Test de rentrée : Solutions

Exercice 1. (a) La matrice A est inversible lorsque $a \in [\pi, 5\pi] \setminus \left\{ \frac{5\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}, \frac{13\pi}{4} \frac{19\pi}{4} \right\}$ et, pour un tel a,

$$A^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}\sin(2)\left(\sqrt{2}\cos(a)+1\right)} \begin{pmatrix} \sin(2) & \cos(2) \\ -\sqrt{5}\,\mathrm{tg}(2) & \sqrt{10}\cos(a) \end{pmatrix}.$$

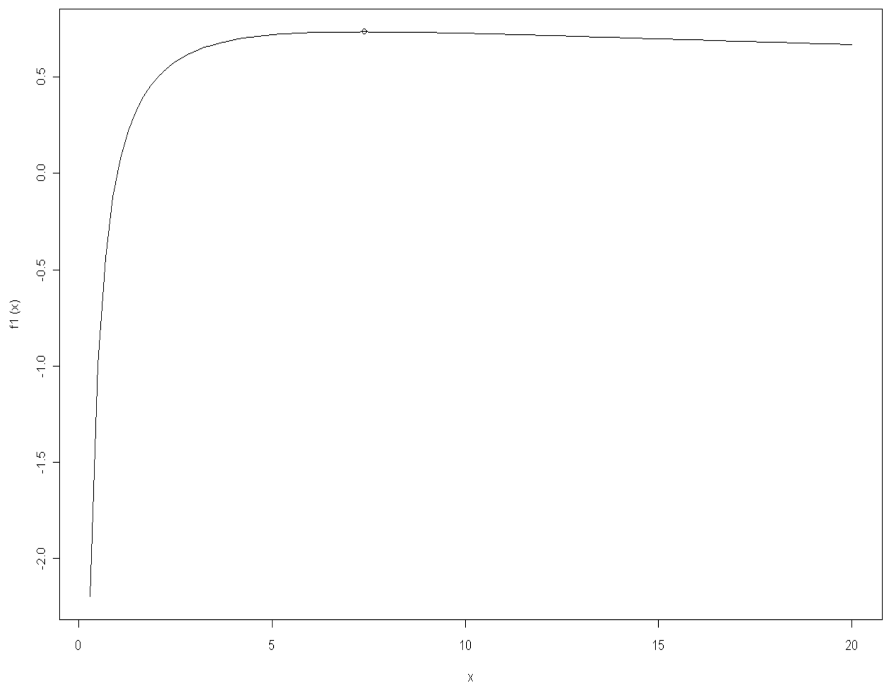
(b) Les valeurs propres de la matrice B sont $2+i$ et $2-i$. La matrice B est diagonalisable et la matrice

$$S = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

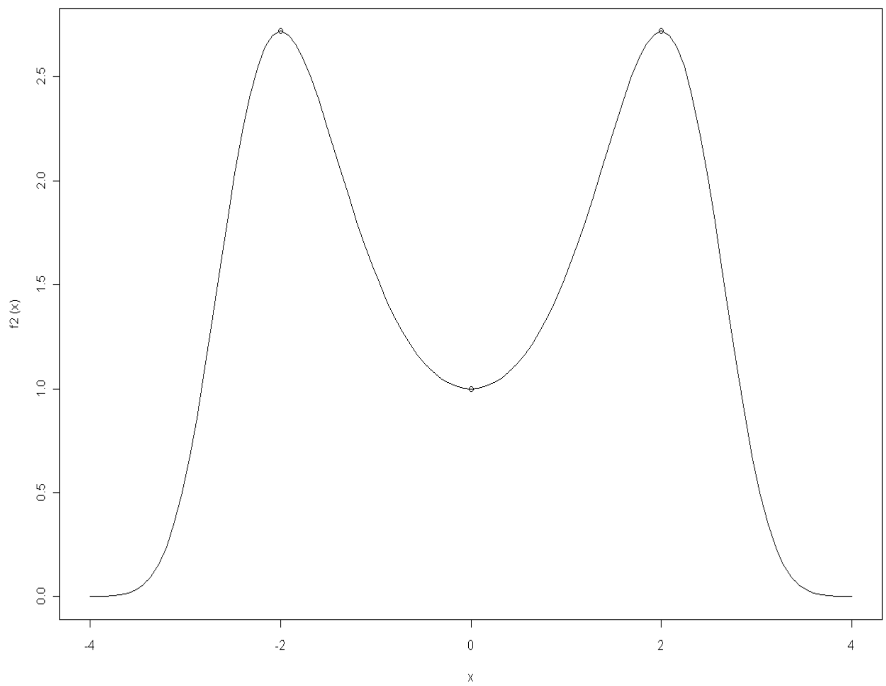
est telle que

$$S^{-1}BS = \begin{pmatrix} 2+i & 0 \\ 0 & 2-i \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. La fonction f_1 admet un seul extremum, à savoir le nombre e^2. Il s'agit d'un maximum global strict de f_1. Une représentation de la fonction f_1 est donnée par le graphique suivant.



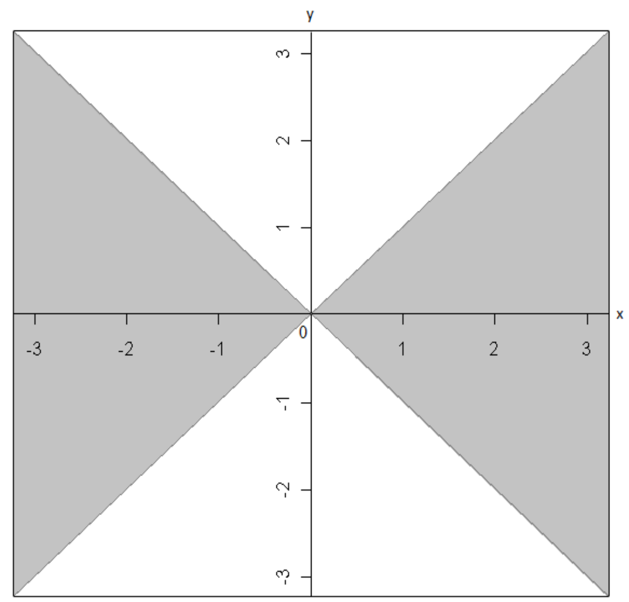
La fonction f_2 admet trois extrema : -2, 0 et 2. Les nombres -2 et 2 constituent des maxima globaux non stricts et 0 est un minimum local strict. On a la représentation suivante de f_2.



Exercice 3. Le domaine de dérivabilité de la fonction f est l'ensemble

$$A := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| < |x|\right\}.$$

Il peut être représenté par l'aire grise donnée ci-dessous (dont les bords ne sont pas compris dans l'ensemble).



Si $(x, y) \in A$ et si $y \neq 0$, on a

$$\frac{1}{y} D_x f(x, y) + \frac{1}{x} D_y f(x, y) = 0.$$

Exercice 4.

(i) La fonction du point (a) n'est pas intégrable sur l'intervalle proposé. Pour le reste, les intégrales sont définies et valent respectivement

(b) 0,

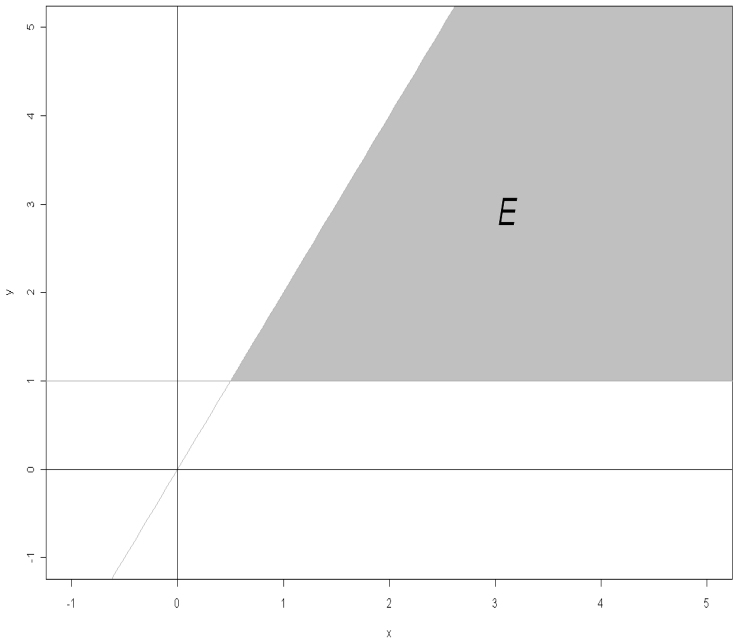
(c) $\frac{2}{1+\pi^2}$,

(d) $\frac{\pi}{2}$.

(ii) La première intégrale n'est définie pour aucune valeur de y. Par contre, la seconde l'est quel que soit y et on a

$$\int_{-1}^{1} e^{ixy}\,dx = \begin{cases} \dfrac{2\sin(y)}{y} & \text{si} \quad y \in \mathbb{R}_0, \\ 2 & \text{si} \quad y = 0. \end{cases}$$

Exercice 5. L'ensemble E peut se représenter comme suit (les bords sont compris).



L'intégrale demandée vaut 1.

Exercice 6. (i) Les deux premières séries convergent, mais pas la troisième. La somme de la première série vaut $-1/3$, tandis que la somme de la deuxième vaut $\frac{1-e}{e}$.

(ii) La série converge si et seulement si $\alpha \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right[$.