Compléments de mathématiques générales

Répétition sur les suites

2e bachelier en Informatique

Exercice 1. Etudier la convergence des suites de réels suivantes :

$$x_m = \sqrt[m]{m},\ m \in \mathbb{N} \quad \text{ et } y_m = \frac{a^m}{m!},\ m \in \mathbb{N}$$

où a est un nombre réel fixé.

Exercice 2. (1) Montrer que si $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle qui converge vers x, alors la suite $(X_m)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$X_m = \frac{1}{m}(x_1 + \cdots + x_m)$$

converge également vers x.

(2) Etudier la convergence de la suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ définie par

$$x_m = \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \cdots + \sqrt[m]{m}}{m}$$

Exercice 3. Soit $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite numérique réelle. Si l'ensemble $\{a_m : m \in \mathbb{N}\}$ est borné, montrer que la suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ définie par

$$x_m = a_m 2^{-m}$$

converge.

Exercice 4. La suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence selon

$$x_0 = \sqrt{2} \quad \text{ et } x_m = \sqrt{2 + x_{m-1}},\ m \in \mathbb{N}_0$$

converge-t-elle (vers une limite finie) ? Si oui, que vaut cette limite ?

Exercice 5 (Processus de Héron). Soit $a > 0$. La suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ définie par

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

et une condition initiale $x_0 > 0$ est appelée *suite* de Héron.

Cette suite converge-t-elle (vers une limite finie) ? Si oui, que vaut cette limite ?

Exercice 6. On définit la suite logistique de paramètre $\mu > 0$ par récurrence selon

$$x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n)$$

pour une condition initiale x_0.

Montrer que cette suite converge quelle que soit la condition initilale $x_0 > 0$ lorsque $\mu \in [0, 2]$ et déterminer la limite.