Travail dirigé – Révisions

Exercice 1. Soient les fonctions f, g, h et i définies sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = 4xy + x^4, \quad g(x,y) = (x+y)^3, \quad h(x,y) = x^2 y \quad \text{et} \quad i(x,y) = (x^2+y^2)\, e^{-y}.$$

(a) Déterminer les éventuels extrema libres de f, g et i et préciser s'ils sont globaux ou non.

(b) S'ils existent, déterminer les extrema de f sous la contrainte $h(x,y) = 1$.

(c) S'ils existent, déterminer les extrema de g dans le disque fermé de rayon 1 centré en l'origine.

Exercice 2. (a) On se place dans l'espace $\mathrm{L}^2([-1,1])$ muni du produit scalaire habituel. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, déterminer le produit scalaire des fonctions f et g_m définies par

$$f(x) = \cos(\pi x) \quad \text{et} \quad g_m(x) = \cos(\pi m x).$$

(b) Dans l'espace $\mathrm{L}^2([-1,1])$, on a le développement suivant

$$x^2 = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m \cos(\pi m x).$$

En prenant le produit scalaire de chacun des deux membres de l'égalité avec la fonction $x \mapsto \cos(\pi x)$, déterminer la valeur de a_1.

Exercice 3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer si possible la transformée de Fourier (négative) de la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = x^n\, e^{-x}\, \chi_{]0,+\infty[}(x).$$

Suggestion. Obtenir une formule de récurrence (sur $n \in \mathbb{N}$) pour la transformée de Fourier de f_n.

Exercice 4 (Géométrologie)**.** Calculer la distance (en km) qui sépare l'observatoire d'Uccle ($50°47'56"$ N, $4°21'45"$ E) et celui de Zurich ($47°22'40"$ N, $8°33'$ E)

Exercice 5 (Informatique)**.** Etudier la convergence de la suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence selon

$$x_0 \geq 2 \qquad \text{et} \qquad x_m = \frac{6(x_{m-1}^2 + 1)}{x_{m-1}^2 + 11},\ m \in \mathbb{N}_0\,.$$