un ensemble borné fermé alors f admet une borne inf. et une borne sup. sur cet ens. (thm des bornes atteintes) (d'où existence ext. globaux)

Extrema de $f(x,y)$ sous la contrainte $g(x,y)=0$

Pour supposons les fonctions continûment dérivables dans un ouvert Ω .

- L'ensemble des points P de coord. (x,y) tels que $g(x,y)=0$ est une courbe du plan. Sous l'hyp. $(D_x g, D_y g) = \text{grad } g(x,y) \neq 0$, on sait qu'il existe une description de la courbe à l'aide d'un seul paramètre

$$g(x,y)=0 \iff \begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}, t \in I \quad (\text{avec } (D_x(t), D_y(t)) \neq 0)$$

Chercher les éventuels extrema de $f(x,y)$ sous la contrainte $g(x,y)=0$ revient donc à chercher les extrema de $F(t) = f(x(t), y(t))$, $t \in I$.

Ici, contrairement à ce qui se passe quand on manipule les contraintes facilement, on n'a pas connaissance explicite des fonctions $x(t), y(t)$.

Supposons que (x_0, y_0) soit un extremum de f sous la contrainte $g(x,y)=0$. Le réel t_0 tel que $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$ est donc un extremum pour

la fonction $F(t) = f(x(t), y(t))$, $t \in I$. Par la théorie des extrema libres, on sait donc que t_0 est stationnaire : $DF(t_0) = 0$.

D'autre part, on a $g(x(t), y(t)) = 0$ ($t \in I$); si on pose $G(t) = g(x(t), y(t))$, $t \in I$ on a donc aussi $DG(t_0) = 0$.

On obtient

$$\begin{cases} DF(t_0) = 0 \\ DG(t_0) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (D_x f)(x_0, y_0) \cdot Dx(t_0) + (D_y f)(x_0, y_0) \cdot Dy(t_0) = 0 \\ (D_x g)(x_0, y_0) \cdot Dx(t_0) + (D_y g)(x_0, y_0) \cdot Dy(t_0) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \underbrace{\begin{pmatrix} (D_x f)(x_0, y_0) & (D_y f)(x_0, y_0) \\ (D_x g)(x_0, y_0) & (D_y g)(x_0, y_0) \end{pmatrix}}_M \begin{pmatrix} Dx(t_0) \\ Dy(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le système $M \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0$ admet donc une solution non nulle; il s'ensuit que $\det M = 0$ ou encore qu'il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{pmatrix} D_x f(x_0, y_0) \\ D_y f(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \lambda_0 \begin{pmatrix} D_x g(x_0, y_0) \\ D_y g(x_0, y_0) \end{pmatrix} \quad (\text{càd } \begin{cases} D_x f(x_0, y_0) = \lambda_0 D_x g(x_0, y_0) \\ D_y f(x_0, y_0) = \lambda_0 D_y g(x_0, y_0) \end{cases})$$

ou encore $\begin{cases} D_x (f - \lambda_0 g)(x_0, y_0) = 0 \\ D_y (f - \lambda_0 g)(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$

car ...

Le réel λ_0 s'appelle un multiplicateur de Lagrange.

En conclusion de ce qui vient d'être fait, on peut énoncer le résultat suivant :

si (x_0, y_0) est un extremum de $f(x, y)$ sous la contrainte $g(x, y) = 0$ alors il existe un réel λ_0 tel que (x_0, y_0) soit un point stationnaire pour la fonction $f - \lambda_0 g$.

• Pour rechercher les éventuels extrema de $f(x, y)$ sous la contrainte $g(x, y) = 0$ on commence donc par résoudre le système

$$\begin{cases} D_x f(x, y) = \lambda D_x g(x, y) \\ D_y f(x, y) = \lambda D_y g(x, y) \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

en les inconnues x, y et λ .

Si f admet un maximum (resp. minimum) global sous la contrainte $g(x, y) = 0$ alors cet extremum est nécessairement l'un des (x, y) trouvés comme solution du système précédent.

Remarquons que le théorème des bornes atteintes (à deux variables) assure l'existence de ces extrema globaux lorsque l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$ est borné (il est fermé puisque g est continu).

• Il existe des moyens pour étudier l'éventuel caractère extremal local des points stationnaires de la fonction $f - \lambda_0 g$ (nous avons développé la théorie dans le cadre des extrema sans contrainte).

Ils sont assez techniques ; en fait, ils sont basés sur l'étude du signe de la dérivée seconde de la fonction $F(t) = f(x(t), y(t))$, ce qui est naturel. Signalons le résultat suivant :

soit (x_0, y_0) un point stationnaire de $L = f - \lambda_0 g$; alors

(x_0, y_0) est un $\begin{matrix} \text{min.} \\ \text{max.} \end{matrix}$ local. strict de f sous contrainte

si et seulement si le zéro du polynôme $(\text{en } \lambda)$

est $\begin{cases} > 0 \\ < \end{cases}$

$$\det \begin{pmatrix} H_L(x_0, y_0) - \lambda_0 I & D_x g(x_0, y_0) \\ D_x g(x_0, y_0) & D_y g(x_0, y_0) \\ D_x g(x_0, y_0) & D_y g(x_0, y_0) & 0 \end{pmatrix}$$

• Exemple : recherche des extrema globaux de $f(x,y) = x^2 + 4y^3$ sous la contrainte $x^2 + 2y^2 = 1$ (eq. d'une ellipse)

Le minimum global et le maximum global existent car la "courbe de contrainte" est un ensemble borné fermé.

Utilisons la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

Cherchons d'abord les solutions du système

$$\begin{cases} D_x f = \lambda D_x g \\ D_y f = \lambda D_y g \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2x\lambda = 0 \\ 12y^2 - 4y\lambda = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(1-\lambda) = 0 \\ y(3y-\lambda) = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ 2y^2=1 \\ 3y=\lambda \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \lambda=1 \\ y(3y-\lambda)=0 \\ x^2+2y^2=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1/\sqrt{2} \\ 3y=\lambda \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x=0 \\ y=-1/\sqrt{2} \\ 3y=\lambda \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \lambda=1 \\ y=0 \\ x^2=1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \lambda=1 \\ 3y=\lambda \\ x^2 + \frac{2}{9} = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1/\sqrt{2} \\ 3y=\lambda \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x=0 \\ y=-1/\sqrt{2} \\ 3y=\lambda \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \lambda=1 \\ y=0 \\ x=1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \lambda=1 \\ y=0 \\ x=-1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \lambda=1 \\ 3y=1 \\ x = \frac{\sqrt{7}}{3} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \lambda=1 \\ 3y=1 \\ x = -\frac{\sqrt{7}}{3} \end{cases}$$

On obtient donc 6 points. On sait que le max et le min (globaux) sont parmi eux. On les cherche en calculant $f(x_0, y_0)$:

$\begin{cases} x_0=0 \\ y_0=1/\sqrt{2} \end{cases}$	$\begin{cases} x_0=0 \\ y_0=-1/\sqrt{2} \end{cases}$	$\begin{cases} x_0=1 \\ y_0=0 \end{cases}$	$\begin{cases} x_0=-1 \\ y_0=0 \end{cases}$	$\begin{cases} x_0 = \frac{\sqrt{7}}{3} \\ y_0 = 1/3 \end{cases}$	$\begin{cases} x_0 = -\frac{\sqrt{7}}{3} \\ y_0 = 1/3 \end{cases}$
$f(x_0, y_0) = 4/2\sqrt{2}$	$f(x_0, y_0) = -4/2\sqrt{2}$	$f(x_0, y_0) = 1$	$f(x_0, y_0) = 1$	$f(x_0, y_0) = 25/27$	$f(x_0, y_0) = 25/27$
$= \sqrt{2}$	$= -\sqrt{2}$	$= 1$	$= 1$	$= 25/27$	$= 25/27$

Le max. est donc au point de coord. $(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$; il vaut $f(0, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \sqrt{2}$;
 le min. est donc au point de coord. $(0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$; il vaut $f(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\sqrt{2}$.

On peut aussi se poser la question de savoir si les autres points fournissent des extrema locaux.

Pour cela, on étudie le zéro du polynôme

$$\det \begin{pmatrix} H_L(x_0, y_0) - \lambda \mathbb{1} & D_x g(x_0, y_0) \\ D_x g(x_0, y_0) & D_y g(x_0, y_0) \\ D_x g(x_0, y_0) & D_y g(x_0, y_0) & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou } L = f - \lambda_0 g$$

On a $H_L(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 2 - 2\lambda_0 & 0 \\ 0 & 24y_0 - 4\lambda_0 \end{pmatrix}$, $D_x g = 2x$, $D_y g = 4y$

Pour $x_0 = 1, y_0 = 0, \lambda_0 = 1$ on obtient

$$\det \begin{pmatrix} 0 - 1 & 0 & 2 \\ 0 & -4 - 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4(4+1). \quad \text{Le seul zéro est } -4$$

On obtient un max local strict.

Pour $x_0 = -1, y_0 = 0, \lambda_0 = 1$, on obtient

$$\det \begin{pmatrix} 0 - 1 & 0 & -2 \\ 0 & -4 - 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4(4+1). \quad \text{Le seul zéro est } -4.$$

On obtient un max local strict

Pour $x_0 = \frac{\sqrt{2}}{3}, y_0 = \frac{1}{3}, \lambda_0 = 1$ on obtient

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & 8 - 4 - 1 & \frac{4}{3} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{4}{3} & 0 \end{pmatrix} = +1 \cdot \frac{16}{9} + \frac{2\sqrt{2}}{3} (\lambda - 4) \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$= \frac{16}{9} \lambda + \frac{48}{9} (\lambda - 4) = \frac{44}{9} \lambda - \frac{112}{9}$$

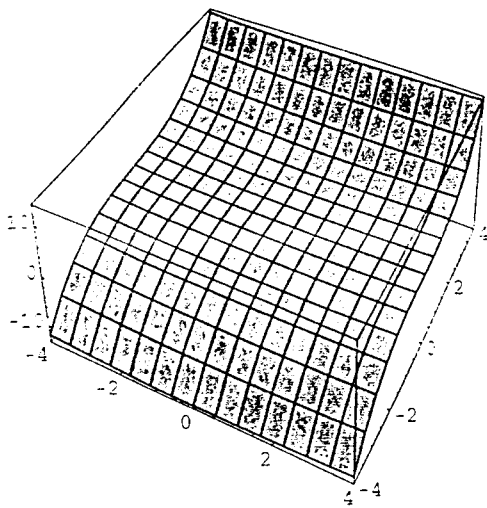
Le seul zéro est $\frac{112}{44} = \frac{28}{11}$. On obtient un min local strict.

Pour $x_0 = -\frac{\sqrt{2}}{3}, y_0 = \frac{1}{3}, \lambda_0 = 1$ on obtient

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & 4 - 1 & \frac{4}{3} \\ -\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{4}{3} & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \frac{16}{9} - \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} (4 - \lambda) = \frac{16}{9} \lambda + \frac{28}{9} \lambda - \frac{112}{9}$$

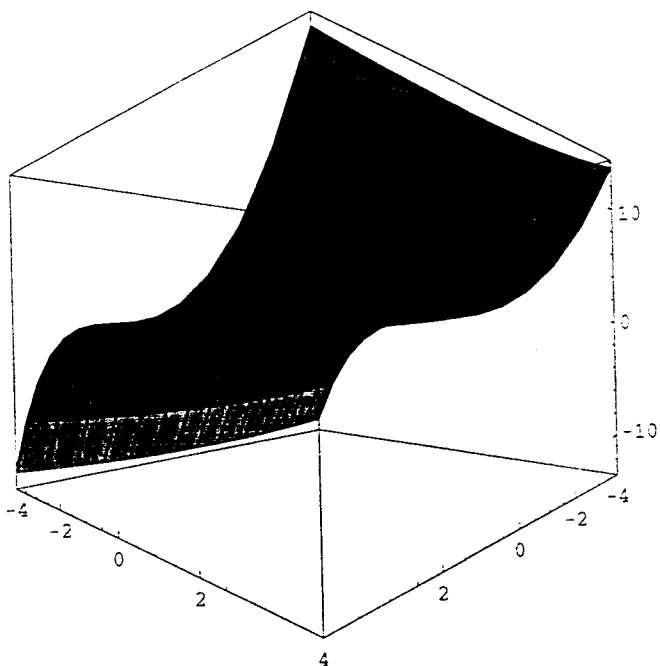
$$= \frac{44}{9} \lambda - \frac{112}{9}$$

Le seul zéro est $\frac{112}{44} = \frac{28}{11}$. On obtient un min local strict.



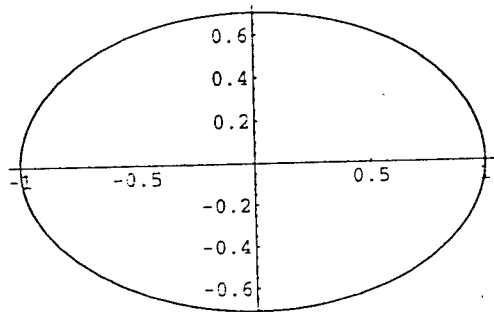
Out[19]= - SurfaceGraphics -

```
Plot3D[(x^2 + 4 y^3) / 20, {x, -4, 4}, {y, -4, 4}, AspectRatio -> 1, ViewPoint -> {1, 1, 0}]
```



Out[21]= - SurfaceGraphics -

```
In[24]:= ParametricPlot[{Cos[t], (1/Sqrt[2]) * Sin[t]}, {t, 0, 2 Pi}]
```



Cet exercice aurait pu être traité différemment car on a un paramétrage aisé de la contrainte $x^2 + y^2 = 1$.

En effet : $x^2 + y^2 = 1 \iff x^2 + \frac{y^2}{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2} = 1 \iff \exists t \in [0, 2\pi[\left\{ \begin{array}{l} x = \cos t \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t \end{array} \right.$

Étudier les extrema de $f(x, y) = x^2 + 4y^3$ sous la contrainte $x^2 + y^2 = 1$ revient donc à étudier les extrema de

$$F(t) = f(\cos t, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t) = \cos^2 t + \frac{4}{2\sqrt{2}} \sin^3 t = \cos^2 t + \sqrt{2} \sin^3 t, \quad t \in [0, 2\pi[$$

On a $(F \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}))$

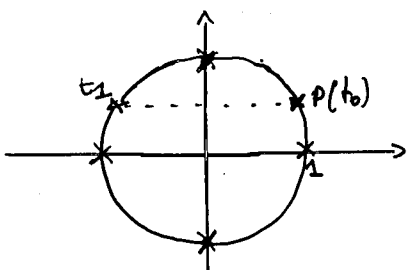
$$DF(t) = 2 \cos t (-\sin t) + 3\sqrt{2} \sin^2 t \cos t = \cos t \cdot \sin t (-2 + 3\sqrt{2} \sin t)$$

$$DF(t) = 0 \iff \cos t = 0 \text{ ou } \sin t = 0 \text{ ou } \sin t = \frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

(Vu la 2π -périodicité, cherchons t dans $[0, 2\pi[$.)

$$\iff t = \frac{\pi}{2} \text{ ou } t = \frac{3\pi}{2} \text{ ou } t = 0 \text{ ou } t = \pi$$

$$\text{ou } t = \underbrace{\arcsin \frac{\sqrt{2}}{3}}_{t_0} \text{ ou } t = \underbrace{\pi - \arcsin \frac{\sqrt{2}}{3}}_{t_1}$$



$(0,4903)$
 $\frac{\pi}{2} \approx 1.5708$

Étude du signe de DF et concl. sur F

t	0	t_0	$\pi/2$	t_1	π	$3\pi/2$	2π
$\cos t$	+	+++	0	-	---	-	0
$\sin t$	-	0	+++	+	+	+++	0
$-2 + 3\sqrt{2}\sin t$	-	-	0	+	+	+	0
DF	+	0	-	0	+	0	-
F	↗	↘	↗	↘	↗	↘	↗

- Pour $t = 0$, F a un max local; il correspond à
- Pour $t = t_0$, F a un min local; il correspond à
- Pour $t = \frac{\pi}{2}$, F a un max local; il correspond à
- Pour $t = t_1$, F a un min local; il correspond à
- Pour $t = \pi$, F a un max local; il correspond à
- Pour $t = \frac{3\pi}{2}$, F a un min local; il correspond à

- $x_0 = 1, y_0 = 0$
- $x_0 = 1/3, y_0 = \frac{\sqrt{2}}{3}$
- $x_0 = 0, y_0 = 1/\sqrt{2}$
- $x_0 = -\sqrt{2}/3, y_0 = 1/3$
- $x_0 = -1, y_0 = 0$
- $x_0 = 0, y_0 = -1/\sqrt{2}$

(ext. stricts)

Pour trouver le global, comparer les diff. valeurs de $F(t)$, avec $t = 0, t_0, \pi/2, t_1, \pi, \frac{3\pi}{2}$

3.2 Extrema de $f(x, y, z)$ sous la contrainte $g(x, y, z) = 0$

La démarche est analogue au cas précédent. Seulement, ici, l'équation $g(x, y, z) = 0$ est l'équation d'une surface et c'est deux paramètres qu'il faudra pour la décrire :

$$g(x, y, z) = 0 \iff \begin{cases} x = x(t, s) \\ y = y(t, s) \\ z = z(t, s) \end{cases}$$

On est alors amené à rechercher les extrema de $F(t, s) = f(x(t, s), y(t, s), z(t, s))$.

On arrive à une conclusion analogue à celle du cas précédent : si (x_0, y_0, z_0) est un ext. de f sous la contrainte $g(x, y, z) = 0$ alors il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} D_x f(x_0, y_0, z_0) = \lambda_0 D_x g(x_0, y_0, z_0) \\ D_y f(x_0, y_0, z_0) = \lambda_0 D_y g(x_0, y_0, z_0) \\ D_z f(x_0, y_0, z_0) = \lambda_0 D_z g(x_0, y_0, z_0) \end{cases}$$

3.3 Extrema de $f(x, y, z)$ sous les contraintes $g_1(x, y, z) = 0$ et $g_2(x, y, z) = 0$.

Ici, apparition de deux multiplicateurs de Lagrange

20. $f(x, y) = \sin x + \sin y$ for $0 < x < \pi/2, 0 < y < \pi/2$
 21. $f(x, y) = \sin x + \sin y$ 22. $k(x, y) = (a + y)^2$
 23. $f(x, y) = (y + ax + b)^2$, where a and b are constants
 *24. Let a and b be nonzero and $f(x, y) = (ax^2 + by)^2e^{-x^2-y^2}$. Show that if $a \neq b$, then there are five critical points of f , whereas if $a = b$, then the critical points consist of a circle and its center.

In Exercises 25–28 find the extreme values of f on R .

25. $f(x, y) = x^2 - y^2$; R is the disk $x^2 + y^2 \leq 1$.
 26. $f(x, y) = ye^{-x}$; R is the rectangular region with vertices $(0, 0), (\ln 2, 0), (\ln 2, 3), (0, 3)$.
 27. $f(x, y) = 2 \sin x + 3 \cos y$; R is the square region with vertices $(0, -\pi/2), (\pi, -\pi/2), (\pi, \pi/2), (0, \pi/2)$.
 28. $f(x, y) = e^{x^2-y^2}$; R is the ring bounded by the circles $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ and $x^2 + y^2 = 2$.

In the remaining exercises in this section, assume that the required extreme values exist.

29. Find the three positive numbers whose sum is 48 and whose product is as large as possible. Calculate the product.
 30. Find the three positive numbers whose product is 48 and whose sum is as small as possible. Calculate the sum.
 31. Show that the box in the shape of a rectangular parallelepiped whose volume is the largest of any inscribed in a given sphere is a cube.
 32. A rectangular box without top is to have a volume of 32 cubic meters. Find the dimensions of such a box having the smallest possible surface area.
 33. Find the point in space the sum of whose coordinates is 48 and whose distance from the origin is minimum.
 34. Find a vector in space whose length is 16 and whose components have the largest possible sum.
 35. Let $f(x, y) = e^{-x^2}(2x^3 - 3x^2 + 1) + e^{-y^2}(2x^3 - 3x^2)$ (see Figure 13.48).

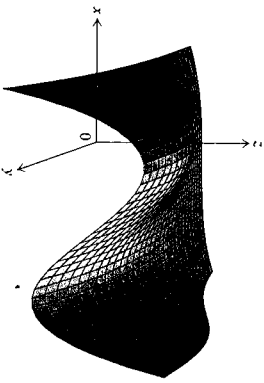


FIGURE 13.48 Graph for Exercise 35.

- a. Show that f has exactly one critical point.
 b. Show that $f(x_0, y_0)$ is a relative maximum.
 c. Show that f has no maximum value. (Compare with (1) in Section 4.6.)

One measure of the closeness of a line l with equation $mx + b$ to the point (x_1, y_1) is the square $(y_1 - (mx_1 + b))^2$, the distance between (x_1, y_1) and l measured along the line $x = x_1$ (Figure 13.49). For n fixed points $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, the corresponding measure of closeness of the line l to these points is

$$f(m, b) = \sum_{k=1}^n (y_k - (mx_k + b))^2$$

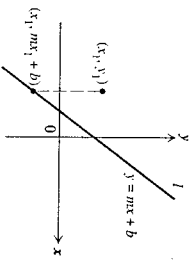


FIGURE 13.49

It can be shown that f has a minimum value $f(m_0, b_0)$, which can be determined by solving the equations $f_m(m, b) = 0$ and $f_b(m, b) = 0$ for m and b . The line $y = m_0x + b_0$ is called the line of best fit for the n given points (Figure 13.50). (Statisticians also call this line the line of regression. This terminology originated from a statistical study of the tendency of the height of the offspring of tall parents to regress toward the average height.) The method of determining the line of best fit to n given points is called the method of least squares. In Exercises 36–37 use the method of least squares to determine the line of best fit for the given collection of points.

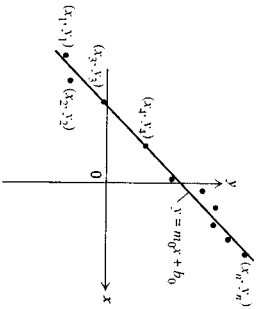


FIGURE 13.50

- 1) (2, 3), (3, 4)
 2) (1, -1), (-2, 1)

- 3) $f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$, as in (1). Assume that $A > 0$ and $AC - B^2 < 0$. Verify that there are points (x, y) as close to $(0, 0)$ as one wishes such that $f(x, y) > 0$, and other points (x, y) as close to $(0, 0)$ as one wishes such that $f(x, y) < 0$. Conclude that f has a saddle point at $(0, 0)$. (Hint: Consider points of the form $(x, 0)$ and $(-By/A, y)$.)

Applications

39. A rectangular box is tied once each way around with a string of fixed length l , and without knots (Figure 13.51). Find the maximum possible volume of the package.

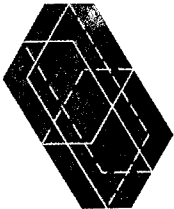


FIGURE 13.51 Figure for Exercise 39.

40. A gymnasium in the shape of a rectangular parallelepiped with volume 960,000 cubic feet is to be erected. Assume that because of decorations, the front wall will cost twice as much per square foot as the side and back walls and the floor, and the roof will cost $\frac{3}{2}$ as much as the side walls. Find the dimensions of the gymnasium that will minimize the cost.

41. A forest ranger must walk from a certain spot in a thicket back to the ranger station, first through the thicket and then

through marshland, and finally along a road, as in Figure 13.52. Suppose the ranger can proceed through the thicket at 3 kilometers per hour, through the marshland at 4 kilometers per hour, and on the road at 5 kilometers per hour. What is the most expeditious route?

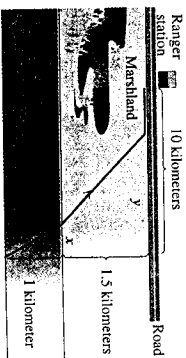


FIGURE 13.52 Figure for Exercise 41.

- *42. A rectangular piece of tin with width l is to be bent as shown in Figure 13.53. Show that the maximal cross-sectional area is obtained if $x = \frac{1}{2}l$ and $\theta = \pi/3$. (Hint: After taking partial derivatives, eliminate l from the equations you must solve.)

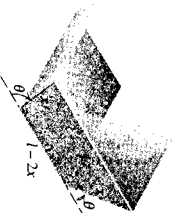


FIGURE 13.53 Figure for Exercise 42.

13.9 LAGRANGE MULTIPLIERS

Suppose that two new firms want to be hooked up to an electric supply route. Assume that for purposes of economy, the electric company decides to run electric lines to the two firms from a single terminal on the supply route. The problem is to find the point on the supply route that minimizes the total length of electric lines. In the present section we will describe a method, called Lagrange multipliers, that could assist us in finding a solution to this problem.

Lagrange Multipliers for Functions of Two Variables

In preparation for the method of Lagrange multipliers, we will consider the supply route problem in more detail. Let the two firms be located at the points P and Q . Suppose the electric supply route is denoted by C , with $T = T(x, y)$ any point on C (Figure 13.54). Finally, let $f(x, y)$ be the sum of the distances from P to T and from T to Q , so that $f(x, y) = |PT| + |TQ|$.

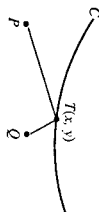


FIGURE 13.54

The points S in the xy plane for which $|PS| + |SQ|$ is constant form an ellipse with foci at P and Q . Thus in order to find the point $T_0(x_0, y_0)$ on C that minimizes the distance f , we need only consider all the ellipses that have foci at P and Q and also contact C . Of these ellipses, we must find the one, which we will denote by E , for which $|PS| + |SQ|$ is smallest (see Figure 13.55). Of course this procedure only gives us an idea of where the point $T_0(x_0, y_0)$ is, but does not tell us how to find its coordinates.

To devise a method of determining coordinates of the point $T_0(x_0, y_0)$, suppose C is the level curve $g(x, y) = c$ for a function g whose gradient exists and is never $\mathbf{0}$. The key observation is that the smallest admissible ellipse E is tangent to C . (If it were not tangent to C , then it would contact C in more than one point, and a smaller admissible ellipse could be found. See Figure 13.55 again.) This means that at $T_0(x_0, y_0)$, the normals to E and to C are parallel. Since E and C are level curves for f and g , respectively, it follows from Theorem 13.16 that $\text{grad } f(x_0, y_0)$ and $\text{grad } g(x_0, y_0)$ are normal to E and C . Consequently there is a scalar λ such that

$$\text{grad } f(x_0, y_0) = \lambda \text{ grad } g(x_0, y_0)$$

We conclude that if $T(x_0, y_0)$ is to yield the minimum value of f on C , then we need only determine the points (x, y) on C such that

$$\text{grad } f(x, y) = \lambda \text{ grad } g(x, y) \quad (1)$$

for some scalar λ .

The next theorem implies that under very general conditions on the functions f and g , the equation in (1) can assist in finding extreme values of f subject to the condition of the form $g(x, y) = c$.

THEOREM 13.22

Let f and g be differentiable at (x_0, y_0) . Let C be the level curve $g(x, y) = c$ that contains (x_0, y_0) . Assume that C is smooth, and that (x_0, y_0) is not an endpoint of the curve. If $\text{grad } g(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$ and if f has an extreme value on C at (x_0, y_0) , then there is a number λ such that

$$\text{grad } f(x_0, y_0) = \lambda \text{ grad } g(x_0, y_0)$$

Proof If $\text{grad } f(x_0, y_0) = \mathbf{0}$, then (2) is satisfied with $\lambda = 0$. Thus for the rest of the proof we will assume that $\text{grad } f(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$. Let I be an interval and

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} \quad \text{for } t \text{ in } I$$

a smooth parametrization of C . Let t_0 be such that $\mathbf{r}(t_0)$ corresponds to the point (x_0, y_0) . Then t_0 is not an endpoint of I since (x_0, y_0) is not an endpoint of C . Finally let F be defined by

$$F(t) = f(x(t), y(t)) \quad \text{for } t \text{ in } I$$

As in the proof of Theorem 13.16, the Chain Rule yields

$$F'(t) = \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \text{grad } f(x(t), y(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)$$

Since f has an extreme value on C at $(x_0, y_0) = (x(t_0), y(t_0))$, it follows that F has an extreme value on I at t_0 . Since F is differentiable on I and t_0 is not an endpoint

of I , it follows that $F'(t_0) = 0$. Therefore

$$0 = F'(t_0) = \text{grad } f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{r}'(t_0)$$

But $\mathbf{r}'(t_0) \neq \mathbf{0}$ since \mathbf{r} is a smooth parametrization of C , and $\text{grad } f(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$ by assumption. Thus $\text{grad } f(x_0, y_0)$ is perpendicular to $\mathbf{r}'(t_0)$, which itself is tangent to C . Therefore $\text{grad } f(x_0, y_0)$ is normal to C . But $\text{grad } g(x_0, y_0)$ is normal to C by Theorem 13.16. Consequently $\text{grad } f(x_0, y_0)$ and $\text{grad } g(x_0, y_0)$ are parallel; this yields (2). ■

The number λ in (2) is a "multiplier," called a **Lagrange multiplier** after the French-Italian mathematician Joseph Lagrange, whom we have encountered before. The condition $g(x, y) = c$ appearing in the theorem is called a **constraint** (or **side condition**) for the function f .

Observe that the equation $\text{grad } f(x_0, y_0) = \lambda \text{ grad } g(x_0, y_0)$ in (2) is equivalent to the pair of equations

$$f_x(x_0, y_0) = \lambda g_x(x_0, y_0) \quad \text{and} \quad f_y(x_0, y_0) = \lambda g_y(x_0, y_0)$$

The method of determining extreme values by means of Lagrange multipliers proceeds as follows:

1. Assume that f has an extreme value on the level curve $g(x, y) = c$.
2. Solve the equations

$$\text{constraint} \quad g(x, y) = c$$

$$\text{grad } f(x, y) = \lambda \text{ grad } g(x, y) \quad \begin{cases} f_x(x, y) = \lambda g_x(x, y) \\ f_y(x, y) = \lambda g_y(x, y) \end{cases}$$

3. Calculate the value of f at each point (x, y) that arises in step 2, and at each endpoint (if any) of the curve. If f has a maximum value on the level curve $g(x, y) = c$, it will be the largest of the values computed; if f has a minimum value on the level curve, it will be the smallest of the values computed.

EXAMPLE 1 Let $f(x, y) = x^2 + 4y^2$. Find the extreme values of f on the ellipse $x^2 + 2y^2 = 1$, and the points at which they occur.

Solution Let

$$g(x, y) = x^2 + 2y^2$$

so that the constraint is $g(x, y) = x^2 + 2y^2 = 1$. Since

$$\text{grad } f(x, y) = 2x\mathbf{i} + 12y^2\mathbf{j} \quad \text{and} \quad \text{grad } g(x, y) = 2x\mathbf{i} + 4y\mathbf{j}$$

the equations we will use to find x and y are

$$\text{constraint} \quad x^2 + 2y^2 = 1 \quad (3)$$

$$\text{grad } f(x, y) = \lambda \text{ grad } g(x, y) \quad \begin{cases} 2x = 2\lambda x \\ 12y^2 = 4\lambda y \end{cases} \quad (4)$$

$$\text{grad } g(x, y) = \lambda \text{ grad } f(x, y) \quad \begin{cases} 2x = 2\lambda x \\ 12y^2 = 4\lambda y \end{cases} \quad (5)$$

By (4), either $x = 0$ or $\lambda = 1$. If $x = 0$, then (3) implies that $2y^2 = 1$, so that either $y = 1/\sqrt{2}$ or $y = -1/\sqrt{2}$. If $\lambda = 1$, then (5) becomes $12y^2 = 4y$, which means that $y = 0$ or $y = \frac{1}{3}$. By (3),

$$\begin{aligned} \text{if } y = 0, \text{ then } x^2 + 2(0)^2 &= 1, \text{ so } x = 1 \text{ or } x = -1 \\ \text{if } y = \frac{1}{3}, \text{ then } x^2 + 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 &= 1, \text{ so } x = \frac{\sqrt{7}}{3} \text{ or } x = -\frac{\sqrt{7}}{3} \end{aligned}$$

Thus the only possible extreme values of f occur at $(0, 1/\sqrt{2})$, $(0, -1/\sqrt{2})$, $(1, 0)$, $(-1, 0)$, $(\sqrt{7}/3, \frac{1}{3})$, and $(-\sqrt{7}/3, \frac{1}{3})$. Since

$$\begin{aligned} f\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= \sqrt{2} & f(1, 0) &= 1 = f(-1, 0) \\ f\left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= -\sqrt{2} & f\left(\frac{\sqrt{7}}{3}, \frac{1}{3}\right) &= \frac{25}{27} = f\left(-\frac{\sqrt{7}}{3}, \frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

we conclude that the maximum value $\sqrt{2}$ of f occurs at $(0, 1/\sqrt{2})$ and the minimum value $-\sqrt{2}$ of f occurs at $(0, -1/\sqrt{2})$. \square

EXAMPLE 2 Let $f(x, y) = 3x^2 + 2y^2 - 4y + 1$. Find the extreme values of f on the disk $x^2 + y^2 \leq 16$.

Solution By the Maximum-Minimum Theorem f has extreme values on the disk and it can have them only on the boundary $x^2 + y^2 = 16$ or at critical points in the interior.

First, we use Lagrange multipliers to find the possible extreme values of f on the circle $x^2 + y^2 = 16$. Let $g(x, y) = x^2 + y^2$, so that the constraint is $g(x, y) = x^2 + y^2 = 16$. Since

$$\begin{aligned} \text{grad } f(x, y) &= 6xi + (4y - 4)j & \text{and} & \text{ grad } g(x, y) = 2xi + 2yj \\ \text{the equations we will use to find } x \text{ and } y \text{ are} & & & \\ \text{constraint} & & & x^2 + y^2 = 16 \end{aligned} \tag{6}$$

$$\text{grad } f(x, y) = \lambda \text{ grad } g(x, y) \quad \begin{cases} 6x = 2\lambda \\ 4y - 4 = 2y\lambda \end{cases} \tag{7}$$

By (7), either $x = 0$ or $\lambda = 3$. If $x = 0$, then it follows from (6) that $y = \pm 4$. If $\lambda = 3$, then (8) becomes

$$4y - 4 = 6y, \text{ so that } y = -2$$

Then (6) implies that

$$x^2 + (-2)^2 = 16, \text{ so that } x = \sqrt{12} \text{ or } x = -\sqrt{12}$$

Thus f can have its extreme values on the circle $x^2 + y^2 = 16$ only at $(0, 4)$, $(0, -4)$, $(\sqrt{12}, -2)$, or $(-\sqrt{12}, -2)$.

Turning to the interior of the disk, we find that

$$f_x(x, y) = 6x \text{ and } f_y(x, y) = 4y - 4$$

so that $f_x(x, y) = 0 = f_y(x, y)$ only if $x = 0$ and $y = 1$. Thus f can also

extreme value on the disk at $(0, 1)$. Finally, we calculate that

$$\begin{aligned} f(0, 4) &= 17 & f(\sqrt{12}, -2) &= 53 = f(-\sqrt{12}, -2) \\ f(0, -4) &= 49 & f(0, 1) &= -1 \end{aligned}$$

Our conclusion is that the maximum value of f on the disk $x^2 + y^2 \leq 16$ is 53 and the minimum value is -1 . \square

The Lagrange Method for Functions of Three Variables

Next we consider the problem of finding extreme values of a function of three variables subject to a constraint of the form $g(x, y, z) = c$. By an argument similar to that used for functions of two variables, it is possible to show that if f has such an extreme value at (x_0, y_0, z_0) , then $\text{grad } f(x_0, y_0, z_0)$ and $\text{grad } g(x_0, y_0, z_0)$ are both normal to the level surface $g(x, y, z) = c$ at (x_0, y_0, z_0) , and hence are parallel to each other. Thus there is a number λ , again called a Lagrange multiplier, such that

$$\text{grad } f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \text{ grad } g(x_0, y_0, z_0)$$

To find the extreme values of f subject to the constraint $g(x, y, z) = c$, we follow the same approach as in steps 1–3 for functions of two variables:

1. Assume that f has an extreme value on the level surface $g(x, y, z) = c$.
2. Solve the equations

$$\begin{aligned} \text{constraint} & & g(x, y, z) &= c \\ \text{grad } f(x, y, z) &= \lambda \text{ grad } g(x, y, z) & \begin{cases} f_x(x, y, z) = \lambda g_x(x, y, z) \\ f_y(x, y, z) = \lambda g_y(x, y, z) \\ f_z(x, y, z) = \lambda g_z(x, y, z) \end{cases} \end{aligned}$$
3. Calculate $f(x, y, z)$ for each point (x, y, z) that arises from step 2. If f has a maximum (minimum) value on the level surface, it will be the largest (smallest) of the values computed.

EXAMPLE 3 Suppose heavy-duty tape is to be applied on the bottom and side edges of a rectangular carton (Figure 13.56). If 96 inches of tape are available, find the maximum volume of the carton.

Solution Let x denote the length, y the width, and z the height of the carton. If V represents the volume, then $V(x, y, z) = xyz$. Letting $g(x, y, z)$ denote the length of the tape used, we find that $g(x, y, z) = 2x + 2y + 4z$. Because

$$\begin{aligned} \text{grad } V(x, y, z) &= yzi + xzj + xyk & \text{and} & \text{ grad } g(x, y, z) = 2i + 2j + 4k \\ \text{the equations we will use to find } x, y, \text{ and } z \text{ are} & & & \\ \text{constraint} & & & 2x + 2y + 4z = 96 \end{aligned} \tag{9}$$

$$\text{grad } f(x, y, z) = \lambda \text{ grad } g(x, y, z) \quad \begin{cases} yz = 2\lambda & (10) \\ xz = 2\lambda & (11) \\ xy = 4\lambda & (12) \end{cases}$$

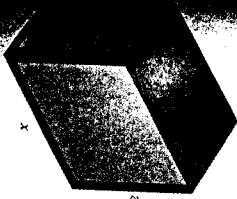


FIGURE 13.56

First we solve for λ in terms of x , y , and z in (10)–(12), obtaining

$$\lambda = \frac{yz}{2} = \frac{xz}{2} = \frac{xy}{4} \quad (13)$$

Since $V(x, y, z) = 0$ if x , y , or z is 0, and since 0 is obviously not the maximum value of V subject to (9), we can assume that x , y , and z are different from 0. Then (13) tells us that $x = y$ and $z = \frac{1}{2}y$. Substituting for x and z in (9) yields

$$96 = 2y + 2y + 4\left(\frac{1}{2}y\right) = 6y, \quad \text{so that } y = 16$$

Thus $x = 16$ and $z = \frac{1}{2}(16) = 8$, and therefore $V(16, 16, 8)$ is the only possible extreme value of V subject to the constraint. Since we are assuming that V has a maximum value subject to the constraint, we conclude that $V(16, 16, 8) = 2048$ is that value. Consequently the maximum possible volume of the carton is 2048 cubic inches. \square

EXAMPLE 4 Find the minimum distance from a point on the surface $xy + 2xz = 5\sqrt{5}$ to the origin.

Solution We could let

$$f_1(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

which represents the distance from (x, y, z) to the origin, and seek the minimum value of f_1 on the surface. However, the computations involved in using Lagrange multipliers will be simplified if we minimize f_1^2 on the surface. Thus we let

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

and minimize f subject to the constraint

$$g(x, y, z) = xy + 2xz = 5\sqrt{5}$$

Notice that f and f_1 have extreme values at identical points, so using f instead of f_1 will not alter the point we find whose distance from the origin is minimum. Because

$$\text{grad } f(x, y, z) = 2xi + 2yj + 2zk$$

and

$$\text{grad } g(x, y, z) = (y + 2z)i + xj + 2xk$$

the equations we will use to find x , y , and z are

$$\text{constraint} \quad xy + 2xz = 5\sqrt{5} \quad (14)$$

$$\begin{cases} 2x = (y + 2z)\lambda & (15) \\ 2y = x\lambda & (16) \\ 2z = 2x\lambda & (17) \end{cases}$$

$$\text{grad } f(x, y, z) = \lambda \text{ grad } g(x, y, z)$$

If λ were 0, then $x = y = z = 0$ by (15)–(17), so (14) would not hold. Thus $\lambda \neq 0$, so that by (16) and (17),

$$x \stackrel{(16)}{=} \frac{2y}{\lambda} \quad \text{and} \quad z \stackrel{(17)}{=} \frac{x\lambda}{2} \stackrel{(16)}{=} \frac{y\lambda}{2} \quad (18)$$

If y were 0, then by (18) we would have $x = 0$ and $z = 0$, which would mean that (14) would not hold. Thus $y \neq 0$. Using (18) to substitute for x and z in (15), we find

that

$$2\left(\frac{2y}{\lambda}\right) = [y + 2(2y)]\lambda$$

so that since $y \neq 0$,

$$\frac{4}{\lambda} = 5\lambda, \quad \text{or} \quad \lambda^2 = \frac{4}{5} \quad (19)$$

Using (18) to substitute for x and z in (14), we obtain

$$5\sqrt{5} = \left(\frac{2y}{\lambda}\right)y + 2\left(\frac{2y}{\lambda}\right)(2y) = \frac{10}{\lambda}y^2 \quad (20)$$

From (20) we see that λ is positive. Therefore (19) implies that $\lambda = 2/\sqrt{5}$, and then (20) implies that $y = 1$ or $y = -1$. By (18),

$$\text{if } y = 1, \quad \text{then } x = \frac{2y}{\lambda} = \sqrt{5} \text{ and } z = 2y = 2$$

$$\text{if } y = -1, \quad \text{then } x = \frac{2y}{\lambda} = -\sqrt{5} \text{ and } z = 2y = -2$$

Consequently the only points on the surface $xy + 2xz = 5\sqrt{5}$ that can have the minimum distance from the origin are $(\sqrt{5}, 1, 2)$ and $(-\sqrt{5}, -1, -2)$. Since by assumption the minimum distance exists and is the minimum value of f_1 on the surface, and since

$$f_1(\sqrt{5}, 1, 2) = \sqrt{10} = f_1(-\sqrt{5}, -1, -2)$$

the minimum distance from a point on the surface to the origin is $\sqrt{10}$. \square

EXERCISES 13.9

In Exercises 1–6 find the extreme values of f subject to the given constraint. In each case assume that the extreme values exist.

- $f(x, y) = x + y^2$, $x^2 + y^2 = 4$
- $f(x, y) = xy$, $(x + 1)^2 + y^2 = 1$
- $f(x, y) = x^2 + 2y^3$, $x^2 + y^2 = 1$
- $f(x, y, z) = y^3 + xz^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
- $f(x, y, z) = xyz$, $x^2 + y^2 + 4z^2 = 6$
- $f(x, y, z) = xy + yz$, $x^2 + y^2 + z^2 = 8$

In Exercises 7–10 find the minimum value of f subject to the given constraint. In each case assume that the minimum value exists.

- $f(x, y) = 4x^2 + y^3 + 3y + 7$, $2x^2 + \frac{1}{2}y^2 = \frac{3}{2}$
- $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2$, $x + y + z = 4$

- $f(x, y, z) = x^2 + 8y^2 + 27z^4$, $x + y + z = \frac{11}{3}$
- $f(x, y, z) = 3z - x - 2y$, $z = x^2 + 4y^2$

In Exercises 11–14 find the extreme values of f in the region described by the given inequalities. In each case assume that the extreme values exist.

- $f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 2y - 3$, $x^2 + y^2 \leq 4$
- $f(x, y) = x^3 + x^2 + \frac{y^2}{3}$, $x^2 + y^2 \leq 36$
- $f(x, y) = xy$, $2x^2 + y^2 \leq 4$
- $f(x, y) = 16 - x^2 - 4y^2$, $x^4 + 2y^4 \leq 1$

In the remaining exercises in this section, assume that the required extreme values exist.

- Find the points on the surface $x^2 - yz = 1$ that are closest to the origin.

16. Find the points on the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ that are closest to or farthest from the point $(4, 2, 1)$.
17. A triangle is to be inscribed in the ellipse $\frac{1}{2}x^2 + y^2 = 1$ with one vertex of the triangle at $(-2, 0)$ and the opposite side perpendicular to the x axis. Find the largest possible area of the triangle.
18. Let x and y denote the acute angles of a right triangle. Find the maximum value of $\sin x \sin y$.
19. Let x , y , and z denote the angles of an arbitrary triangle. Find the maximum value of $\sin x \sin y \sin z$.
20. Find the minimum volume of a tetrahedron in the first octant bounded by the planes $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, and a plane tangent to the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. (*Hint:* If the plane is tangent to the sphere at the point (x_0, y_0, z_0) , then the volume of the tetrahedron is $1/(6x_0y_0z_0)$.)
21. A rectangular parallelepiped lies in the first octant, with three sides on the coordinate planes and one vertex on the plane $2x + y + 4z = 12$. Find the maximum possible volume of the parallelepiped.

Use Lagrange multipliers to solve Exercises 22–25, which also appear as maximum-minimum problems in Chapter 4.

22. A cylindrical can with bottom and no top has volume V . Find the radius of the can with the smallest possible surface area. (This is Exercise 33 in Section 4.6.)
23. Find the points on the parabola $y = x^2 + 2x$ that are closest to the point $(-1, 0)$. (This is Exercise 25 in Section 4.6.)
24. A rectangular printed page is to have margins 2 inches wide at the top and the bottom and margins 1 inch wide on each of the two sides. If the page is to have 35 square inches of printing, determine the minimum possible area of the page itself. (This is Exercise 31 in Section 4.6.)
25. An isosceles triangle is inscribed in a circle of radius r . Find the maximum possible area of the triangle. (This is Exercise 60 in Section 4.1.)

Lagrange multipliers can be used to find the extreme values of functions subject to more than one constraint. Suppose we wish to find the extreme values of a function f of three variables satisfying the two constraints

$$g_1(x, y, z) = c_1 \quad \text{and} \quad g_2(x, y, z) = c_2 \quad (21)$$

where c_1 and c_2 are constants. The method is to solve the equation

$$\text{grad } f(x, y, z) = \lambda \text{ grad } g_1(x, y, z) + \mu \text{ grad } g_2(x, y, z)$$

along with the constraints in (21) for (x, y, z) and for λ and μ , if necessary and then to determine the largest and smallest values of f . Both λ and μ are called Lagrange multipliers. Use this method to solve Exercises 26–27.

26. Find the minimum distance between the origin and a point on the intersection of the paraboloid $z = \frac{1}{2} - x^2 - y^2$ and the plane $x + 2y = 1$.
27. Find the distance from the point $(2, -2, 3)$ to the intersection of the planes

$$2x - y + 3z = 1 \quad \text{and} \quad -x + 3y + z = -3$$

Applications

28. A construction company needs a type of tunnel to reduce spillage when trucks are loaded with sand. The tunnel is to consist of a circular cylinder with radius 3 feet on top of a cone with the same radius (Figure 13.57).
 - a. If the entire tunnel is to have a capacity (volume) of 300 cubic feet, find the heights H and h of the cylinder and cone that minimize the amount of material (surface area) needed.
 - b. How, if at all, would the answer to part (a) be altered if the capacity were to be 400 cubic feet?

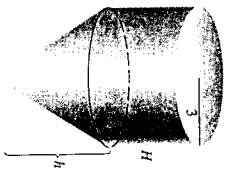


FIGURE 13.57 Figure for Exercise 28.

29. A rectangular storage box with volume 12 cubic inches is to be made in the form shown in Figure 13.58. Find the dimensions that will minimize the total surface area of the box. (*Hint:* Solve for λ in each equation you obtain.)

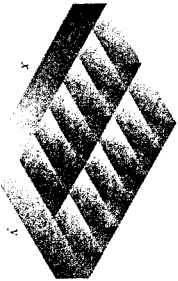


FIGURE 13.58 Figure for Exercise 29.

30. A rectangular box, open at the top, is to have a volume of 1728 cubic inches. Find the dimensions that will minimize the cost of the box if
 - a. the material for the bottom costs 16 times as much per unit area as the material for the sides,
 - b. the material for the bottom costs twice as much per unit area as the material for the sides.

31. In this exercise you will solve a realistic version of Exercise 36 in Section 4.6. A cylindrical pipe of radius r and length l must be slid on the floor from one corridor to a perpendicular corridor, each 3 meters wide (Figure 13.59). Find the dimensions of the pipe that maximize its volume V . (*Hint:* As in Figure 13.59, assume that the opposite ends of the pipe touch the walls when the angle between the pipe and the wall is $\pi/4$.)

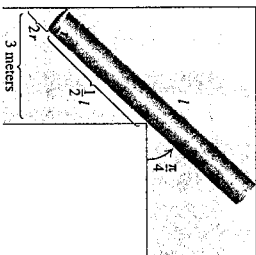


FIGURE 13.59 Figure for Exercise 31.

32. Suppose that on your vacation you plan to spend x days in San Francisco, y days in your home town, and z days in New York. You calculate that your total enjoyment $f(x, y, z)$ will be given by

$$f(x, y, z) = 2x + y + 2z$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 225$$

If plans and financial limitations dictate that

how long should each stay be to maximize your enjoyment?

33. The ground state energy $E(x, y, z)$ of a particle of mass m in a rectangular box with dimensions x , y , and z is given by

$$E(x, y, z) = \frac{h^2}{8m} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \right)$$

where h is a constant. Assuming that the volume V of the box is fixed, find the values of x , y , and z that minimize the value of E .

34. The object distance p , image distance q , and focal length f

of a simple lens satisfy the equation

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$

Determine the minimum distance $p + q$ between the object and the image for a given focal length.

35. Fermat's Principle states that light always travels the path between points requiring the least time. Suppose light travels from a point A in one medium in which it has velocity v to a point B in a second medium in which it has velocity u . Using the fact that, in a single medium, light travels in a straight line, and using Figure 13.60, show that the light is bent according to Snell's Law:

$$\frac{\sin \theta}{v} = \frac{\sin \phi}{u}$$

(*Hint:* The constraint is $x + y = l$, where x and y are the distances indicated in Figure 13.60.)

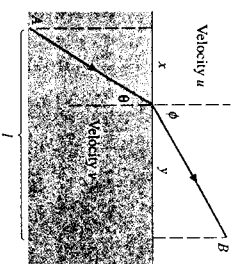


FIGURE 13.60 Figure for Exercise 35.

36. A pharmaceutical company plans to make capsules containing a given volume V of medicine. One executive would like to have the capsules in the form of a right circular cylinder having length h and base radius r with a hemisphere at each end (see Figure 13.61). A second executive objects to the wastefulness of materials, and contends that the same volume could be contained in a spherical capsule having a smaller surface area. Which executive should get the next promotion?

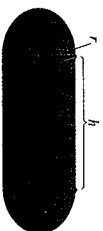


FIGURE 13.61 Figure for Exercise 36.

37. Let x represent capital and y labor in the manufacture of $f(x, y)$ units of a given product. Assume that capital costs a

Chapitre 6

Compléments de calcul matriciel

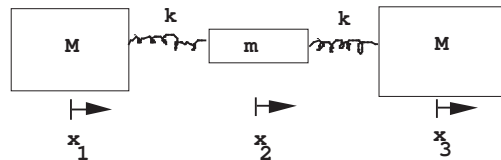
6.1 Une application de la diagonalisation

Nous allons expliquer comment la diagonalisation peut être utile dans la résolution d'équations différentielles couplées.

6.1.1 Introduction

Considérons 3 masses vibrantes situées sur l'axe X (on peut voir cette situation comme celle de trois atomes vibrant entre eux). On repère les masses par leur déplacement par rapport à leur position d'équilibre, x_1, x_2, x_3 . La physique indique que ce système est régi par les équations différentielles suivantes (t =variable temporelle, m, M, k constantes strictement positives)

$$\begin{cases} D_t^2 x_1 &= -\frac{k}{M}(x_1 - x_2) \\ D_t^2 x_2 &= -\frac{k}{m}(x_2 - x_1) - \frac{k}{m}(x_2 - x_3) \\ D_t^2 x_3 &= -\frac{k}{M}(x_3 - x_2). \end{cases}$$



Le but est de déterminer la manière dont les masses vibrent entre elles, c'est-à-dire la forme des solutions $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$, t étant la variable temporelle.

6.1.2 Résolution

Le système précédent peut s'écrire sous la forme

$$D_t^2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{k}{M} & \frac{k}{M} & 0 \\ \frac{k}{m} & -\frac{2k}{m} & \frac{k}{m} \\ 0 & \frac{k}{M} & -\frac{k}{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \quad (6.1)$$

Posons

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{k}{M} & \frac{k}{M} & 0 \\ \frac{k}{m} & -\frac{2k}{m} & \frac{k}{m} \\ 0 & \frac{k}{M} & -\frac{k}{M} \end{pmatrix}.$$

Essayons de diagonaliser cette matrice (cela conduira à un découplage des équations).

On a

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} -\frac{k}{M} - \lambda & \frac{k}{M} & 0 \\ \frac{k}{m} & -\frac{2k}{m} - \lambda & \frac{k}{m} \\ 0 & \frac{k}{M} & -\frac{k}{M} - \lambda \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{k}{M} & 0 \\ -\lambda & -\frac{2k}{m} - \lambda & \frac{k}{m} \\ -\lambda & \frac{k}{M} & -\frac{k}{M} - \lambda \end{vmatrix} \quad (C'_1 = C_1 + C_2 + C_3) \\
 &= -\lambda \begin{vmatrix} 1 & \frac{k}{M} & 0 \\ 1 & -\frac{2k}{m} - \lambda & \frac{k}{m} \\ 1 & \frac{k}{M} & -\frac{k}{M} - \lambda \end{vmatrix} \\
 &= -\lambda \begin{vmatrix} 1 & \frac{k}{M} & 0 \\ 0 & -\frac{2k}{m} - \frac{k}{M} - \lambda & \frac{k}{m} \\ 0 & 0 & -\frac{k}{M} - \lambda \end{vmatrix} \\
 &= -\lambda \left(\frac{k}{M} + \lambda \right) \left(\lambda + \frac{2k}{m} + \frac{k}{M} \right).
 \end{aligned}$$

Les valeurs propres de cette matrice sont donc

$$0, -\frac{k}{M}, -\frac{k}{M} - \frac{2k}{m}.$$

Comme ces valeurs propres sont distinctes, la matrice est diagonalisable.

Les vecteurs propres X relatifs à la valeur propre 0 vérifient

$$\begin{pmatrix} -\frac{k}{M} & \frac{k}{M} & 0 \\ \frac{k}{m} & -\frac{2k}{m} & \frac{k}{m} \\ 0 & \frac{k}{M} & -\frac{k}{M} \end{pmatrix} X = 0.$$

Si

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

cette équation est équivalente au système

$$\begin{cases} x = y \\ x - 2y + z = 0 \\ y = z \end{cases}$$

ou encore au système

$$\begin{cases} x = y \\ y = z \end{cases}$$

Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 0 s'écrivent donc

$$c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = \text{constante} \neq 0.$$

Les vecteurs propres X relatifs à la valeur propre $-\frac{k}{M}$ vérifient

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{k}{M} & 0 \\ \frac{k}{m} & -\frac{2k}{m} + \frac{k}{M} & \frac{k}{m} \\ 0 & \frac{k}{M} & 0 \end{pmatrix} X = 0.$$

Si

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

cette équation est équivalente au système

$$\begin{cases} y = 0 \\ \frac{k}{m}x + \left(-\frac{2k}{m} + \frac{k}{M}\right)y + \frac{k}{m}z = 0 \end{cases}$$

ou encore au système

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = -x \end{cases}$$

Les vecteurs propres s'écrivent donc

$$c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad c = \text{constante} \neq 0.$$

Les vecteurs propres X relatifs à la valeur propre $-\frac{k}{M} - \frac{2k}{m}$ vérifient

$$\begin{pmatrix} \frac{2k}{m} & \frac{k}{M} & 0 \\ \frac{k}{m} & \frac{k}{M} & \frac{k}{m} \\ 0 & \frac{k}{M} & \frac{2k}{m} \end{pmatrix} X = 0.$$

Si

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

cette équation est équivalente au système

$$\begin{cases} \frac{2k}{m}x + \frac{k}{M}y = 0 \\ \frac{k}{m}x + \frac{k}{M}y + \frac{k}{m}z = 0 \\ \frac{k}{M}y + \frac{2k}{m}z = 0 \end{cases}$$

ou encore au système

$$\begin{cases} x = z \\ y = -\frac{2M}{m}x \end{cases}$$

Les vecteurs propres s'écrivent donc

$$c \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2M}{m} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = \text{constante} \neq 0.$$

On a donc

$$\Delta := S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{k}{M} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-k}{M} - \frac{2k}{m} \end{pmatrix}$$

avec

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{-2M}{m} \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si on pose

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

le système (6.1) est alors équivalent au système

$$D_t^2 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \Delta \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

lequel s'écrit encore

$$\begin{cases} D_t^2 y_1 = 0 \\ D_t^2 y_2 = -\frac{k}{M} y_2 \\ D_t^2 y_3 = -\left(\frac{k}{M} + \frac{2k}{m}\right) y_3. \end{cases}$$

On constate donc que les équations sont maintenant découplées et que chacune d'entre elles se résout aisément (puisque c'est une équation différentielle linéaire à coefficients constants homogène d'ordre deux).

Résolution de $D_t^2 y_1 = 0$.

L'ensemble des solutions réelles de cette équation est l'ensemble des fonctions qui s'écrivent

$$y_1(t) = r_1 t + r_2, \quad r_1, r_2 \in \mathbb{R}.$$

Résolution de $D_t^2 y_2 = -\frac{k}{M} y_2$.

L'ensemble des solutions de cette équation est l'ensemble des fonctions qui s'écrivent

$$y_2(t) = c_1 e^{i\sqrt{k/M}t} + c_2 e^{-i\sqrt{k/M}t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}$$

et l'ensemble des solutions réelles est l'ensemble des fonctions qui s'écrivent

$$y_2(t) = r_1 \cos(\sqrt{k/M}t) + r_2 \sin(\sqrt{k/M}t), \quad r_1, r_2 \in \mathbb{R}.$$

Résolution de $D_t^2 y_3 = -\left(\frac{k}{M} + \frac{2k}{m}\right) y_3$.

Ce cas est analogue au précédent. L'ensemble des solutions réelles est l'ensemble des fonctions qui s'écrivent

$$y_3(t) = r_1 \cos(\sqrt{k/M + 2k/m}t) + r_2 \sin(\sqrt{k/M + 2k/m}t), \quad r_1, r_2 \in \mathbb{R}.$$

Finalement, les solutions x_1, x_2, x_3 sont données par

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= S \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{-2M}{m} \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \\ &= y_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2M/m \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où y_1 ne fait intervenir que la fréquence nulle, y_2 ne fait intervenir que la fréquence $\sqrt{k/M}$ et y_3 ne fait intervenir que la fréquence $\sqrt{k/M + 2k/m}$. Ces fréquences sont appelées **modes normaux de vibration**.

6.1.3 Conclusion

Le mouvement des trois masses, déterminé par le vecteur de fonctions (du temps)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

apparaît donc comme une superposition de trois “mouvements fondamentaux”, chacun faisant intervenir un mode normal:

$$(a) y_1(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (b) y_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (c) y_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2M/m \\ 1 \end{pmatrix}$$

qui correspondent respectivement aux mouvements suivants

$$(a) x_1(t) = x_2(t) = x_3(t):$$

les masses bougent sans vibration entre elles

$$(b) x_1(t) = -x_3(t), \quad x_2(t) = 0:$$

immobilité de la masse centrale et mouvement opposé des masses extrêmes

$$(c) x_1(t) = x_3(t), \quad x_2(t) = -2M/m x_3(t):$$

même mouvement pour les masses extrêmes et mouvement opposé pour la masse centrale.

6.2 Matrices réelles orthogonales

Voir notamment les notes du cours *Mathématiques générales A*.

6.3 Matrices réelles symétriques

Rappelons qu'une matrice A

- est réelle symétrique lorsque tous ses éléments sont réels et qu'elle vérifie $\tilde{A} = A$ (ce qui implique nécessairement qu'elle est carrée)

- est hermitienne lorsque $A = A^*$ (ce qui implique nécessairement qu'elle est carrée); on voit donc qu'une matrice réelle symétrique n'est rien d'autre qu'une matrice hermitienne réelle

- est une matrice unitaire lorsque $A^*A = I = AA^*$ (ce qui implique nécessairement qu'elle est carrée); on voit donc qu'une matrice réelle orthogonale n'est rien d'autre qu'une matrice réelle unitaire.

6.3.1 A propos des valeurs propres

Proposition 6.3.1 *Les valeurs propres d'une matrice hermitienne sont toujours réelles.*

Preuve. Soient H une matrice hermitienne, λ une valeur propre de H et X un vecteur propre relatif à cette valeur propre. Comme on a

$$HX = \lambda X$$

on obtient

$$X^*HX = X^*(HX) = \lambda X^*X$$

et aussi

$$X^*HX = (HX)^*X = \bar{\lambda} X^*X.$$

Comme $X^*X > 0$, on obtient finalement

$$\lambda = \bar{\lambda}.$$

□

6.3.2 Diagonalisation

Proposition 6.3.2 *Soit H est une matrice hermitienne. Si X_1, X_2 sont respectivement des vecteurs propres de H de valeur propre λ_1, λ_2 , avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$, alors*

$$X_1^* X_2 = 0.$$

En particulier, si H est une matrice réelle symétrique et si X_1, X_2 sont respectivement des vecteurs propres réels de H de valeur propre λ_1, λ_2 , avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$, alors

$$\widetilde{X}_1 X_2 = 0.$$

Remarquons que la thèse signifie que les vecteurs propres X_1, X_2 sont orthogonaux.

Preuve. On a en effet

$$\begin{aligned} X_1^* H X_2 &= X_1^* (H X_2) = \lambda_2 X_1^* X_2 \\ &= (H X_1) X_2 = \lambda_1 X_1^* X_2 \end{aligned}$$

donc

$$(\lambda_1 - \lambda_2) X_1^* X_2 = 0.$$

Comme les deux valeurs propres sont différentes, on obtient finalement

$$X_1^* X_2 = 0.$$

□

Propriété 6.3.3 *Soient X_1, X_2 deux vecteurs colonnes avec $X_1 \neq 0$. Alors le vecteur*

$$Y_2 = X_2 - \frac{X_2^* X_1}{X_1^* X_1} X_1$$

vérifie

$$X_1^* Y_2 = 0.$$

Dans le cas réel, ce résultat s'énonce comme suit.

Soient X_1, X_2 deux vecteurs colonnes réels avec $X_1 \neq 0$. Alors le vecteur

$$Y_2 = X_2 - \frac{\widetilde{X}_2 X_1}{\widetilde{X}_1 X_1} X_1$$

vérifie

$$\widetilde{X}_1 Y_2 = 0.$$

L'interprétation géométrique de ce résultat est la suivante: Y_2 est le tableau des composantes du vecteur égal à la différence entre le vecteur de composantes X_2 et la projection orthogonale celui-ci sur la droite vectorielle déterminée par le vecteur de composantes X_1 .

Preuve. A compléter.

Théorème 6.3.4 *Une matrice hermitienne est toujours diagonalisable par une matrice unitaire.*

En particulier, une matrice réelle symétrique est toujours diagonalisable par une matrice orthogonale.

Preuve. A compléter.

6.3.3 Propriétés pour la recherche des extrema

Nous n'envisageons ici que le cas d'une matrice de dimension 2.

Soit une matrice réelle symétrique

$$H = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$. Notons

$$\lambda_1, \lambda_2$$

les valeurs propres de cette matrice. Vu ce qui précède, on sait que ce sont des nombres réels.

Cela étant, on a les résultats suivants.

Théorème 6.3.5 *a) Les propriétés suivantes sont équivalentes*

- (i) $a > 0$ et $\det(H) > 0$
- (ii) $\tilde{X}HX > 0$ pour tout vecteur colonne réel non nul X
- (iii) $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$.

b) Les propriétés suivantes sont équivalentes

- (i) $a < 0$ et $\det(H) > 0$
- (ii) $\tilde{X}HX < 0$ pour tout vecteur colonne réel non nul X
- (iii) $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 < 0$.

c) Les propriétés suivantes sont équivalentes

- (i) $\det(H) < 0$
- (ii) $\tilde{X}HX$ peut prendre des valeurs strictement positives et strictement négatives
- (iii) $\lambda_1\lambda_2 < 0$.

Preuve. A compléter.

Notons que l'on a encore les résultats suivants.

Proposition 6.3.6 *On a $\tilde{X}HX \geq 0$ (resp. ≤ 0) pour tout vecteur colonne réel X si et seulement si $\lambda_1 \geq 0$ et $\lambda_2 \geq 0$ (resp. $\lambda_1 \leq 0$ et $\lambda_2 \leq 0$).*

6.4 Matrices et formule de changement de base

6.4.1 Introduction

Nous renvoyons aux notes du cours de *Mathématiques générales A* pour un rappel concernant deux exemples fondamentaux de changement de repère du plan: la translation et la rotation.

6.4.2 Changement de base

En fait, un changement de repère (dans le plan ou dans l'espace) consiste à changer de vecteurs de base et à changer l'origine. On montre que tout changement de base est caractérisé par une matrice S (de dimension deux si on travaille avec les vecteurs du plan, de dimension trois si on travaille avec les vecteurs de l'espace), appelée *matrice de changement de base*, dont les colonnes sont formées par les composantes des vecteurs de la nouvelle base dans l'ancienne. Elle est aussi caractérisée par la *formule de changement de base*

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}}, \quad \text{resp.} \quad \boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}}$$

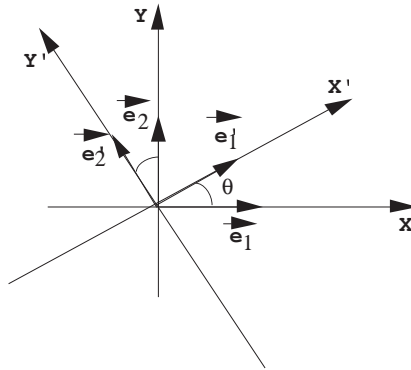
où les tableaux

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad (\text{resp.} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix})$$

représentent les composantes d'un même vecteur \vec{u} respectivement dans l'ancienne et dans la nouvelle base.

6.4.3 Exemples

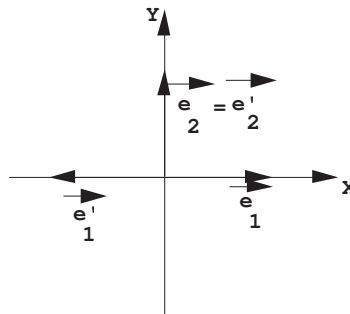
1) Ainsi, dans le cas d'une rotation des axes du repère d'amplitude θ , nous avons (cf cours *Mathématiques générales A*)



$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

2) Dans le cas où la nouvelle base est

$$\vec{e}'_1 = -\vec{e}_1, \quad \vec{e}'_2 = \vec{e}_2$$



(symétrie orthogonale par rapport à l'axe Y), on a

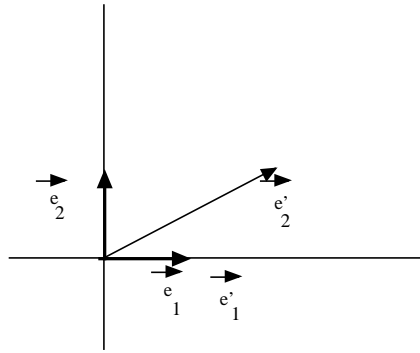
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Sous forme non matricielle, on a simplement

$$x = -x', \quad y = y'.$$

3) Dans le cas où la nouvelle base est

$$\vec{e}'_1 = \vec{e}_1, \quad \vec{e}'_2 = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2$$



on a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

6.4.4 Changement de base orthonormée

Sur les deux exemples qui ne font intervenir que des bases orthonormées, nous voyons que la matrice de changement de base est une matrice orthogonale. En fait, il s'agit d'une propriété générale.

Propriété 6.4.1 *Dans le plan (ou dans l'espace), étant donné une base orthonormée, une nouvelle base est orthonormée aussi si et seulement si la matrice de changement de base est orthogonale.*

Preuve. Cela est dû au fait que les colonnes de la matrice de changement de base sont formées des composantes des vecteurs de la nouvelle base dans l'ancienne et de l'expression du produit scalaire de deux vecteurs à l'aide des composantes de ces vecteurs dans une base orthonormée. \square

En dimension deux, remarquons que la matrice de changement de base s'écrit alors

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

avec $a^2 + b^2 = 1$.

Etant donné $a, b \in \mathbb{R}$, $a^2 + b^2 = 1 = a^2 + (-b)^2$, on sait qu'il existe un unique $\theta \in [0, 2\pi[$ (ou tout autre intervalle de longueur 2π) tel que

$$a = \cos \theta, \quad -b = \sin \theta.$$

La matrice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

s'écrit donc

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

et représente donc toujours une rotation.

On a aussi

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & b \\ -b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cela signifie que le changement de base qui correspond à la matrice orthogonale

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

est en fait la composée d'une rotation et d'une symétrie par rapport à l'un des axes.

6.5 Matrices réelles orthogonales de déterminant égal à 1

Nous envisageons uniquement le cas des matrices de dimension 2 et 3.

Par définition, une matrice orthogonale de déterminant égal à 1 est appelée une matrice de rotation.

6.5.1 Dimension 2

Nous renvoyons au notes du cours *Mathématiques générales A*.

6.5.2 Dimension 3

Dans ce cas, la forme canonique de ces matrices n'est pas aussi simple. Leur description peut s'effectuer par le biais de l'interprétation géométrique à l'aide des *angles d'Euler*.

A compléter.

6.6 Matrices et applications linéaires

Dans ce qui suit, on travaille dans le plan et on se ramène au cas des vecteurs liés en un point. Pour traiter les vecteurs libres, il suffit de les déplacer tous sur des représentants ayant comme origine un point donné et d'effectuer les transformations à partir de ceux-ci.

Une transformation (ou encore opérateur, ou encore application) linéaire est une application qui est telle que l'image d'une somme de multiples de vecteurs est égale à la somme des multiples des images des vecteurs. Autrement dit, si T désigne l'opérateur¹:

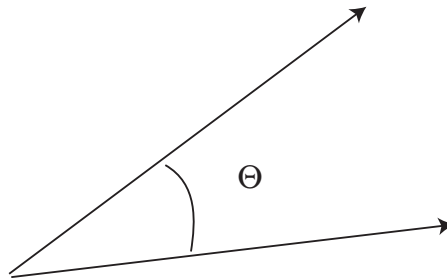
$$T(r\vec{u} + s\vec{v}) = r T\vec{u} + s T\vec{v}$$

pour tous réels (ou complexes) r, s et tous vecteurs \vec{u}, \vec{v} .

6.6.1 Exemples

LA ROTATION COMME TRANSFORMATION LINÉAIRE

Au sein de l'ensemble des vecteurs du plan liés en un point, considérons la rotation d'amplitude θ .



Fixons un repère orthonormé.

Tout vecteur \vec{u} s'écrit

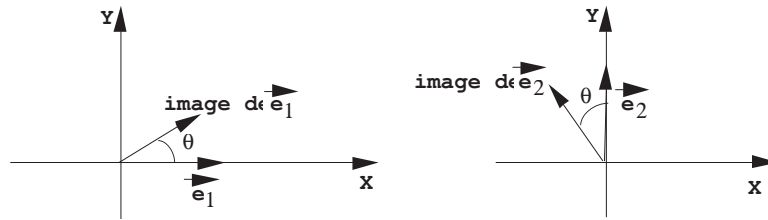
$$\vec{u} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$$

où x, y sont les composantes de \vec{u} dans la base orthonormée \vec{e}_1, \vec{e}_2 . Désignons par R l'opérateur rotation. Comme cette application est linéaire, on a

$$R\vec{u} = xR\vec{e}_1 + yR\vec{e}_2.$$

Donc pour trouver les composantes de l'image de \vec{u} , il suffit de trouver les composantes de l'image de \vec{e}_1 et de \vec{e}_2 .

¹On peut effectivement uniquement considérer le cas de deux vecteurs



Comme

$$R\vec{e}_1 = \cos\theta\vec{e}_1 + \sin\theta\vec{e}_2, \quad R\vec{e}_2 = -\sin\theta\vec{e}_1 + \cos\theta\vec{e}_2$$

si on désigne par x_i, y_i les composantes du vecteur $R\vec{u}$, on a

$$\begin{aligned} R\vec{u} &= x_i\vec{e}_1 + y_i\vec{e}_2 \\ &= xR\vec{e}_1 + yR\vec{e}_2 \\ &= x(\cos\theta\vec{e}_1 + \sin\theta\vec{e}_2) + y(-\sin\theta\vec{e}_1 + \cos\theta\vec{e}_2) \\ &= (x\cos\theta - y\sin\theta)\vec{e}_1 + (x\sin\theta + y\cos\theta)\vec{e}_2 \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

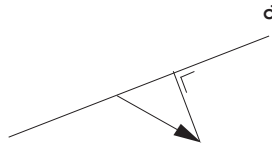
On dit que la matrice

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

représente l'opérateur dans la base choisie. Les colonnes de cette matrice sont formées par les composantes des images des vecteurs de base par l'opérateur.

PROJECTION ORTHOGONALE SUR UNE DROITE

Soit une droite d . On considère la projection orthogonale sur d .



Fixons un repère orthonormé de telle sorte que l'axe X soit la droite d .

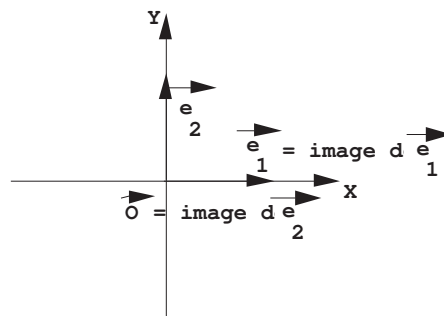
Tout vecteur \vec{u} s'écrit

$$\vec{u} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$$

où x, y sont les composantes de \vec{u} dans la base orthonormée \vec{e}_1, \vec{e}_2 . Désignons par P l'opérateur projection dont il est question ici. Comme cette application est linéaire, on a

$$P\vec{u} = xP\vec{e}_1 + yP\vec{e}_2.$$

Donc pour trouver les composantes de l'image de \vec{u} , il suffit de trouver les composantes de l'image de \vec{e}_1 et \vec{e}_2 .



Comme

$$P\vec{e}_1 = \vec{e}_1, \quad P\vec{e}_2 = \vec{0}$$

on a

$$P\vec{u} = x\vec{e}_1.$$

Si l'on désigne par x_i, y_i les composantes de l'image de \vec{u} , on a donc

$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

On dit que la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

représente l'opérateur dans la base choisie. Les colonnes de cette matrice sont formées par les composantes des images des vecteurs de base par l'opérateur.

6.6.2 Cas général

Dans le plan (des vecteurs), si on a un opérateur linéaire L et une base orthonormée fixée, alors les composantes x_i, y_i de l'image d'un vecteur \vec{u} de composantes x, y sont données par

$$\boxed{\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$$

où A est une matrice de format 2×2 dont les colonnes sont formées par les composantes des images par L des vecteurs de base.

Une formule analogue existe bien sûr pour les vecteurs de l'espace.

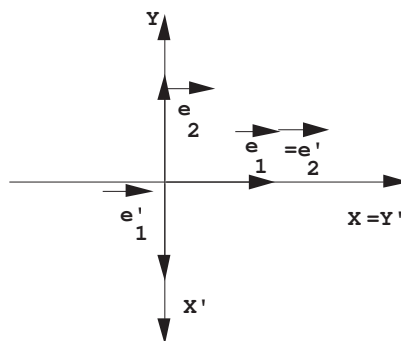
6.6.3 Changement de base et matrice qui représente un opérateur linéaire

PROPRIÉTÉ GÉNÉRALE

Quand une base est fixée, on représente un opérateur linéaire par une matrice, disons A , comme on vient de le voir ci-dessus. Si on change de base, on peut bien sûr encore représenter l'opérateur linéaire par une matrice, disons A' . Comme les deux matrices A, A' représentent le même opérateur linéaire, il est naturel qu'une relation existe entre ces deux matrices. Si S est la matrice de changement de base, on montre que l'on a

$$\boxed{A' = S^{-1}AS.}$$

Considérons l'exemple de la projection orthogonale présenté ci-dessus. Si on choisit autrement les axes du repère, par exemple en prenant Y comme étant la droite d et en fixant le repère comme ci-dessous,



on a

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cela étant, la matrice qui permet de passer de la première base à la seconde s'écrit

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie directement que

$$S^{-1}AS = A'.$$

FORME DIAGONALE

À présent, on peut donner une interprétation de la diagonalisation.

Soit un opérateur linéaire et une base dans laquelle il se représente par une matrice carrée A . Rappelons que diagonaliser A , c'est trouver une matrice inversible S telle que $S^{-1}AS$ soit une matrice diagonale (et cette matrice est diagonale si et seulement si les colonnes de S sont des vecteurs propres de la matrice A). Traduisons cela en termes de bases et de matrice qui représente l'opérateur: si on considère la nouvelle base formée à partir des vecteurs dont les composantes (dans l'ancienne base) sont données par les colonnes de S , diagonaliser A , c'est trouver une base (c'est-à-dire c'est trouver une matrice de changement de base S) dans laquelle la matrice qui représente l'opérateur (c'est-à-dire la matrice $S^{-1}AS$) est diagonale. Diagonaliser A , c'est donc trouver une base dont les éléments sont des vecteurs propres (pour l'opérateur).

Remarquons que si A est une matrice hermitienne réelle, on peut la diagonaliser par une matrice réelle orthogonale. Cela signifie donc que l'on peut représenter l'opérateur linéaire par une matrice diagonale dans une base orthonormée aussi.

6.6.4 Cas des applications linéaires dites orthogonales

6.7 Exercices

Pour rappel (cf notes cours A, chapitre 8): une matrice carrée A est

- normale si $AA^* = A^*A$
- unitaire si $A^*A = I = AA^*$ (I désigne la matrice identité)
- hermitienne si $A^* = A$
- symétrique si $\tilde{A} = A$
- antisymétrique si $\tilde{A} = -A$

Une matrice orthogonale est une matrice réelle unitaire c'est-à-dire une matrice réelle telle que $\tilde{A}A = I = A\tilde{A}$.

Remarquons qu'une matrice réelle est hermitienne si et seulement si elle est symétrique.

1. Compléter (si possible) les tableaux suivants pour obtenir des matrices orthogonales

$$1) \begin{pmatrix} 1 & ? & 0 \\ 0 & ? & -1 \\ 0 & ? & 0 \end{pmatrix}, \quad 2) \begin{pmatrix} 1 & ? & 0 \\ -1 & ? & -1 \\ 0 & ? & 0 \end{pmatrix}, \quad 3) \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & ? \\ 1/\sqrt{3} & 0 & ? \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & ? \end{pmatrix}$$

$$4) \begin{pmatrix} 2/7 & 3/7 & 6/7 \\ ? & ? & ? \\ 3/\sqrt{13} & -2/\sqrt{13} & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Le produit de deux matrices orthogonales est-il toujours une matrice orthogonale? Justifier.
Une somme de multiples réels de deux matrices orthogonales est-elle toujours une matrice orthogonale? Justifier.
3. Soit A une matrice réelle de dimension n telle que $(\widetilde{AX})AY = \tilde{X}Y$ pour tous vecteurs colonnes X, Y de dimension n . Montrer alors que A est une matrice orthogonale.
4. Soit X un vecteur colonne non nul de dimension n . Montrer que la matrice $S = I - \frac{2}{\tilde{X}X}X\tilde{X}$ est une matrice orthogonale.
5. Le produit de deux matrices hermitiennes est-il toujours une matrice hermitienne? Justifier.
Une somme de multiples complexes de deux matrices hermitiennes est-elle toujours une matrice hermitienne? Justifier.
6. Démontrer que la trace du produit d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique est nulle.
7. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que le produit de deux matrices hermitiennes soit encore une matrice hermitienne.
8. Donner des exemples de matrices réelles qui sont à la fois orthogonales et symétriques.
Déterminer tous les cas qui peuvent se présenter pour les valeurs propres d'une matrice réelle de dimension 3 à la fois orthogonale et symétrique.

9. On donne les vecteurs \vec{u}, \vec{v} de composantes respectives $(1, 1, 1)$ et $(1/3, 1/3, -2/3)$. Construire une base orthonormée du plan vectoriel engendré par ces deux vecteurs.

Même question pour les composantes

- $(2, -5, 1), (4, -1, 2)$
- $(0, 4, 2), (5, 6, -7)$.

10. Diagonaliser les matrices suivantes par une matrice orthogonale.

$$1) \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad 2) \begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad 3) \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$4) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad 5) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad 6) \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

11. On considère l'espace muni d'un repère orthonormé, d'origine O et de base orthonormée $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.
- a) Dans l'ensemble des vecteurs de l'espace liés en O , on considère la projection orthogonale sur la droite d'équations cartésiennes $x = y = z$. Quelle est la représentation matricielle de cette application? Déterminer ensuite les composantes de la projection du vecteur $\vec{u} = -\sqrt{2}\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$.
- b) Dans l'ensemble des vecteurs liés en O , on considère la projection orthogonale sur le plan d'équation cartésienne $x = y$. Quelle est la représentation matricielle de cette application? Déterminer ensuite les composantes de la projection du vecteur $\vec{v} = \sqrt{3}\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - \vec{e}_3$.

12. Dans l'espace vectoriel des vecteurs colonnes réels, noté E , on considère les applications suivantes

$$T_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}, \quad T_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2x \\ y \end{pmatrix}$$

$$T_3 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x^2 \\ x \end{pmatrix}, \quad T_4 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix}.$$

Ces applications sont-elles linéaires? Si oui, en donner une représentation matricielle dans la base $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ de E . Ces applications sont-elles orthogonales?

13. Dans l'espace vectoriel \mathcal{P}_2 des polynômes à coefficients et variable réels de degré inférieur ou égal à 2 muni de la base $1, x, x^2$, on considère les applications suivantes

$$T_1 : P(x) \rightarrow DP(x) + 2P(x), \quad T_2 : P(x) \rightarrow -P(x) + DP(x) + D^2P(x), \quad T_3 : P(x) \rightarrow P(x-1).$$

Ces applications sont-elles linéaires? Si oui, en donner une représentation matricielle.

14. Répondre par Vrai ou Faux à chacune des questions suivantes.

- Une matrice qui est diagonalisable par une matrice réelle orthogonale est une matrice symétrique.
- Une matrice orthogonale réelle est toujours diagonalisable par une matrice orthogonale réelle.
- Une matrice réelle symétrique de dimension 3 a toujours 3 valeurs propres distinctes.
- Si $A = B\tilde{D}B$ et si D est une matrice diagonale, alors A est une matrice symétrique.
- Si A est une matrice carrée dont la transposée est orthogonale, alors la matrice A est orthogonale.
- Si A est une matrice orthogonale et symétrique, alors son carré est égal à la matrice identité.
- Si A est une matrice carrée réelle dont le carré est l'identité, alors A est une matrice orthogonale.

- Si A est une matrice réelle symétrique dont le carré est l'identité alors A est une matrice orthogonale.
- Une matrice dont toutes les valeurs propres sont nulles est la matrice nulle.
- Une matrice symétrique réelle dont toutes les valeurs propres sont nulles est la matrice nulle.
- L'inverse d'une matrice orthogonale est une matrice orthogonale.
- L'inverse d'une matrice hermitienne existe toujours.
- L'inverse d'une matrice hermitienne inversible est une matrice hermitienne.
- L'inverse d'une matrice symétrique inversible est une matrice symétrique.
- Le produit de deux matrices hermitiennes est commutatif.
- Le produit de deux matrices orthogonales est commutatif.
- Le produit de deux matrices orthogonales de dimension 2 et de déterminant égal à 1 est commutatif. (Interpréter géométriquement le résultat.)
- Le produit de deux matrices orthogonales de dimension 2 et de déterminant égal à -1 est commutatif.
- Le produit de deux matrices orthogonales de dimension 3 et de déterminant égal à 1 est commutatif. (Interpréter géométriquement le résultat.)
- Le produit de deux matrices orthogonales de dimension 3 et de déterminant égal à -1 est commutatif.
- Si une matrice carrée réelle a un déterminant égal à 1, alors la matrice est orthogonale.

Chapitre 7

Exercices types-TD-Examens

7.1 Exemples de questions d'examens écrits (2003-2006)

Examen partiel du 12 janvier 2004

2ème candi géométrie

- (4 points) On fixe une base orthonormée de l'espace et les vecteurs $\vec{x}, \vec{u}, \vec{v}$ respectivement de composantes $(1, 2, 2), (0, 0, -2), (1, 0, -1)$. Déterminer les composantes de la projection orthogonale \vec{w} de \vec{x} sur la droite vectorielle engendrée par \vec{v} et celles de la projection orthogonale \vec{t} de \vec{x} sur le plan vectoriel engendré par \vec{u} et \vec{v} . Représenter $\vec{x}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{t}$.
- (8 points) On se place dans l'espace (ensemble de points) muni d'un repère orthonormé et on donne une droite d_0 et un plan Π_0 par l'intermédiaire de leurs équations cartésiennes

$$d_0 : \begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x + 2y + 1 = 0 \end{cases} \quad \Pi_0 : x + y + z = 2.$$

- La droite d_0 et le plan Π_0 sont-ils parallèles? Pourquoi? Si ce n'est pas le cas, déterminer les coordonnées cartésiennes du point d'intersection de d_0 et Π_0 .
 - Déterminer des équations cartésiennes d'une droite parallèle à Π_0 passant par l'origine.
 - Déterminer des équations cartésiennes de la droite orthogonale à Π_0 et passant par l'origine.
 - Déterminer des équations paramétriques cartésiennes de Π_0 .
- (8 points) Calculer la distance (en km) entre les villes A et B dont les latitude et longitude respectives sont données ci-dessous (on considère que la longueur d'un grand cercle est 40 000 kms).
 A : $50^\circ 39'$ latitude nord, $5^\circ 30'$ longitude est
 B : $23^\circ 08'$ latitude nord, $82^\circ 22'$ longitude ouest.
 - (10 points) Énoncer et démontrer une propriété permettant de calculer de façon pratique la distance entre un point et un plan.

Ci-dessous, les notations a, b, c et A, B, C représentent respectivement les côtés et les angles d'un triangle sphérique.

$$\cos a = \cos c \cos b + \sin c \sin b \cos A, \quad \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C} = \frac{\sin a}{\sin A}, \quad \sin b \cos C = \sin a \cos c - \sin c \cos a \cos B$$

Examen du 10 juin 2004

2ème candi géométrie

1. (7 points) On donne la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.1) Déterminer les valeurs propres de A , les vecteurs propres associés.

1.2) Diagonaliser cette matrice par une matrice réelle orthogonale.

2. (7 points) Soit $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$, $x, y \in \mathbb{R}$.

2.1) Déterminer les éventuels extrema libres de f .

2.2) Existe-t-il des extrema globaux de f sous la contrainte $x^2 + y^2 = 1$? Pourquoi? Si ces extrema existent, les déterminer.

3. (6 points) Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xy)}{y^2 + 1} dy = \frac{\pi}{2} e^{-|x|}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(Suggestion: utiliser la transformée de Fourier et ses propriétés.)

Examen du 30 août 2004

2ème candi géométrie

1. (7 points) On donne la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

3.1) Déterminer les valeurs propres de A , les vecteurs propres associés.

3.2) Diagonaliser cette matrice par une matrice réelle orthogonale.

2. (7 points) Soit $f(x, y) = x^3 + 3xy + y^3$, $x, y \in \mathbb{R}$.

2.1) Déterminer les éventuels extrema libres de f .

2.2) Existe-t-il des extrema globaux de f sous la contrainte $xy = 1$? Pourquoi? Si ces extrema existent, les déterminer.

3. (6 points) Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \cos(xy) \frac{1 - \cos y}{y^2} dy = \frac{\pi}{2} \begin{cases} 1 - |x| & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |x| > 1. \end{cases}$$

(Suggestion: utiliser la transformée de Fourier et ses propriétés.)

Examen partiel du 10 janvier 2005

2ème candi géomatique-géométrie

1. (7 points) On fixe une base orthonormée de l'espace et on donne la droite d d'équations cartésiennes

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0 \\ \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta' = 0 \end{cases}$$

(les vecteurs de composantes (α, β, γ) et $(\alpha', \beta', \gamma')$ sont linéairement indépendants) ainsi qu'un plan Π contenant la droite d . Quelle est l'expression de l'équation cartésienne de Π ? Justifier votre réponse.

2. (8 points) On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé et on donne la droite d et, pour tout réel r le plan Π_r par l'intermédiaire des équations cartésiennes

$$d : \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3z = 0 \end{cases} \quad \Pi_r : x + r^2 y + rz + 1 = 0.$$

- 2.1) Déterminer des équations paramétriques vectorielles de d et de Π_r .
 2.2) Déterminer le ou les réel(s) r tel(s) que Π_r et d soient parallèles.
 2.3) Déterminer le ou les réel(s) r tel(s) que Π_r contienne d .
 2.4) Déterminer le ou les réel(s) r tel(s) que Π_r et d soient orthogonaux.
 2.5) Pour $r = 2$, déterminer l'équation cartésienne du plan Π' orthogonal à Π_2 et contenant la droite d .
3. (5 points) Calculer la distance (en km) entre les villes A et B dont les latitude et longitude respectives sont données ci-dessous (on considère que la longueur d'un grand cercle est 40 000 kms).
 A: $50^\circ 39'$ latitude nord, $5^\circ 30'$ longitude est
 B: $23^\circ 08'$ latitude nord, $82^\circ 22'$ longitude ouest.

Ci-dessous, les notations a, b, c et A, B, C représentent respectivement les côtés et les angles d'un triangle sphérique.

$$\cos a = \cos c \cos b + \sin c \sin b \cos A, \quad \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C} = \frac{\sin a}{\sin A}, \quad \sin b \cos C = \sin a \cos c - \sin c \cos a \cos B$$

Examen partiel du 10 janvier 2005

2ème candi informatique

1. (10 points) 1.1) Énoncer et démontrer le théorème de Steinitz.
1.2) Définir ce que l'on entend par "mesure de l'angle entre deux droites".
2. (10 points) On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé et on donne la droite d et, pour tout réel r le plan Π_r par l'intermédiaire de leurs équations cartésiennes

$$d : \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3z = 0 \end{cases} \quad \Pi_r : x + r^2y + rz + 1 = 0.$$

- 2.1) Déterminer des équations paramétriques vectorielles de d et de Π_r .
- 2.2) Déterminer le ou les réel(s) r tel(s) que Π_r et d soient parallèles.
- 2.3) Déterminer le ou les réel(s) r tel(s) que Π_r contienne d .
- 2.4) Déterminer le ou les réel(s) r tel(s) que Π_r et d soient orthogonaux.
- 2.5) Pour $r = 2$, déterminer l'équation cartésienne du plan Π' orthogonal à Π_2 et contenant la droite d .
- 2.6) Pour $r = 3$ et $r = -3$, déterminer la distance entre Π_r et d .

Examen du 6 juin 2005

2eme candidature en informatique et en géomatique-géométrie

1. (6 points) On donne la fonction

$$f(x) = \frac{\sin^2 x \cos x}{x^2}, \quad x \in]0, +\infty[.$$

Montrer qu'elle est intégrable sur $]0, +\infty[$ et calculer son intégrale.

2. (7 points) On considère la fonction
- $f(x) = x^2$
- ,
- $x \in \mathbb{R}$
- . Développer cette fonction en série trigonométrique de Fourier dans
- $L^2([-\pi, \pi])$
- . En déduire la valeur des sommes suivantes

$$S_1 = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2}, \quad S_2 = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m^2}, \quad S_3 = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^4}.$$

3. (7 points) On donne la fonction
- $f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 4y - 3$
- ,
- $x, y \in \mathbb{R}$
- .

(i) Déterminer ses éventuels extrema libres dans \mathbb{R}^2 .(ii) Déterminer ses éventuels extrema libres dans l'ouvert $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4\}$.(iii) Déterminer ses éventuels extrema sous la contrainte $x^2 + y^2 = 4$.(iv) Déterminer ses éventuels extrema libres dans le fermé borné $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Examen du 16 août 2005

2e candidature en géométrie-géomatique et en informatique

1. (4 points) On demande de déterminer des équations paramétriques cartésiennes et l'équation cartésienne du plan Π contenant la droite d'intersection des plans $\Pi_1 : x - y + z = 1$, $\Pi_2 : 2x + y + z = 0$ et passant par le point de coordonnées $(1, 1, 1)$.
2. (2C GEOM SEULEMENT) (4 points) Un voyageur liégeois décide de faire le tour du monde en demeurant sur le même parallèle. Quelle distance va-t-il parcourir? (Liège $50^\circ 30'N$ et $5^\circ 3'E$).
3. (4 points) Déterminer la transformée de Fourier $\mathcal{F}^+ f$ de la fonction f donnée par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{si } x \notin [-1, 1] \end{cases}$$

4. (4 points) Déterminer la valeur de

$$\int_{-0}^1 \frac{\sin x + \sin(\frac{1}{x})}{x} dx.$$

5. (2C INFO SEULEMENT) (4 points) Développer la fonction $x \mapsto \sin x$ en série trigonométrique de Fourier dans $L^2([0, 2\pi])$ et dans $L^2([0, \pi])$.
6. (4 points) On donne les fonctions f, g par

$$f(x, y) = x^2 - 3xy - y^2, \quad g(x, y) = x + y.$$

- i) Déterminer les extréma éventuels de la fonction f sur \mathbb{R}^2 . Sont-ils globaux? Justifier.
- ii) Déterminer les extréma éventuels de f sous la contrainte $g(x, y) = 0$. Sont-ils globaux? Justifier.

Ci-dessous, les notations a, b, c et A, B, C représentent respectivement les côtés et les angles d'un triangle sphérique.

$$\cos a = \cos c \cos b + \sin c \sin b \cos A, \quad \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C} = \frac{\sin a}{\sin A}, \quad \sin b \cos C = \sin a \cos c - \sin c \cos a \cos B$$

Examen partiel du 23 janvier 2006

2e année du baccalauréat en géomatique-géométrie

1. (5 points)

a) Si d est une droite de l'espace, qu'appelle-t-on faisceau de plan d'axe d ? Énoncer le résultat donnant la forme de l'équation cartésienne d'un plan quelconque du faisceau, connaissant des équations cartésiennes de d .

b) On donne un repère orthonormé du plan et, dans celui-ci, on considère la courbe C d'équation cartésienne

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1.$$

Quel est le nom de cette courbe? Que vaut son excentricité? Quelles sont les coordonnées cartésiennes des foyers? Représenter C , ainsi que les foyers.

2. (6 points) On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé et on donne la droite d et les plans Π, Π' suivants

$$d : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ y - 2z = 0 \end{cases}, \quad \Pi : 2x - y + z + 1 = 0, \quad \Pi' : -x + \frac{y}{2} - \frac{z}{2} + 1 = 0.$$

a) Déterminer des équations paramétriques cartésiennes de d et de Π .

b) Déterminer la distance entre Π et Π' .

c) Déterminer l'équation cartésienne du plan contenant d et orthogonal à Π .

d) Déterminer des équations cartésiennes de la droite parallèle à d et contenant l'origine.

3. (4 points) Calculer la distance (en km) entre les villes A et B dont les latitude et longitude respectives sont données ci-dessous (on considère que la longueur d'un grand cercle est 40 000 kms).

A : $50^\circ 39'$ latitude nord, $5^\circ 30'$ longitude est

B : $23^\circ 08'$ latitude nord, $82^\circ 22'$ longitude ouest.

Ci-dessous, les notations a, b, c et A, B, C représentent respectivement les côtés et les angles d'un triangle sphérique.

$$\cos a = \cos c \cos b + \sin c \sin b \cos A, \quad \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C} = \frac{\sin a}{\sin A}, \quad \sin b \cos C = \sin a \cos c - \sin c \cos a \cos B$$

Examen partiel du 23 janvier 2006

2e année du baccalauréat en informatique

1. (5 points)
 - a) Si d est une droite de l'espace, qu'appelle-t-on faisceau de plan d'axe d ? Énoncer le résultat donnant la forme de l'équation cartésienne d'un plan quelconque du faisceau, connaissant des équations cartésiennes de d .
 - b) Énoncer et démontrer le théorème de Steinitz.
2. (6 points) On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé et on donne la droite d et les plans Π, Π' suivants

$$d : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ y - 2z = 0 \end{cases}, \quad \Pi : 2x - y + z + 1 = 0, \quad \Pi' : -x + \frac{y}{2} - \frac{z}{2} + 1 = 0.$$

- a) Déterminer des équations paramétriques cartésiennes de d et de Π .
 - b) Déterminer la distance entre Π et Π' .
 - c) Déterminer l'équation cartésienne du plan contenant d et orthogonal à Π .
 - d) Déterminer des équations cartésiennes de la droite parallèle à d et contenant l'origine.
3. (4 points) On donne les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ et on définit

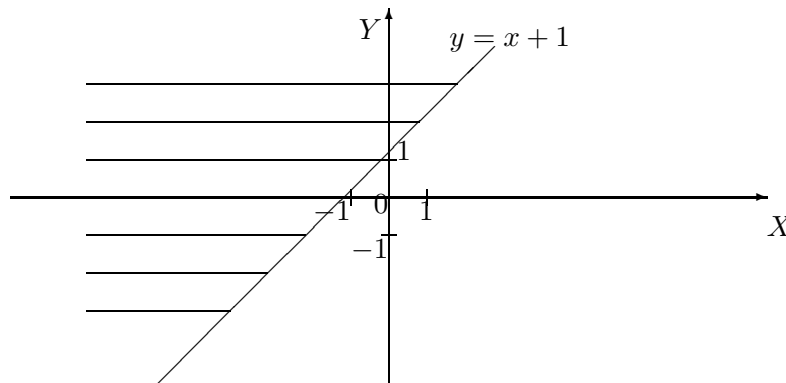
$$\vec{x} = \vec{u} + \vec{v}, \quad \vec{y} = \vec{v} - \vec{w}.$$

- a) Supposons que $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont linéairement indépendants. Les vecteurs \vec{x}, \vec{y} sont-ils nécessairement linéairement dépendants? Sont-ils nécessairement linéairement indépendants? Pourquoi?
- b) Supposons \vec{x}, \vec{y} linéairement indépendants. Les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont-ils nécessairement linéairement dépendants? Sont-ils nécessairement linéairement indépendants? Pourquoi?

Examen du 29 mai 2006

2ème année de bachelier en informatique et en géométrie

1. (5 points) Calculer l'intégrale de $f(x, y) = e^{-2|x|-y}$ sur A où A est l'ensemble hachuré donné ci-dessous. Donner aussi une représentation analytique de A .



2. (8 points) Pour tout naturel positif ou nul m , on pose $u_m(x) = \cos(mx)$, $x \in \mathbb{R}$; pour tout naturel strictement positif m , on pose $v_m(x) = \sin(mx)$, $x \in \mathbb{R}$.
- 2.1) Montrer que les fonctions u_m et u_n sont orthogonales pour le produit scalaire de $L^2([-\pi, \pi])$ si et seulement si les naturels strictement positifs m, n sont différents.
- 2.2) Développer les fonctions f, g suivantes en série trigonométrique de Fourier dans $L^2([-\pi, \pi])$ en vous servant des fonctions de base $u_m (m \geq 0)$ et $v_m (m > 0)$

$$f(x) = 1, x \in [-\pi, \pi]; \quad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, \pi] \\ -1 & \text{si } x \in [-\pi, 0[\end{cases}$$

- 2.3) Sachant que les égalités obtenues au point précédent sont également valables au sens ponctuel dans l'intervalle $]0, \pi[$ (c'est-à-dire en n'importe quel réel de cet intervalle), en déduire la valeur de la somme suivante

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1}.$$

3. (7 points) On donne les fonctions f, g par

$$f(x, y) = (y - x^2)^2 + x^5, \quad g(x, y) = x^2 - 3xy + y^2.$$

- 3.1) Déterminer l'équation cartésienne du plan tangent à la surface S d'équation $z = g(x, y)$ (c'est-à-dire à la surface qui représente graphiquement la fonction g) au point de coordonnées $(0, 0, 0)$.
- 3.2) Déterminer les extrémums éventuels de ces fonctions. Sont-ils globaux? Justifier.
- 3.3) Déterminer les extrémums éventuels de g sous la contrainte $xy = 1$. Sont-ils globaux? Justifier.

Examen du 21 août 2006, 08:30-10:30

Projet

2ème année de bachelier en informatique et en géométrie

1. (7 points) Déterminer la transformée de Fourier (négative) des fonctions f et g suivantes, en précisant s'il s'agit d'une transformée dans l'espace des fonctions intégrables ou des fonctions de carré intégrable

$$f(x) = e^{-|x|}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

2. (8 points) On se place dans $L^2([0, \pi])$.

2.1) Déterminer le développement en série trigonométrique de Fourier de $f(x) = \sin^2 x$. Exprimer le résultat en utilisant uniquement des fonctions sin et cos.

2.2) Déterminer le développement en série trigonométrique de Fourier de $g(x) = \sin x$. Exprimer le résultat en utilisant uniquement des fonctions sin et cos.

2.3) Sachant que la série obtenue au point précédent converge en tout point de l'intervalle $[0, \pi]$, montrer que

$$\frac{\pi}{2} = 1 - 2 \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{4m^2 - 1}.$$

3. (5 points) On donne les fonctions f, g par

$$f(x, y) = x^2 - 3xy - y^2, \quad g(x, y) = x + y.$$

3.1) Déterminer les extréma éventuels de la fonction f sur \mathbb{R}^2 . Sont-ils globaux? Justifier.

3.2) Déterminer les extréma éventuels de f sous la contrainte $g(x, y) = 0$. Sont-ils globaux? Justifier.

Rappel: pour tout réel $\lambda > 0$ on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\lambda t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

7.2 2006-2007

ANNÉE ACADÉMIQUE 2006-2007

-
- Exercices “types”
 - Exercices proposés en classe (cours)
 - Exercices proposés aux séances de travaux dirigés
 - Examens

7.2.1 Exercices “types” , 2006-2007

MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES B-COMPLÉMENTS AU COURS A

Exercices “types”, 2006-2007, Chapitre 1

Remarque. Cette liste est complétée par les exemples de questions d'examens s'y rapportant (voir suite de cette section).

Il s'agit essentiellement d'exercices “de base”, i.e. qui concernent la matière (minimum) à connaître absolument et qui doivent pouvoir être résolus par l'étudiant seul.

Des exercices du type présentés ici seront résolus aux séances de répétition, ainsi que d'autres.

- Soit l'espace (des vecteurs libres) muni d'une base orthonormée $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. On donne les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ respectivement de composantes $(1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 1)$.
 - Ces vecteurs forment-ils une base de l'espace? Si la réponse est affirmative, déterminer les composantes des vecteurs $\vec{e}_1, \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{e}_1 - \vec{e}_2$ dans cette base. Représenter les vecteurs $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{e}_1 - \vec{e}_2$.
 - Dans la base $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, déterminer
 - les composantes de la projection orthogonale de \vec{v} sur le plan vectoriel L engendré par \vec{u} et \vec{w}
 - les composantes de la projection orthogonale de \vec{v} sur la droite vectorielle engendrée par $\vec{u} + \vec{w}$
 - les composantes de la projection orthogonale de \vec{v} sur la droite vectorielle orthogonale à L
 - une base orthonormée de L .
- Dans un repère orthonormé de l'espace, quel ensemble représentent respectivement les systèmes suivants? (a est un paramètre réel) Justifier.

$$a) \begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ -x + y - z = 1 \end{cases} \quad b) \begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ -2x + y - z = -1 \end{cases} \quad c) \begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ -x + y - z = 1 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ -x + y - z = 1 \\ y - z = 3 \end{cases} \quad e) \begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ -x + y - z = 1 \\ y - z = 2 \end{cases} \quad f) \begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ -x + y - z = 1 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

$$g) \begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ -x + y - z = 1 \\ -x + 2y - 2z = 4 \end{cases} \quad h) ax + ay + az + 1 = 0$$

- Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, déterminer des équations paramétriques cartésiennes des ensembles dont des équations cartésiennes sont fournies respectivement par les dexpressions a), b) suivantes

$$a) 2x - y + z = 1, \quad b) \begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ -x + y - z = 1 \end{cases}$$

- On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé et on donne une droite d_0 et un plan Π_0 par l'intermédiaire de leurs équations cartésiennes

$$d_0 : \begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x + 2y + 1 = 0 \end{cases} \quad \Pi_0 : x + y + z = 2.$$

- La droite d_0 et le plan Π_0 sont-ils parallèles? Pourquoi?

Si ce n'est pas le cas, déterminer les coordonnées cartésiennes du point d'intersection de d_0 et Π_0 .

- Déterminer des équations cartésiennes d'une droite parallèle à Π_0 passant par l'origine.

- Déterminer des équations cartésiennes de la droite orthogonale à Π_0 et passant par l'origine.

5. On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé et on donne les points A, B, C respectivement de coordonnées $(3, 1, 1), (2, -1, 0), (1, 0, 1)$.
- Ces points appartiennent-ils à une même droite d (resp. à un même plan Π)? Si c'est le cas, déterminer des équations cartésiennes de d (resp. de Π).
 - On donne le point D de coordonnées $(1, 1, 1)$. Appartient-il à d (resp. à Π)?
6. On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.
- Déterminer la distance entre le point de coordonnées $(1, -1, 1)$ et le plan Π d'équation cartésienne $x - y + z = 2$.
 - Déterminer la distance entre le point de coordonnées cartésiennes $(1, 0, 3)$ et la droite d'équations cartésiennes $\begin{cases} 2x + 2y = 3 \\ x - 3z = 1 \end{cases}$
7. On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé. On donne les droites d_1, d_2 respectivement d'équations cartésiennes

$$d_1 : \begin{cases} 2x + 2y = 3 \\ x - 3z = 1 \end{cases}, \quad d_2 : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases}$$

- Sont-elles parallèles, sécantes, gauches? Justifier.
- Si elles sont gauches, déterminer des équations cartésiennes de la perpendiculaire commune à ces deux droites. Si elles définissent un plan, déterminer l'équation cartésienne de celui-ci.
- Déterminer la distance entre ces deux droites.

MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES B-COMPLÉMENTS DE MATHÉMATIQUES

Exercices “types”, 2006-2007, Chapitre 4

Remarque. Cette liste est complétée par les exemples de questions d'examens s'y rapportant (voir suite des présentes notes).

Il s'agit essentiellement d'exercices “de base”, i.e. qui concernent la matière (minimum) à connaître absolument et qui doivent pouvoir être résolus par l'étudiant seul.

Des exercices du type présentés ici seront résolus aux séances de répétition, ainsi que d'autres.

1. Lorsque a est un réel strictement positif, calculer (si possible)

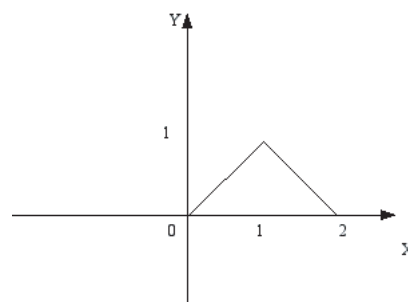
$$\int_0^{+\infty} e^{-ax} dx, \quad \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} dx.$$

La seconde intégrale porte le nom d'“intégrale de Poisson”. On peut la calculer en passant à une intégrale double et en effectuant un changement de variables en coordonnées polaires. Ceci est effectué dans les notes de théorie du cours A.

2. Calculer le volume du corps situé entre les sphères centrées à l'origine, de rayon respectifs 2,3, à l'intérieur du cône d'équation $z^2 = x^2 + y^2$ et dont les points ont une cote négative. Représenter ce corps.
3. On définit la fonction Γ (intégrale eulérienne) par

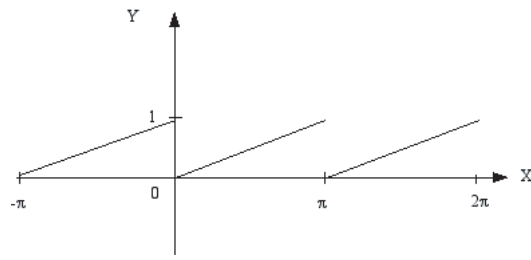
$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0.$$

- Montrer que cette définition a bien un sens.
 - Calculer la valeur de cette fonction en 1 et en 1/2.
 - Montrer que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour tout $x > 0$; en déduire que $\Gamma(m+1) = m!$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.
4. Calculer les transformées de Fourier de la fonction dont la représentation graphique est la suivante.



Préciser s'il s'agit d'une transformée dans $L^1(\mathbb{R})$ ou dans $L^2(\mathbb{R})$.

5. Calculer la transformée de Fourier positive de la fonction $f : x \mapsto \frac{\sin x \cos(2x)}{x}$. Préciser s'il s'agit d'une transformée dans $L^1(\mathbb{R})$ ou dans $L^2(\mathbb{R})$.
6. Déterminer le développement en série trigonométrique de Fourier dans $L^2([0, \pi])$ de $f : x \mapsto \sin^2 x$ et de g (π -périodique) dont la représentation graphique est donnée ci-dessous.



7. Déterminer le développement en série trigonométrique de Fourier dans $L^2([0, 2\pi])$ de $f : x \mapsto 3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2$. En déduire la valeur des sommes des séries suivantes

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2}, \quad \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^4}.$$

MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES B-COMPLÉMENTS DE MATHÉMATIQUES

Exercices “types”, 2006-2007, Chapitre 5

Remarque. Cette liste est complétée par les exemples de questions d'examens s'y rapportant (voir suite des présentes notes).

Il s'agit essentiellement d'exercices “de base”, i.e. qui concernent la matière (minimum) à connaître absolument et qui doivent pouvoir être résolus par l'étudiant seul.

Des exercices du type présentés ici seront résolus aux séances de répétition, ainsi que d'autres.

1. Représenter graphiquement les courbes de niveau $-2, -1, 0, 1, 2, 3$ des surfaces d'équation cartésienne $z = f(x, y)$ pour

$$a) f(x, y) = xy, \quad b) f(x, y) = x^2 + y^2 - 1, \quad c) f(x, y) = x^2 - y^2$$

2. Déterminer le domaine de définition et l'image de la fonction donnée par

$$f(x, y) = \ln \left(\frac{1 + \sqrt{x^2 + y^2}}{1 - \sqrt{x^2 + y^2}} \right).$$

Quelles sont ses courbes de niveau? En donner une représentation.

3. Soit n un naturel strictement positif. On suppose que f est une fonction continûment dérivable sur \mathbb{R}^2 et telle¹ que $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$ pour tous $x, y, t \in \mathbb{R}$. Montrer que dans ce cas, on a

$$xD_x f(x, y) + yD_y f(x, y) = n f(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Suggestion: utiliser la dérivation des fonctions composées en posant $F(t) = f(tx, ty)$ lorsque x et y sont fixés.

4. Montrer que les surfaces d'équation cartésienne $z = xy - 2$ et $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ ont le même plan tangent au point de coordonnées $(1, 1, -1)$.
5. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'équation cartésienne du plan tangent à la surface d'équation $z = f(x, y)$ au point P ; dans le cas a), esquisser une représentation graphique de la surface et du plan tangent.

$$a) f(x, y) = 3x^2 + 4y^2, \quad P(0, 1); \quad b) f(x, y) = \int_0^{x^2+y^2} e^{-t^2} dt, \quad P(1, 1).$$

Suggestion pour b): la fonction F définie par $F(u) = \int_0^u e^{-t^2} dt$ ($u \in \mathbb{R}$) est une primitive de $t \mapsto e^{-t^2}$ donc $DF(u) = e^{-u^2}$, $u \in \mathbb{R}$. Remarquer alors que $f(x, y) = F(x^2 + y^2)$ et utiliser la dérivation des fonctions composées.

6. Déterminer l'approximation de Taylor à l'ordre 1 et 2 au point $P(0, 0)$ pour f dans chacun des cas suivants

$$a) f(x, y) = \operatorname{arctg} \left(\frac{y}{x^2 + 1} \right), \quad b) f(x, y) = \cosh x \sinh y.$$

Remarque: par définition, $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$; ces fonctions sont appelées respectivement cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique. Elles apparaissent de façon naturelle (notamment) dans la résolution de certaines équations différentielles.

7. Soit une boîte parallélépipédique de dimensions extérieures $14\text{cm} \times 14\text{cm} \times 28\text{cm}$. Si les parois ont une épaisseur de $1/8\text{cm}$, déterminer une approximation de l'emballage de la boîte.

Suggestion. Utiliser le développement de Taylor à l'ordre 1.

¹on dit que f est homogène de degré n

8. Déterminer les points stationnaires de $f(x, y) = \cos(x + y) + \sin(x - y)$.
9. Soit $f(x, y) = 2x^3 + (x - y)^2 - 6y$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer les extrema éventuels de cette fonction. Sont-ils globaux?
Même question pour $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
10. Minimiser la fonction f donnée par $f(x, y) = x^2y^2$ sous la contrainte $x + y = 1$.
Même question avec $f(x, y) = xy$ sous la contrainte $x^2 + y^2 = 1$.
11. Déterminer la distance entre l'ellipse d'équation cartésienne $x^2/4 + y^2 = 1$ et la droite d'équation cartésienne $x + y = 4$.
12. Montrer que le rectangle d'aire maximale contenu dans une boule du plan est un carré. En déterminer la longueur des côtés.
13. Déterminer les extrema de $f(x, y) = x^2 + 4y^3$ sous la contrainte $x^2 + 2y^2 = 1$. Donner une interprétation graphique de la contrainte.
14. Déterminer les extrema de $f(x, y) = 3x^2 + 2y^2 - 4y + 1$ sous la contrainte $x^2 + y^2 \leq 16$. Visualiser la situation en représentant graphiquement f et la contrainte.
15. Déterminer l'équation cartésienne (et représenter) la droite de régression linéaire pour les points P_1, P_2 respectivement de coordonnées $(1, 0)$ et $(0, 1)$ en procédant de la manière la plus rapide possible et en justifiant vos démarches.
Même question pour P_1, P_2, P_3, P_4 respectivement de coordonnées $(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)$.
16. Déterminer l'équation cartésienne (et représenter) la droite de régression linéaire pour les points P_1, P_2, P_3 respectivement de coordonnées $(1, 1), (2, 3), (3, 4)$

7.2.2 En plus...

Quelques exercices proposés au cours (en plus de ceux résolus au cours)

1. L'intégrale suivante a-t-elle un sens? Si oui, la calculer.

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} dx.$$

2. Calculer

$$\int_0^{\rightarrow+\infty} \frac{\sin(rx)}{x} dx$$

pour toutes les valeurs du réel r .

3. Soit A la surface fermée du plan bornée par les cercles de rayon respectivement 1, 2 centrés à l'origine et l'axe X . Calculer l'intégrale de $f(x, y) = 1 + 3x + 8y^2$ sur A .
4. Pour toutes les valeurs de x , déterminer l'intégrale de la fonction f donnée par $f(y) = e^{ixy}e^{-|y|}$.
5. Si f et g sont des fonctions définies sur \mathbb{R} , on pose

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x - y)dy$$

pour autant que la fonction $y \mapsto f(y)g(x - y)$ soit intégrable sur \mathbb{R} .

- Montrer que si $(f * g)(x)$ existe alors $(g * f)(x)$ existe et que $(f * g)(x) = (g * f)(x)$
- On considère $f = \chi_{[0,1]}$.
Déterminer $(f * f)(x)$, $x \in \mathbb{R}$, $(f * f) * f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ et représenter ces fonctions.

7.2.3 Travaux dirigés

2ème année de bachelier en informatique et géométrie
 COMPLÉMENTS DE MATHÉMATIQUE, 2006-2007
 TD de décembre 2006

1. Déterminer les transformées de Fourier (+, -) des fonctions f_a suivantes (a est un paramètre réel strictement positif) en précisant s'il s'agit de transformation dans L^1 ou L^2

$$f_a(x) = e^{-a|x|}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

En déduire que l'on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} dx = \frac{\pi}{2ab(a + b)}, \quad a, b > 0.$$

2. Déterminer les transformées de Fourier (+, -) de la fonction suivante en précisant s'il s'agit de transformation dans L^1 ou L^2

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{x} \quad (x \neq 0), \quad f(0) = 0.$$

3. Diagonaliser la matrice $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ par une matrice orthogonale.

4. Soit la fonction f donnée par

$$f(x, y) = 5x^2 - 6xy + 5y^2, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

On fixe un repère orthonormé du plan et on donne la courbe \mathcal{C} d'équation cartésienne $f(x, y) = 4$.

- (a) Esquisser \mathcal{C} .
 (b) Déterminer les extrema libres éventuels de f .
 (c) Déterminer le ou les points P de \mathcal{C} pour lesquels la distance entre la tangente à \mathcal{C} en P et l'origine est maximale (resp. minimale).

5. On fixe un repère orthonormé de l'espace. Quelle est la distance entre le point de coordonnées cartésiennes (x_0, y_0, z_0) et l'ellipsoïde d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$?

6. On donne la fonction f par

$$f(x, y) = \arcsin(1 - xy).$$

- Déterminer les éventuels extrema de f dans son domaine de continuité.
 - Déterminer les extrema de f sous la contrainte $x^2 + y^2 = 1$.

7. Si f est une fonction de $L^2(\mathbb{R})$ telle que $x \mapsto xf(x)$ soit de carré intégrable, on pose

$$\Delta_f = \int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx.$$

- (i) Pour $f(x) = e^{-x^2/4}$, montrer que $\Delta_f = \sqrt{2\pi}$.
 (ii) En déduire l'égalité suivante (principe d'incertitude d'Heisenberg dans le cas d'une Gaussienne)

$$\Delta_f \Delta_{\hat{f}} = \pi^2$$

pour $f(x) = e^{-x^2/4}$ et en utilisant la notation \widehat{f} pour la transformée de Fourier négative de f .²

8. Soit f une fonction continue sur \mathbb{R} , telle que $x \mapsto x^2 f(x)$ soit borné sur \mathbb{R} . En supposant que l'on peut permuter séries et intégrales, démontrer que

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(x+m) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}_{2\pi m}^- f e^{2i\pi m x}.$$

En déduire que

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x+m)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}, \quad x \notin \mathbb{Z}.$$

²Pour rappel: $\mathcal{F}_y^\pm g_a = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{y^2}{4a}}$ pour $g_a(x) = e^{-ax^2}$, $a > 0$.

2ème année de bachelier en informatique
MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES B, 2006-2007 - TD de mai 2007

1. On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé. On donne la droite d et, pour tout réel r , on donne le plan Π_r par l'intermédiaire des équations cartésiennes

$$d : \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3z = 0 \end{cases} \quad \Pi_r : x + r^2y + rz + 1 = 0.$$

- Déterminer des équations paramétriques vectorielles de d et de Π_r .
 - Déterminer le ou les réel(s) r tel(s) que Π_r et d soient parallèles.
 - Déterminer le ou les réel(s) r tel(s) que Π_r contienne d .
 - Déterminer le ou les réel(s) r tel(s) que Π_r et d soient orthogonaux.
 - Pour $r = 2$, déterminer l'équation cartésienne du plan Π' orthogonal à Π_2 contenant la droite d .
2. Soient f, g deux fonctions continues sur \mathbb{R} , à support compact.³ Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)dy.$$

- Montrer que cette expression définit une fonction continue sur \mathbb{R} (notée $f * g$) dont le support est compact.
 - Montrer⁴ que $f * g$ est intégrable sur \mathbb{R} et que sa transformée de Fourier est égale au produit des transformées de Fourier de f et g .
3. On donne les fonctions suivantes ($x \in \mathbb{R}$)

$$f_1(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0, \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ -e^x & \text{si } x < 0, \end{cases} \quad f_3(x) = e^{-|x|}, \quad f_4(x) = \frac{1}{1+ix}.$$

- Pour chacune de ces fonctions, déterminer à quel(s) espace(s) $L^1(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R})$ elle appartient et si elle est bornée sur \mathbb{R}
 - Déterminer ensuite la norme de chacune de ces fonctions dans chacun des espaces auquel elle appartient, ainsi que sa borne supérieure (sur \mathbb{R}) s'il y a lieu.
 - Représenter les fonctions f_1, f_2, f_3 dans un même repère orthonormé.
 - Déterminer la transformée de Fourier (-) de f_1, f_2, f_3 , en spécifiant s'il s'agit de la transformée dans L^1 ou L^2 .
 - Déterminer la transformée de Fourier (+) de f_4 , en spécifiant s'il s'agit de la transformée dans L^1 ou L^2 . Montrer que cette transformée est nulle sur $] -\infty, 0[$.
 - Déterminer (si possible) le produit de composition $f_1 * f_1$ ainsi que sa transformée de Fourier (-).
4. Pour tout naturel positif ou nul m , on pose $u_m(x) = \cos(mx)$, $x \in \mathbb{R}$; pour tout naturel strictement positif m , on pose $v_m(x) = \sin(mx)$, $x \in \mathbb{R}$.
- Montrer que ces fonctions sont orthogonales dans $L^2([-\pi, \pi])$ mais pas dans $L^2[0, \pi]$.

³- Le support d'une fonction f définie sur \mathbb{R} est le complémentaire du plus grand ouvert d'annulation de f , ou encore l'adhérence de l'ensemble des points où elle diffère de 0.

-Un compact de \mathbb{R} est un ensemble borné fermé; un fermé de \mathbb{R} est donc compact si et seulement s'il est inclus dans un intervalle du type $[a, b]$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

⁴Ce résultat est valable aussi si f, g sont seulement intégrables sur \mathbb{R}

- Développer les fonctions f, g suivantes en série trigonométrique de Fourier dans $L^2([-\pi, \pi])$ en vous servant des fonctions de base $u_m(m \geq 0)$ et $v_m(m > 0)$

$$f(x) = 1, \quad x \in [-\pi, \pi]; \quad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, \pi] \\ -1 & \text{si } x \in [-\pi, 0[\end{cases}$$

- En déduire la valeur de la somme $\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1}$.

5. On considère la fonction f donnée par $f(x, y, z) = xyz$.

- Déterminer ses éventuels extrema libres dans \mathbb{R}^3 .

- Si $g(x, y, z) = x^2 + 4y^2 - 1$, déterminer ses éventuels extrema sous la contrainte $g = 0$. Quel ensemble est décrit par l'équation $g(x, y, z) = 0$?

6. Diagonaliser la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ par une matrice orthogonale.

7.2.4 Examens écrits

Compléments de mathématiques Examen du 08 janvier 2007 (1ere session)

2e année de bachelier en géomatique-géométrie

1. (6 points)

On fixe un repère orthonormé de l'espace. On donne la droite d et le plan π par leurs équations cartésiennes

$$d : \begin{cases} x - y = 0 \\ x - z = 1 \end{cases}, \quad \pi : x + y + 2z = 1.$$

1.1) Déterminer la distance entre d et π .1.2) Déterminer la distance entre le point P_0 de coordonnées $(1, 0, -1)$ et le plan π .1.3) Déterminer des équations cartésiennes de la droite d_0 passant par le point P_0 et parallèle à d .1.4) Déterminer des équations paramétriques cartésiennes du plan π .

2. (7 points)

2.1) On donne un repère orthonormé du plan et, dans celui-ci, on considère la courbe C d'équation cartésienne

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = -1.$$

Quel est le nom de cette courbe? Que vaut son excentricité? Quelles sont les coordonnées cartésiennes des foyers? Représenter C , ainsi que les foyers.

2.2) Calculer la distance (en km) entre les villes A et B dont les latitude et longitude respectives sont données ci-dessous (on considère que la longueur d'un grand cercle est 40 000 kms).

A : $50^\circ 40'$ latitude nord, $5^\circ 30'$ longitude est

B : $40^\circ 50'$ latitude nord, 75° longitude ouest.

3. (9 points) Soient les fonctions f, g suivantes

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si } x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Représenter f et g dans un repère orthonormé. Déterminer les transformées de Fourier de ces fonctions et montrer que

$$(\mathcal{F}^\pm g)^2 = \mathcal{F}^\pm f.$$

4. (9 points) Développer les fonctions f, g suivantes en série trigonométrique de Fourier dans $L^2([-\pi, \pi])$; exprimer votre réponse en utilisant uniquement des fonctions sin, cos et simplifier les calculs au maximum.

$$f(x) = 1, \quad x \in [-\pi, \pi]; \quad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

5. (9 points) On donne les fonctions f_1, f_2 par

$$f_1(x, y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \quad f_2(x, y) = x^2 + \sqrt{5}xy - y^2.$$

5.1) Déterminer les points stationnaires et les extrema libres locaux éventuels de f_1 . Ceux-ci sont-ils globaux? Pourquoi?

5.2) Déterminer les points stationnaires de f_2 , ainsi que ses extrema libres locaux éventuels. Ceux-ci sont-ils globaux? Pourquoi?

5.3) Déterminer les éventuels extrema globaux de f_2 sous la contrainte $x^2 + y^2 = 1$.

Mathématiques générales B Examen du 29 mai 2007

2e année de bachelier en informatique

1. (5 points) On donne $f(x, y) = x + \sqrt{3}y$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$
 - 1.1) Déterminer les extrema libres éventuels de f . Justifier votre réponse.
 - 1.2) Déterminer les extrema liés éventuels de f sous la contrainte $x^2 + y^2 = 4$. Ces extrema sont-ils locaux ou globaux? Justifier votre réponse.
2. (5 points) Soient les fonctions f, g suivantes

$$f(x) = \sin x, \quad g(x) = \sin^2 x.$$

Déterminer le développement en série trigonométrique de Fourier de ces fonctions dans $L^2([0, \pi])$ en n'utilisant que des fonctions sin et cos comme fonctions de base. Préciser de quelle façon les séries convergent. Justifier toutes vos réponses.

3. (8 points) On donne les fonctions f et g suivantes

$$f(x) = e^{-|x|}, x \in \mathbb{R} \quad g(x) = |x|e^{-|x|}, x \in \mathbb{R}.$$

- 3.1) Ces fonctions sont-elles intégrables (resp. de carré intégrable) dans \mathbb{R} ? Pourquoi?
- 3.2) Déterminer (si possible) la transformée de Fourier négative de chacune de ces fonctions dans $L^1(\mathbb{R})$ (resp. $L^2(\mathbb{R})$).
- 3.3) Déterminer une expression explicite de la fonction⁵ $f * f$, montrer que celle-ci est intégrable et la comparer aux fonctions f et g .
- 3.4) Déterminer la transformée de Fourier négative de $f * f$.
4. (2 points) Déterminer des équations paramétriques ainsi que l'équation cartésienne du (ou des) plan(s) parallèle(s) à la droite d'équation

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$$

et contenant la droite d'équation

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

⁵Pour rappel, et pour autant que l'intégrale ait un sens, on définit $(F * G)(x) = \int_{\mathbb{R}} F(y)G(x - y)dy$.

Mathématiques générales B
Examen de seconde session— 20 août 2007

2e année de bachelier en informatique

1. (5 points) On donne $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$
 - 1.1) Déterminer les extrema libres éventuels de f . Préciser s'ils sont locaux ou globaux. Justifier votre réponse.
 - 1.2) Déterminer les extrema globaux éventuels de f sous la contrainte $x^2 + y^2 = 1$. Justifier votre réponse.
 - 1.3) Déterminer les extrema globaux éventuels de f dans l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Justifier votre réponse.

2. (5 points) Soient les fonctions f, g suivantes

$$f(x) = \sin(2x), \quad g(x) = x \quad x \in [-\pi, \pi].$$

Déterminer le développement en série trigonométrique de Fourier de ces fonctions dans $L^2([-\pi, \pi])$ en n'utilisant que des fonctions sin et cos comme fonctions de base.

3. (8 points) On donne les fonctions suivantes

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad g(x) = e^{-|x|} (x \in \mathbb{R}).$$

- 3.1) Ces fonctions sont-elles intégrables (resp. de carré intégrable) dans \mathbb{R} ? Pourquoi?
 - 3.2) Déterminer la transformée de Fourier (négative) de chacune de ces fonctions, en spécifiant s'il s'agit de la transformée dans L^1 ou L^2 .
 - 3.3) Si R désigne la partie réelle de la transformée de Fourier (négative) de f et si I désigne la partie imaginaire de cette transformée, montrer que l'on a $2(R(y) - yI(y)) = \mathcal{F}_y^- g$, $y \in \mathbb{R}$.
 - 3.4) Déterminer (si possible) le produit de composition⁶ $g * g$ ainsi que sa transformée de Fourier (négative)
4. (2 points) Déterminer des équations paramétriques ainsi que l'équation cartésienne du (ou des) plan(s) parallèle(s) à la droite d'équation

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$$

et contenant la droite d'équation

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

⁶Pour rappel, et pour autant que l'intégrale ait un sens, on définit $(F * G)(x) = \int_{\mathbb{R}} F(y)G(x - y)dy$.

7.3 Solutions

Plusieurs solutions se trouvent dans les notes du cours A (voir examens des chimistes).

Solutions aux questions de l'examen du 29 mai 2006

2ème année de bachelier en informatique et en géométrie

Question 1) On a

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x + 1\}$$

et, successivement

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{x+1}^{+\infty} f(x, y) dy \right) dx &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2|x|} \left(\int_{x+1}^{+\infty} e^{-y} dy \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2|x|} e^{-(x+1)} dx \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-3x-1} dx + \int_{-\infty}^0 e^{x-1} dx \\ &= \frac{1}{e} \left(\frac{1}{3} + 1 \right) = \frac{4}{3e}. \end{aligned}$$

Comme f est continu sur A et à valeurs positives, ce calcul montre aussi que f est intégrable sur A et que

$$\int \int_A f(x, y) dx dy = \frac{4}{3e}.$$

Question 2) 2.1) Pour tous réels m, n, x , on a $2 \cos(mx) \cos(nx) = \cos((m+n)x) + \cos((m-n)x)$. On en déduit que pour tous naturels strictement positifs m, n on a

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin((m+n)x)}{m+n} + \frac{\sin((m-n)x)}{m-n} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

lorsque $m \neq n$ et

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(2mx)}{2m} + 1 \right]_{-\pi}^{\pi} = \pi$$

lorsque $m = n$. Il s'ensuit que $\langle u_m, u_n \rangle = 0 \Leftrightarrow m \neq n$.

2.2) On a $u_0 = 1$ donc $f = u_0$.

Les fonctions

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(mx)}{\sqrt{\pi}} (m \in \mathbb{N}_0), \frac{\sin(mx)}{\sqrt{\pi}} (m \in \mathbb{N}_0)$$

forment une base orthonormée de $L^2([-\pi, \pi])$. Dès lors on a (les calculs sont simplifiés par le fait que g est impair)

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{2\pi} \langle g, 1 \rangle + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\cos(mx)}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \cos(mt) dt + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\sin(mx)}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \sin(mt) dt \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{+\infty} \sin(mx) \int_0^{\pi} \sin(mt) dt = \frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^{+\infty} \sin((2m+1)x) \int_0^{\pi} \sin((2m+1)t) dt \\ &= \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\sin((2m+1)x)}{2m+1} \end{aligned}$$

2.2) On a

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 = \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\sin((2m+1)(\pi/2))}{2m+1} = \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1}$$

donc

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Question 3) 3.1) On a

$$D_x g(x, y) = 2x - 3y, \quad D_y g(x, y) = -3x + 2y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Le plan Π , tangent à la surface S d'équation $z = g(x, y)$ au point de coordonnées $(0, 0, 0)$ a pour équation cartésienne $z - 0 = D_x g(0, 0)(x - 0) + D_y g(0, 0)(y - 0)$ c'est-à-dire

$$\Pi : z = 0.$$

Items 3.2) et 3.3) de cette question: voir la question 5 de l'examen "Écrit 2" , 1er bachelier en chimie, 30 mai 2005. La solution est dans les notes du cours A.

Table des matières

1	Géométrie analytique dans l'espace	1
1.1	Calcul vectoriel	1
1.1.1	Définitions de base	1
1.1.2	Dépendance et indépendance linéaire de vecteurs	1
1.1.3	Base et composantes	3
1.1.4	Expression analytique de la dépendance linéaire	4
1.1.5	Produit scalaire de deux vecteurs	4
1.1.6	Produit vectoriel de deux vecteurs	5
1.1.7	Projections orthogonales	6
1.2	Repère de l'espace (espace=ensemble de points)	8
1.3	Le plan (ensemble de points)	8
1.3.1	Définitions et propriétés de base	8
1.3.2	Equations paramétriques	9
1.3.3	Equation cartésienne	10
1.3.4	Plans parallèles, plans orthogonaux	10
1.4	La droite (ensemble de points)	11
1.4.1	Définitions et propriétés de base	11
1.4.2	Equations paramétriques	12
1.4.3	Equations cartésiennes	13
1.4.4	Droites parallèles, orthogonales	14
1.5	Parallélisme et orthogonalité entre droite et plan	14
1.5.1	Définitions	14
1.5.2	Quelques expressions analytiques	15
1.6	Distances	15
1.6.1	Distance entre deux points	15
1.6.2	Distance entre un point et un plan	16
1.6.3	Distance entre un point et une droite	17
1.6.4	Distance entre deux droites	18
1.6.5	Distance entre une droite et un plan	20
1.6.6	Distance entre deux plans	21
1.7	Angles	21
1.8	Faisceaux de plans	22
1.9	Exercices	23
1.9.1	Calcul vectoriel	23
1.9.2	Géométrie analytique	26
1.9.3	Solutions	32

2	Trigonométrie sphérique	36
2.1	Quelques rappels sur les coniques du plan et les quadriques de l'espace	36
2.2	Trigonométrie sphérique	36
2.2.1	Définitions de base	36
2.2.2	Quelques propriétés et cas particuliers	38
2.2.3	Triangles polaires	38
2.2.4	A propos des angles et des côtés	39
2.3	Formules fondamentales de trigonométrie sphérique	40
2.3.1	Cas d'un triangle plan	40
2.3.2	Cas d'un triangle sphérique	40
2.4	Aire d'un fuseau, d'une zone, d'un triangle sphérique	42
2.4.1	Aire d'un fuseau	43
2.4.2	Aire d'une zone	43
2.4.3	Aire d'un triangle sphérique	44
2.5	Exercices	44
2.6	Annexe	46
3	Quelques exemples d'approximations numériques	48
3.1	Rappels et compléments sur les suites de réels	48
3.2	Calcul de zéros de fonctions	51
3.2.1	Introduction	51
3.2.2	Méthode de la bissection	52
3.2.3	Méthode de la tangente (ou de Newton)	53
3.2.4	Méthode de la sécante	54
3.2.5	Méthode de Stefenssen	56
3.2.6	Méthode du point fixe	56
3.3	Approximation d'intégrales	58
3.3.1	Méthode des rectangles	58
3.3.2	Méthode des trapèzes	60
3.3.3	Méthode de Simpson	62
3.3.4	Remarque: introduction des méthodes de Newton-Cotes	64
3.4	Exercices	66
3.4.1	Calcul de zéros	66
3.4.2	Approximation d'intégrales	67
4	Transformation et séries trigonométriques de Fourier	68
4.1	Rappels sur le calcul intégral	68
4.1.1	Critères d'intégrabilité	68
4.1.2	Changement de variables	69
4.1.3	Un calcul d'intégrale fléchée	69
4.2	La transformation de Fourier	69
4.2.1	Transformation de Fourier des fonctions intégrables	69
4.2.2	Transformation de Fourier des fonctions de carré intégrable	71
4.3	Les séries trigonométriques de Fourier	73
4.3.1	Définitions et propriétés de base	73
4.3.2	Propriétés relatives à la convergence	74
4.3.3	Le phénomène de Gibbs	75
4.3.4	Le théorème de Shannon	78
4.3.5	Autres bases orthonormées	79

5 Compléments à l'étude des fonctions de plusieurs variables	80
5.1 TAF et développement de Taylor	80
5.1.1 Résultats dans \mathbb{R}	80
5.1.2 TAF	80
5.1.3 Développement limité de Taylor	82
5.2 Extrema libres	85
5.3 Application: la régression linéaire	89
5.3.1 Généralités	89
5.3.2 La régression linéaire	90
5.4 Extrema dans des ensembles bornés fermés	91
5.5 Extrema liés: la méthode des multiplicateurs de Lagrange	91
5.6 Exercices	92
6 Compléments de calcul matriciel	94
6.1 Une application de la diagonalisation	94
6.1.1 Introduction	94
6.1.2 Résolution	94
6.1.3 Conclusion	98
6.2 Matrices réelles orthogonales	98
6.3 Matrices réelles symétriques	98
6.3.1 A propos des valeurs propres	98
6.3.2 Diagonalisation	99
6.3.3 Propriétés pour la recherche des extrema	100
6.4 Matrices et formule de changement de base	100
6.4.1 Introduction	100
6.4.2 Changement de base	100
6.4.3 Exemples	101
6.4.4 Changement de base orthonormée	102
6.5 Matrices réelles orthogonales de déterminant égal à 1	103
6.5.1 Dimension 2	103
6.5.2 Dimension 3	103
6.6 Matrices et applications linéaires	103
6.6.1 Exemples	103
6.6.2 Cas général	105
6.6.3 Changement de base et matrice qui représente un opérateur linéaire	105
6.6.4 Cas des applications linéaires dites orthogonales	106
6.7 Exercices	107
7 Exercices types-TD-Examens	110
7.1 Exemples de questions d'examens écrits (2003-2006)	110
7.2 2006-2007	121
7.2.1 Exercices "types", 2006-2007	122
7.2.2 En plus...	128
7.2.3 Travaux dirigés	129
7.2.4 Examens écrits	133
7.3 Solutions	136

Références

- [1] Richard Courant, What is mathematics?, déjà référencé dans les notes du cours A.
- [2] Ellis-Gulick, déjà référencé dans les notes du cours A.
- [3] Pascal Laubin, Analyse numérique, 2ème candidature en sciences mathématiques, 1999-2000.
- [4] Jean-Pierre Schneiders, Analyse numérique, 2ème candidature en sciences mathématiques et en géographie, option géomatique-géométrologie, 2003-2004.
- [5] Françoise Bastin, Mathématiques générales, A.