Compléments de mathématiques générales – TD2 : Révisions –

Exercice 1. Soient les fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = 4xy + x^4, \qquad g(x,y) = (x+y)^3 \qquad \text{et} \qquad h(x,y) = x^2 y.$$

(a) Déterminer les éventuels extrema libres de f et g et préciser s'ils sont globaux ou non.
(b) S'ils existent, déterminer les extrema de f sous la contrainte $h(x,y) = 1$.
(c) S'ils existent, déterminer les extrema de g sur le cercle de rayon 1 centré en l'origine.

Exercice 2. Une boîte parallélipipédique de volume V doit avoir cinq faces en plastique et une face en verre. Si le verre coûte deux fois plus cher que le plastique, quelles dimensions faut-il donner à cette boîte pour que le prix de revient soit minimal ?

Exercice 3. Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^{-|x|} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \chi_{[-1,1]}(x).$$

(a) Déterminer si possible les transformées de Fourier de ces fonctions.
(b) En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(x)}{x(1+x^2)}\, dx.$$

Exercice 4. Si f est une fonction de carré intégrable telle que $x \mapsto x f(x)$ soit encore de carré intégrable, de même que $x \mapsto x\, \mathcal{F}_x^- f$, on pose [1]

$$\Delta_f = \int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2\, dx.$$

Considérons la gaussienne f donnée par $f(x) = e^{-x^2/4}$, $x \in \mathbb{R}$.
(a) Déterminer sa norme dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$.
(b) Calculer Δ_f.
(c) En déduire l'égalité $\Delta_f \Delta_{\mathcal{F}^- f} = \pi^2$.

Exercice 5. (a) Déterminer le développement en série trigonométrique de Fourier dans $\mathrm{L}^2([0,2\pi])$ de la fonction f donnée par $f(x) = x^2 + x$.
(b) Déterminer la valeur des séries

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m^2}.$$

1. Le principe d'incertitude d'Heisenberg affirme que $\Delta_f \Delta_{\mathcal{F}^- f} \geq \frac{1}{16\pi^2}$ lorsque f a été normalisé.

Exercice 6. (a) On se place dans l'espace $L^2([-1,1])$ muni du produit scalaire habituel. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, déterminer le produit scalaire des fonctions f et g_m définies par $f(x) = \cos(\pi x)$ et $g_m(x) = \cos(\pi m x)$.

(b) Dans l'espace $L^2([-1,1])$, on a le développement suivant

$$x^2 = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m \cos(\pi m x).$$

En prenant le produit scalaire de chacun des deux membres de l'égalité avec la fonction $x \mapsto \cos(\pi x)$, déterminer la valeur de a_1.

Exercice 7 (Informatique et géométrologie)**.** On donne le plan Π et la droite d par leurs équations cartésiennes :

$$\Pi \equiv x - y + z - 2 = 0 \qquad \text{et} \qquad d \equiv \left\{ \begin{array}{l} x - y = 3 \\ x + y + z = 0 \end{array} \right. .$$

(a) Déterminer des équations paramétriques cartésiennes de Π.

(b) La droite d et la plan Π sont-ils parallèles ? Pourquoi ?

(c) La droite d et la plan Π sont-ils orthogonaux ? Pourquoi ?

(d) Si elle existe, déterminer l'intersection de d et Π.

(e) S'il existe, déterminer des équations cartésiennes du plan contenant d et orthogonal à Π.

Exercice 8 (Géométrologie)**.** Calculer la distance (en km) qui sépare l'observatoire d'Uccle ($50°47'56"$ N, $4°21'45"$ E) et celui de Zurich ($47°22'40"$ N, $8°33'$ E)

Exercice 9 (Informatique)**.** On définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence de la manière suivante :

$$x_0 \le \frac{3}{2} \qquad \text{et} \qquad x_{n+1} = 1 + \frac{x_n}{3},\ n \in \mathbb{N}.$$

Etudier la monotonie, la bornation et la convergence de cette suite.

L. Simons & F. Bastin – 15 décembre 2010.