

**Compléments de mathématiques générales**  
 – Suites convergentes –

**Exercice 1.** Soit  $a$  est un paramètre réel. Etudier la convergence des suites  $(x_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$  de terme général  $x_m$  égal à

$$(a) x_m = 2^m \quad (b) x_m = \sqrt[m]{m} \quad (c) x_m = \sqrt[m]{m^2} \quad (d) x_m = \sqrt{m}(\sqrt{m+1} - \sqrt{m})$$

$$(e) x_m = \frac{(m!)^2}{(2m)!} \quad (f) x_m = \frac{1}{m^2} \sum_{k=1}^m k \quad (g) x_m = \sum_{k=1}^m \frac{1}{(m+k)^2} \quad (h) x_m = \frac{a^m}{m!}$$

**Exercice 2.** (a) Montrer que si  $(x_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$  est une suite numérique réelle qui converge vers le réel  $x$ , alors la suite  $(X_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$  définie par

$$X_m = \frac{1}{m}(x_1 + \dots + x_m)$$

converge également vers  $x$ .

(b) Etudier la convergence de la suite  $(x_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$  définie par

$$x_m = \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[m]{m}}{m}.$$

**Exercice 3.** Soit  $(a_m)_{m \in \mathbb{N}}$  une suite numérique réelle. Si l'ensemble  $\{a_m : m \in \mathbb{N}\}$  est borné, montrer que la suite  $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$  définie par  $x_m = a_m 2^{-m}$  converge.

**Exercice 4.** On définit la suite  $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$  par récurrence de la manière suivante

$$x_0 = -2 \quad \text{et} \quad x_{m+1} = \frac{2x_m}{3 - x_m}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

(a) Montrer que les éléments de cette suite sont tous majorés par 0.

(b) Etudier la monotonie et la convergence de cette suite.

**Exercice 5.** La suite  $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$  définie par récurrence selon

$$x_0 = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad x_m = \sqrt{2 + x_{m-1}}, \quad m \in \mathbb{N}_0$$

converge-t-elle (vers une limite finie) ? Si oui, que vaut cette limite ?

**Exercice 6** (Processus de Héron). Soit  $a > 0$ . La suite  $(r_m)_{m \in \mathbb{N}}$  définie par récurrence selon

$$r_0 > 0 \quad \text{et} \quad r_{m+1} = \frac{1}{2} \left( r_m + \frac{a}{r_m} \right), \quad m \in \mathbb{N}$$

converge-t-elle (vers une limite finie) ? Si oui, que vaut cette limite ?

**Exercice 7.** Etudier la convergence de la suite  $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$  définie par récurrence selon

$$x_0 > 0 \quad \text{et} \quad x_{m+1} = \frac{x_m(2x_m^2 + 1)}{x_m^2 + 5}, \quad m \in \mathbb{N}.$$