Année académique 2010-2011 – 2BCIG

Compléments de mathématiques générales – TD 1 : Analyse de Fourier –

Exercice 1. Calculer si possible les transformées de Fourier des fonctions

$$x \mapsto (1-|x|)\,\chi_{[-1,1]}(x), \qquad x \mapsto e^{-|x|}\cos(x) \qquad \text{et} \qquad x \mapsto \left(\chi_{[0,1]} \star \chi_{[0,1]}\right)(x).$$

Exercice 2. Déterminer si possible le produit de convolution des fonctions f et g définies par

$$f(x) = x \qquad \text{et} \qquad g(x) = e^{-x}\chi_{]0,+\infty[}(x).$$

Exercice 3. Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} x\,e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Calculer si possible la transformée de Fourier négative de f et en déduire

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ixt}}{(1+ix)^2}\,dx$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 4. Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^{-x}\chi_{]0,+\infty[}(x) \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{1-ix}.$$

(a) Si possible, déterminer $f \star f$ ainsi que la transformée de Fourier positive de f et de $f \star f$.

(b) Montrer que la transformée de Fourier négative de g est nulle sur $]-\infty, 0[$.

(c) Déterminer la norme de la transformée de Fourier positive de f.

Exercice 5. Soit la fonction f donnée sur $[-\pi, \pi]$ par

$$f(x) = |x|.$$

(a) Développer cette fonction en série trigonométrique de Fourier dans $\mathrm{L}^2([-\pi,\pi])$. Exprimer votre réponse en utilisant uniquement des fonctions sin et cos et simplifier les calculs au maximum.

(b) En déduire la valeur des sommes

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}.$$

Exercice 6. (a) On se place dans l'espace $\mathrm{L}^2([-1,1])$ muni du produit scalaire habituel. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, déterminer le produit scalaire des fonctions f et g_m définies par

$$f(x) = \cos(\pi x) \quad \text{et} \quad g_m(x) = \cos(\pi m x).$$

(b) Dans l'espace $\mathrm{L}^2([-1,1])$, on a le développement suivant

$$x^2 = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m \cos(\pi m x).$$

En prenant le produit scalaire de chacun des deux membres de l'égalité avec la fonction $x \mapsto \cos(\pi x)$, déterminer la valeur de a_1.

L. Simons & F. Bastin – 10 novembre 2010.