

COMPLÉMENTS DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES (B)

TD octobre-novembre 2007 - Suggestions pour solutions

Exercice 1. Soit un signal f (on suppose que cette fonction est intégrable et de carré intégrable). On définit l'autocorrélation du signal par

$$E_f(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{f(x-t)}dx, t \in \mathbb{R}$$

et la densité spectrale de puissance de ce signal (PSD) par

$$D_f(y) = |\hat{f}(y)|^2, y \in \mathbb{R}$$

où $\hat{f}(y)$ désigne la transformée de Fourier négative de f en y . On pose $f^s(x) = \overline{f(-x)}$, $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que l'autocorrélation s'écrit

$$E_f = f * f^s$$

2. Montrer que l'autocorrélation d'une fonction à valeurs réelles est une fonction paire.

3. Montrer que

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |E_f(t)| = E_f(0)$$

4. Montrer que la densité spectrale et l'autocorrélation sont liées par la transformation de Fourier.

Solution. 1) Soit $t \in \mathbb{R}$. On a directement

$$(f * f^s)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x)f^s(t-x)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{f(x-t)}dx = E_f(t).$$

d'où la conclusion.

2) Soit f une fonction à valeurs réelles. On a

$$\begin{aligned} E_f(-t) &= \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{f(x+t)}dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)f(x+t)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y-t)f(y)dy \quad \text{via le changement de variables } x = y - t \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y)\overline{f(y-t)}dt = E_f(t) \end{aligned}$$

3) Soit $t \in \mathbb{R}$. Considérons la fonction f de l'énoncé et la fonction g définie par $g(x) = f(x-t)$, $x \in \mathbb{R}$. Il s'agit de deux fonctions de $L^2(\mathbb{R})$ et on peut donc leur appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans L^2 . On a

$$|\langle f, g \rangle_{L^2}| \leq \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2}$$

c'est-à-dire

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x-t)}dx \right| \leq \|f\|_{L^2} \|f(\cdot - t)\|_{L^2}$$

Comme $\|f(\cdot - t)\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$, on obtient

$$|E_f(t)| \leq \|f\|_{L^2}^2$$

De là, on tire

$$E_f(t) \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{f(x)}dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{f(x-0)}dx = E_f(0)$$

donc

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |E_f(t)| = E_f(0)$$

4) On sait que $E_f = f * f^s$. En appliquant la transformée de Fourier négative aux deux membres de cette égalité, on obtient que $\mathcal{F}_y^- E_f = \mathcal{F}_y^- f \mathcal{F}_y^- f^s$. Or on a

$$\mathcal{F}_y^- f^s = \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} \overline{f(-x)} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{ixy} \overline{f(x)} dx = \overline{\int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} f(x) dx} = \overline{\mathcal{F}_y^- f}$$

On en tire donc que

$$\mathcal{F}_y^- E_f = \mathcal{F}_y^- f \overline{\mathcal{F}_y^- f} = |\mathcal{F}_y^- f|^2 = D_f(y)$$

Exercice 2. Si possible, déterminer le produit de composition des fonctions f et g suivantes

$$f(x) = |x|, x \in \mathbb{R} \quad g(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}, x \in \mathbb{R}$$

Solution. Soit $y \in \mathbb{R}$. On a

$$(f * g)(y) = \int_{\mathbb{R}} f(y-x)g(x)dx = \int_{\mathbb{R}} |y-x| \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$$

et cette dernière intégrale a un sens puisque $x \mapsto |y-x| \frac{1}{(1+x^2)^2}$ est continu et

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^2 |y-x| \frac{1}{(1+x^2)^2} = 0$$

On a alors

$$\begin{aligned} (f * g)(y) &= \int_{-\infty}^y \frac{y-x}{(1+x^2)^2} dx + \int_y^{+\infty} \frac{x-y}{(1+x^2)^2} dx \\ &= y \int_{-\infty}^y \frac{1}{(1+x^2)^2} dx - \int_{-\infty}^y \frac{x}{(1+x^2)^2} dx + \int_y^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)^2} dx - y \int_y^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx \end{aligned}$$

Calculons alors une primitive de chacune des fonctions

$$x \mapsto \frac{x}{(1+x^2)^2}, \quad x \mapsto \frac{1}{(1+x^2)^2}.$$

D'une part, on a directement

$$\int \frac{x}{(1+x^2)^2} dx \simeq \frac{-1}{2(1+x^2)}.$$

D'autre part, comme

$$\frac{1}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{1+x^2} - x \frac{x}{(1+x^2)^2},$$

on obtient

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \int \frac{dx}{1+x^2} - \int x \frac{x}{(1+x^2)^2} dx = \arctan(x) + \frac{1}{2} \int x D \left(\frac{1}{1+x^2} \right) dx \simeq \frac{1}{2} \left(\arctan(x) + \frac{x}{1+x^2} \right)$$

En utilisant ces primitives pour le calcul des intégrales donnant l'expression de $(f * g)(y)$, on obtient

$$(f * g)(y) = 1 + y \arctan(y)$$

Exercice 3. On considère $f(x) = \frac{\cos(x)}{x}$, $x \in [1, +\infty[$. Montrer que cette fonction n'est pas intégrable sur l'intervalle $[1, +\infty[$ mais qu'elle admet une intégrale fléchée en $+\infty$. Suggestion : On sait que la fonction (non-intégrable à l'infini) $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ admet une intégrale fléchée à l'infini.

Solution. Montrons que f n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$. Si f était intégrable, par le changement de variables $x = y - \frac{\pi}{2}$, la fonction $g(y) = \frac{\sin(y)}{y - \frac{\pi}{2}}$ serait intégrable sur l'intervalle $[1 + \frac{\pi}{2}, +\infty[$. Or on a

$$\frac{|\sin(y)|}{y - \frac{\pi}{2}} \geq \frac{|\sin(y)|}{y}, y > \frac{\pi}{2}$$

Comme $y \mapsto \frac{\sin(y)}{y}$ n'est pas intégrable en $+\infty$, cela entraîne que $y \mapsto \frac{\sin(y)}{y - \frac{\pi}{2}}$ ne l'est pas non plus, d'où une contradiction.

Montrons que la fonction $x \mapsto \frac{\cos(x)}{x}$ admet une intégrale fléchée en $+\infty$. On doit prouver que la limite

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{\pi}^{r_m} \frac{\cos(x)}{x} dx$$

existe et est finie pour toute suite de réels $(r_m)_{m \in \mathbb{N}}$ telle que $r_m \rightarrow +\infty$. Soit $(r_m)_{m \in \mathbb{N}}$ une telle suite et fixons $m \in \mathbb{N}$. On a successivement

$$\begin{aligned} \int_{\pi}^{r_m} \frac{\cos(x)}{x} dx &= - \int_{\pi-\pi/2}^{r_m-\pi/2} \frac{\sin(y)}{y+\pi/2} dy \\ &= - \int_{\pi/2}^{r'_m} \frac{\sin(y)}{y} dy + \int_{\pi/2}^{r'_m} \left(-\frac{\sin(y)}{y+\pi/2} + \frac{\sin(y)}{y} \right) dy \\ &= - \int_{\pi/2}^{r'_m} \frac{\sin(y)}{y} dy + \frac{\pi}{2} \int_{\pi/2}^{r'_m} \frac{\sin(y)}{y(y+\pi/2)} dy \end{aligned}$$

On sait que la fonction $y \mapsto \frac{\sin(y)}{y}$ admet une intégrale fléchée en $+\infty$. De plus, puisque la fonction $y \mapsto \frac{\sin(y)}{y(y+\pi/2)}$ est intégrable sur $[\pi/2, +\infty[$, elle admet également une intégrale fléchée en $+\infty$. Au total la fonction de l'énoncé admet également une intégrale fléchée en $+\infty$.

Exercice 4. Soit la fonction

$$g(x) = \frac{1 - \cos(x)}{x}, \quad x \neq 0, \quad g(0) = 0.$$

Montrer que cette fonction est continue sur \mathbb{R} , appartient à $L^2(\mathbb{R})$ mais pas à $L^1(\mathbb{R})$. En déterminer ensuite la transformée de Fourier (négative).

Solution. Montrons que la fonction f n'appartient pas à L^1 . Puisque cette fonction est positive, cela revient à montrer qu'elle n'admet pas d'intégrale fléchée en $+\infty$. Supposons donc le contraire. Si $x \mapsto \frac{1-\cos(x)}{x}$ admet une intégrale fléchée en $+\infty$, puisque $x \mapsto \frac{\cos(x)}{x}$ admet aussi une intégrale fléchée en $+\infty$ alors leur somme, à savoir la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ admettrait également une intégrale fléchée en $+\infty$. Comme on sait que ce n'est pas le cas, on en conclut que $x \mapsto \frac{1-\cos(x)}{x}$ n'admet pas d'intégrale fléchée en $+\infty$ et donc n'est pas intégrable sur \mathbb{R} .

Montrons que f appartient à L^2 . Elle est continue sur \mathbb{R} . En effet son expression montre directement qu'elle est continue sur \mathbb{R}_0 et une application du théorème de l'Hospital montre que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} = 0$$

De plus on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{3/2} |f(x)|^2 = 0$. La fonction f appartient donc à $L^2 \setminus L^1$.

Considérons les fonctions

$$f_M(x) = \frac{1 - \cos x}{x} \chi_{[-M, M]}(x), \quad M \in \mathbb{N}_0.$$

Ces fonctions appartiennent à $L^1 \cap L^2$ et elles convergent dans L^2 vers f .

Etudions leur transformée de Fourier. Puisque f_M est une fonction impaire, on a, pour M fixé,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_y^\pm f_M &= \int_{\mathbb{R}} e^{\pm ixy} \frac{1 - \cos x}{x} \chi_{[-M, M]}(x) dx \\ &= \int_{-M}^M e^{\pm ixy} \frac{1 - \cos x}{x} dx \\ &= \pm 2i \int_0^M \sin(xy) \frac{1 - \cos x}{x} dx \\ &= \pm 2i \left(\int_0^M \frac{\sin(xy)}{x} dx - \int_0^M \frac{\sin(xy) \cos x}{x} dx \right) \\ &= \pm 2i \left(\int_0^M \frac{\sin(xy)}{x} dx - \int_0^M \frac{\sin(x(y+1)) + \sin(x(y-1))}{2x} dx \right) \\ &= \pm i \left(\int_0^M \frac{2 \sin(xy)}{x} dx - \int_0^M \frac{\sin(x(y+1))}{x} dx - \int_0^M \frac{\sin(x(y-1))}{x} dx \right). \end{aligned}$$

Puisque l'on sait que pour $\lambda \in \mathbb{R}_0$ on a

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \int_0^M \frac{\sin(\lambda x)}{x} dx = \text{sign}(\lambda) \frac{\pi}{2}$$

on obtient

$$F_y^\pm f = \lim_{M \rightarrow +\infty} \mathcal{F}_y^\pm f_M = \begin{cases} 0 & \text{si } y \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[\cup \{0\} \\ \mp i\pi & \text{si } y \in]-1, 0[\\ \pm i\pi & \text{si } y \in]0, 1[\\ \pm i\frac{\pi}{2} & \text{si } y = 1 \\ \mp i\frac{\pi}{2} & \text{si } y = -1 \end{cases}$$

ou encore

$$F_y^+ f = -i\pi\chi_{]-1,0[}(y) + i\pi\chi_{]0,1[}(y), \quad F_y^- f = i\pi\chi_{]-1,0[}(y) - i\pi\chi_{]0,1[}(y)$$

Exercice 5. On donne les fonctions suivantes

$$f_1(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}, \quad f_2(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ -e^x & \text{si } x < 0 \end{cases},$$

$$f_3(x) = e^{-|x|} (x \in \mathbb{R}), \quad f_4(x) = \frac{1}{1+ix} = \frac{1-ix}{1+ix} (x \in \mathbb{R})$$

- Déterminer la transformée de Fourier (-) de f_1, f_2, f_3 , en précisant s'il s'agit de la transformée dans L^1 ou L^2 .
- Déterminer la transformée de Fourier (+) de f_4 en spécifiant s'il s'agit de la transformée dans L^1 ou L^2 . Montrer que cette transformée est nulle sur $] -\infty, 0[$.
- Déterminer (si possible) le produit de composition $f_1 * f_1$ ainsi que sa transformée de Fourier.

Solution. 1) [Transformée de Fourier de f_1 :] Puisque $f_1 \in C_0([0, +\infty[)$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} = 0$, la fonction appartient à $L^1(\mathbb{R})$ et on a

$$\mathcal{F}_y^\pm f_1 = \int_0^{+\infty} e^{-x} e^{\pm ixy} dx = \int_0^{+\infty} e^{-(1 \mp iy)x} dx = \left[\frac{e^{-(1 \mp iy)x}}{-(1 \mp iy)} \right]_{x=0}^{x \rightarrow +\infty} = \frac{1}{1 \mp iy}$$

On a calculé la transformée de Fourier (+) car elle nous servira plus loin dans l'exercice.

2) [Transformée de Fourier de f_2 :] La fonction f_2 est continue sur $[0, +\infty[$ et on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 f_2(x) = 0$. Elle est également continue sur $] -\infty, 0[$ et on a $\lim_{x \rightarrow 0} f_2(x) = -1$ ainsi que $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 f_2(x) = 0$. Au total, la fonction f_2 est intégrable sur \mathbb{R} et on a

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_y^- f_2 &= \int_{-\infty}^0 (-e^x) e^{-ixy} dx + \int_0^{+\infty} e^{-x} e^{-ixy} dx \\ &= -\int_0^{+\infty} e^{-x} e^{ixy} dx + \int_0^{+\infty} e^{-x} e^{-ixy} dx \\ &= -\mathcal{F}_y^+ f_1 + \mathcal{F}_y^- f_1 \\ &= \frac{-1}{1-iy} + \frac{1}{1+iy} = \frac{-2iy}{1+y^2} \end{aligned}$$

3) [Transformée de Fourier de f_3 :] La fonction f_3 est continue sur \mathbb{R} et on a

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^2 f_3(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^2 e^{-|x|} = 0$$

La fonction f_3 est donc intégrable sur \mathbb{R} et on a

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_y^- f_3 &= \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} e^{-|x|} dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x} \cos(xy) dx \\ &= 2\Re \int_0^{+\infty} e^{-x} e^{-ixy} dx = 2\Re \int_0^{+\infty} e^{-(1+iy)x} dx \\ &= 2\Re \left[\frac{-e^{-(1+iy)x}}{1+iy} \right]_{x=0}^{x \rightarrow +\infty} \\ &= 2\Re \left(\frac{1}{1+iy} \right) = 2\Re \left(\frac{1-iy}{1+y^2} \right) \\ &= \frac{2}{1+y^2} \end{aligned}$$

4) [Transformée de Fourier de f_4 :] La fonction $x \mapsto \frac{1}{1+ix}$ n'est pas intégrable car $\lim_{x \rightarrow \infty} x \frac{1}{1+ix}$ existe et est non nulle. Elle est de carré intégrable car elle est continue sur \mathbb{R} et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^2 \frac{1}{(1+ix)^2} = -1$. Puisque $\mathcal{F}_x^- f_1 = F_x^- f_1 = \frac{1}{1+ix} = f_4(x)$, le théorème de Fourier implique que

$$F_y^+ f_4 = F_y^+ F_x^- f_1 = 2\pi f_1(y) = 2\pi e^{-y} \chi_{[0, +\infty[}(y) \text{ pp}$$

Il est évident que cette fonction est nulle sur $] -\infty, 0[$.

5) [Produit de composition $f_1 * f_1$:] Montrons que le produit de composition a un sens. Soit $x \in \mathbb{R}$. Il faut montrer que la fonction $y \mapsto f_1(y)f_1(x-y)$ est intégrable sur \mathbb{R} . Si $x \leq 0$, cette fonction est nulle et si $x > 0$, elle s'écrit explicitement

$$f_1(y)f_1(x-y) = e^{-x} \chi_{[0, x]}(y).$$

Cette fonction de y est donc intégrable sur \mathbb{R} . On obtient aussi

$$(f_1 * f_1)(x) = e^{-x} \int_0^x dy = xe^{-x}, x > 0 \quad (f_1 * f_1)(x) = 0, x \leq 0.$$

6) [Transformée de Fourier de $f_1 * f_1$:] La fonction $x \mapsto xe^{-x} \chi_{[0, +\infty[}(x)$ est continue sur $[0, +\infty[$, nulle en dehors et on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 f_1(x) = 0$. Cette fonction est donc intégrable sur \mathbb{R} et on a

$$\mathcal{F}_y^-(f_1 * f_1) = \mathcal{F}_y^- f_1 \quad \mathcal{F}_y^- f_1 = \frac{1}{(1+iy)^2}$$

Exercice 6. Soit une fonction $u = u(x, t)$ ($x \in \mathbb{R}, t \geq 0$) de classe C_2 dont les dérivées partielles jusqu'à l'ordre 2 sont intégrables par rapport à x sur \mathbb{R} quel que soit t . Soit aussi une constante strictement positive v . On suppose que u vérifie l'équation

$$D_t u(x, t) = v^2 D_x^2 u(x, t), \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}$$

On pose

$$f(x) = u(x, 0), \quad \hat{f} = \mathcal{F}^- f$$

et on définit la fonction

$$F(y, t), \quad t \geq 0, y \in \mathbb{R}$$

de telle sorte que, pour t fixé, $F(y, t)$ soit la transformée de Fourier (négative) en y de la fonction $x \mapsto u(x, t)$.

1. Montrer que pour tout y , la fonction $t \mapsto F(y, t)$ vérifie

$$D_t F(y, t) + v^2 y^2 F(y, t) = 0.$$

2. Dédire du point précédent que l'on a

$$F(y, t) = \hat{f}(y) e^{-v^2 y^2 t}.$$

3. Dédire de ce qui précède que l'on a finalement

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} f\left(x + 2v\sqrt{ty}\right) e^{-y^2} dy, \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0.$$

Solution. 1) Soit $y \in \mathbb{R}$. Par définition on a

$$F(y, t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} u(x, t) dx.$$

Une dérivation par rapport à t sous le signe d'intégration (intégrales paramétriques) puis l'utilisation de l'hypothèse donne

$$D_t F(y, t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} D_t u(x, t) dx = v^2 \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} D_x^2 u(x, t) dx.$$

Cela étant, deux intégrations par parties donnent alors

$$D_t F(y, t) = v^2 (-iy)^2 \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} u(x, t) dx = -v^2 y^2 F(y, t)$$

2) Soit $y \in \mathbb{R}$. Vu le point 1), la fonction $t \mapsto F(y, t)$ est solution de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 1

$$D_t g(t) + v^2 y^2 g(t) = 0$$

dont le polynôme caractéristique est $z \mapsto z + v^2 y^2$. L'unique racine de ce polynôme est $-v^2 y^2$. Par conséquent, il existe une constante C telle que

$$F(y, t) = C e^{-v^2 y^2 t} \quad t \geq 0.$$

Comme

$$F(y, 0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} u(x, 0) dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} f(x) dx = \hat{f}(y)$$

on en déduit que $C = F(y, 0) = \hat{f}(y)$, donc

$$F(y, t) = \hat{f}(y) e^{-v^2 y^2 t}, \quad y \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0.$$

3) Si $t > 0$, la gaussienne $y \mapsto e^{-v^2 t y^2}$ vérifie

$$e^{-v^2 t y^2} = \frac{1}{2v\sqrt{\pi t}} \mathcal{F}_{x \rightarrow y}^- g(x) = \frac{1}{2v\sqrt{\pi t}} \hat{g}(y)$$

avec $g(x) = e^{-\frac{x^2}{4v^2 t^2}}$. On obtient ainsi

$$F(y, t) = \frac{1}{2v\sqrt{\pi t}} \hat{f}(y) \hat{g}(y) = \frac{1}{2v\sqrt{\pi t}} \mathcal{F}_y^- (f * g)$$

Or, par définition, on a

$$F(y, t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} u(x, t) dx = \mathcal{F}_{x \rightarrow y}^- u(x, t)$$

donc

$$u(x, t) = \frac{1}{2v\sqrt{\pi t}} (f * g)(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

vu les hypothèses de régularité de u et le théorème de Fourier. Pour conclure, il suffit donc d'examiner l'expression du produit de composition intervenant dans cette égalité. On a successivement

$$\begin{aligned} (f * g)(x) &= \int_{\mathbb{R}} g(y) f(x - y) dy \\ &= 2v\sqrt{t} \int_{\mathbb{R}} g(-2v\sqrt{t}y') f(x + 2v\sqrt{t}y') dy' \quad (-y = 2v\sqrt{t}y') \\ &= 2v\sqrt{t} \int_{\mathbb{R}} e^{-y'^2} f(x + 2v\sqrt{t}y') dy' \end{aligned}$$

donc

$$u(x, t) = \frac{1}{2v\sqrt{\pi t}} (f * g)(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} f(x + 2v\sqrt{t}y) dy$$

comme annoncé.

Pour $t = 0$ c'est immédiat puisque $u(x, 0) = f(x)$ et

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x + 0) e^{-y^2} dy = f(x) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy = f(x).$$

Exercice 7. Soit f une fonction continue sur \mathbb{R} , telle que $x \mapsto x^2 f(x)$ soit borné sur \mathbb{R} . En supposant que l'on peut permuter séries et intégrales, démontrer que

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(x + m) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}_{2\pi m}^- f e^{2i\pi m x}.$$

En déduire que

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x + m)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}, \quad x \notin \mathbb{Z}$$

Solution. La fonction

$$F(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(x+m)$$

est continue sur \mathbb{R} (car elle converge uniformément sur tout intervalle fermé borné de \mathbb{R}) et 1-périodique. Nous pouvons donc la développer en série trigonométrique de Fourier dans $L^2([0, 1])$. Ce développement est donné par

$$F = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \langle F, u_m \rangle u_m$$

avec $u_m(x) = e^{2i\pi mx}$ (la convergence a lieu dans $L^2([0, 1])$ et aussi en tout réel x si la fonction f est assez régulière-voir les résultats de convergence ponctuelle des séries trigonométriques de Fourier). Calculons les coefficients de ce développement : pour tout m , on a

$$\begin{aligned} \langle F, u_m \rangle &= \int_0^1 F(x) \overline{u_m(x)} dx = \int_0^1 \sum_{j=-\infty}^{+\infty} f(x+k) e^{-2i\pi mx} dx \\ &= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \int_0^1 f(x+k) e^{-2i\pi mx} dx \\ &= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \int_k^{k+1} f(x) e^{-2i\pi mx} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2i\pi mx} dx \\ &= \mathcal{F}_{2\pi m}^- f; \end{aligned}$$

on obtient bien la formule annoncée.

Montrons maintenant la seconde partie de l'énoncé. On applique le résultat obtenu au point précédent à la fonction f définie par

$$f(x) = \left(\frac{\sin(\pi x)}{x} \right)^2 \quad (x \neq 0), \quad f(0) = \pi^2$$

Rappelons alors que l'on a

$$\mathcal{F}_x^+ \chi_{[-\pi, \pi]} = \begin{cases} 2\pi & \text{si } x = 0 \\ \frac{2 \sin(\pi x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

Il s'ensuit que l'on a

$$f(x) = \left(\frac{1}{2} \mathcal{F}_x^+ \chi_{[-\pi, \pi]} \right)^2 = \frac{1}{4} \mathcal{F}_x^+ (\chi_{[-\pi, \pi]} * \chi_{[-\pi, \pi]})$$

et on obtient donc

$$\mathcal{F}_{2\pi m}^- f = \frac{\pi}{2} (\chi_{[-\pi, \pi]} * \chi_{[-\pi, \pi]}) (2\pi m)$$

pour tout m , grâce au théorème de Fourier et à la régularité des fonctions. On a

$$\begin{aligned} (\chi_{[-\pi, \pi]} * \chi_{[-\pi, \pi]})(x) &= \int_{\mathbb{R}} \chi_{[-\pi, \pi]}(y) \chi_{[-\pi, \pi]}(x-y) dy = \int_{\mathbb{R}} \chi_{[-\pi, \pi] \cap [-\pi+x, \pi+x]}(y) dy \\ &= \begin{cases} 2\pi - x & \text{si } x \in [0, 2\pi[\\ 2\pi + x & \text{si } x \in]-2\pi, 0[\\ 0 & \text{si } |x| \geq 2\pi \end{cases} \end{aligned}$$

donc

$$\mathcal{F}_{2\pi m}^- f = 0 \quad \text{si } m \neq 0, \quad \mathcal{F}_{2\pi m}^- f = \pi^2 \quad \text{si } m = 0.$$

Dès lors, pour tout réel non entier x , on a

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(x+m) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\pi(x+m))}{(x+m)^2} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\pi x)}{(x+m)^2} = \pi^2$$

(cette égalité reste en fait valable pour tout réel), donc

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x+m)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)} \quad (x \notin \mathbb{Z}).$$

Cette dernière relation est l'égalité annoncée.