Transformation de Fourier, produit de composition, séries de Fourier

—

2007-2008

Exercices pour un travail dirigé (TD)

Octobre-Novembre 2007

Question 1

Soit un signal f (on suppose que cette fonction est intégrable et de carré intégrable). On définit *l'autocorrélation* du signal par

$$E_f(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{f(x-t)}\, dx, \qquad t \in \mathbb{R}$$

et la *densité spectrale de puissance* de ce signal (PSD) par

$$D_f(y) = \left|\widehat{f}(y)\right|^2, \qquad y \in \mathbb{R}$$

où $\widehat{f}(y)$ désigne la transformée de Fourier négative de f en y. On pose $f^s(x) = \overline{f(-x)},\ x \in \mathbb{R}$.

- Montrer que l'autocorrélation s'écrit
$$E_f = f * f^s$$
- Montrer que l'autocorrélation d'une fonction à valeurs réelles est une fonction paire
- Montrer que
$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |E_f(t)| = E_f(0).$$
- Montrer qu'à une constante multiplicative près, la densité spectrale et l'autocorrélation sont les transformées de Fourier l'une de l'autre.

Question 2

Si possible, déterminer le produit de composition des fonctions f et g suivantes

$$f(x) = |x|,\ x \in \mathbb{R} \quad g(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2},\ x \in \mathbb{R}.$$

Question 3

On considère $f(x) = \frac{\cos x}{x},\ x \in [1, +\infty[$. Montrer que cette fonction n'est pas intégrable sur cet intervalle mais qu'elle admet une intégrale fléchée en $+\infty$. Suggestion: on sait que la fonction (non intégrable à l'infini) $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ admet une intégrale fléchée à l'infini.

Question 4

Soit la fonction

$$g(x) = \frac{1-\cos x}{x},\ x \neq 0, \qquad g(0) = 0.$$

Montrer que cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$, appartient à $L^2(\mathbb{R})$ mais pas à $L^1(\mathbb{R})$. En déterminer ensuite la transformée de Fourier (négative).

Question 5

On donne les fonctions suivantes

$$f_1(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}, \quad f_2(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ -e^{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$f_3(x) = e^{-|x|} (x \in \mathbb{R}), \quad f_4(x) = \frac{1}{1+ix} = \frac{1-ix}{1+x^2} (x \in \mathbb{R}).$$

- Déterminer la transformée de Fourier (-) de f_1, f_2, f_3, en spécifiant s'il s'agit de la transformée dans L^1 ou L^2.
- Déterminer la transformée de Fourier (+) de f_4, en spécifiant s'il s'agit de la transformée dans L^1 ou L^2. Montrer que cette transformée est nulle sur $]-\infty, 0[$.
- Déterminer (si possible) le produit de composition $f_1 * f_1$ ainsi que sa transformée de Fourier (-).

Question 6

Soit une fonction $u = u(x,t)$ ($x \in \mathbb{R}, t \geq 0$) de classe C_2 dont les dérivées partielles jusqu'à l'ordre 2 sont intégrables par rapport à x sur $\mathbb{R}$ quel que soit t. Soit aussi une constante strictement positive v.

On suppose que u vérifie l'équation

$$D_t u(x,t) = v^2 D_x^2 u(x,t), \quad t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}.$$

On pose

$$f(x) = u(x,0), \quad \widehat{f} = \mathcal{F}^- f$$

et on définit la fonction

$$F(y,t),\ t \geq 0,\ y \in \mathbb{R}$$

de telle sorte que, pour t fixé, $F(y,t)$ soit la transformée de Fourier (négative) en y de la fonction $x \mapsto u(x,t)$.

1. Montrer que pour tout y, la fonction $t \mapsto F(y,t)$ vérifie
$$D_t F(y,t) + v^2 y^2 F(y,t) = 0.$$
2. Déduire du point précédent que l'on a
$$F(y,t) = \widehat{f}(y)\ e^{-v^2 y^2 t}.$$
3. Déduire de ce qui précède que l'on a finalement
$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} f\left(x + 2v\sqrt{t}y\right)\ e^{-y^2}\ dy, \quad x \in \mathbb{R},\ t \geq 0.$$

Suggestions: transformation de Fourier dans L^1 et propriétés, transformée de Fourier des gaussiennes, produit de composition et transformation de Fourier.

Question 7

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, telle que $x \mapsto x^2 f(x)$ soit borné sur $\mathbb{R}$. Démontrer que

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(x+m) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}^-_{2\pi m} f\ e^{2i\pi mx}$$

En déduire que

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x+m)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}, \quad x \notin \mathbb{Z}.$$

Question 8

Le document ci-joint a été récupéré sur le web. Il s'agit donc d'un document destiné à une première approche des séries de Fourier, pour "faire comprendre" ce dont il s'agit. D'un point de vue mathématique, il faut donc y apporter toutes les nuances possibles.

Avec les éléments d'analyse de Fourier présentés au cours, certaines phrases (certaines affirmations) floues du document peuvent être précisées correctement. On demande de

- relever les imprécisions les plus flagrantes
- expliquer les notions correctes que l'on peut introduire pour lever ces imprécisions et, dans la mesure du possible, expliquer exactement ce dont il s'agit

FB, Version October 22, 2007(Version 1: 13-10-07)

Accueil / Dictionnaire / Rubriques / Index / Références / ***Nouveautés
=> ORIENTATION GÉNÉRALE - ***M'écrire*** - *Édition du:* 09/11/2003

-Ý- Rubrique: Série de Fourier

Sommaire de cette page

Pages voisines

- Fourier Bio
- Exposants Index
- Exposants et puissances
- Constantes Mathématiques
- Constantes de l'univers

SÉRIE DE FOURIER
TRANSFORMÉE DE FOURIER

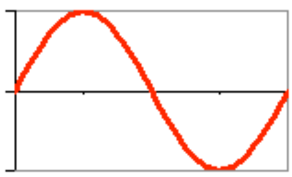
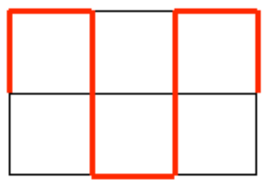
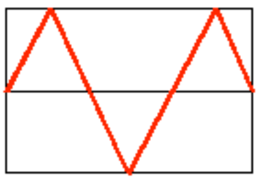
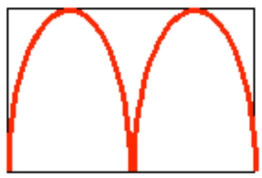
- Outil pratique qui permet de faire des calculs sur des fonctions bizarroïdes
- Ces fonctions sont transformées en sommes de fonctions périodiques (sinus et cosinus) plus simples

- Il est plus facile de connaître les propriétés de la fonction en analysant les propriétés de chacune des composantes
- Encore une histoire de changement de monde …

Anglais : Fourier Series / Fourier Transform

-Ý- APPROCHE

Des formes d'onde très différentes

Sinusoïdale	***En créneau***
	
En dents de scie	***En arc de cercle***
	

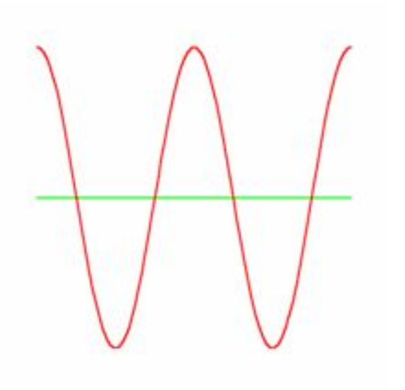
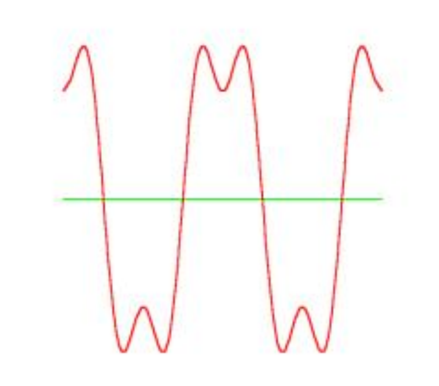
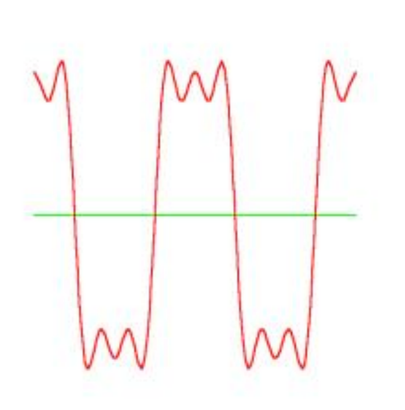
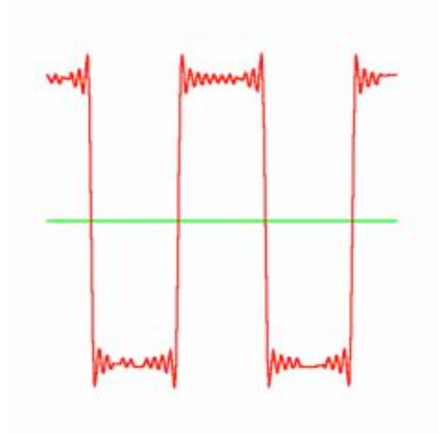
- Seule la forme sinusoïdale peut être représentée sous la forme d'une fonction

$y = a. \sin(x)$

- Pas possible pour les autres
- Les transformées de Fourier le permettent

- Ce sont des suites infinies de fonctions sinusoïdales
- Qui sommées, tendent vers la fonction à définir

-Ý- CRÉNEAU en Fourier

$y = \cos(x)$	$y = \cos(x) - 1/3 \cos(3x)$
	
$y = \cos(x) - 1/3 \cos(3x) + 1/5 \cos(5x)$	$y = \cos(x) - 1/3 \cos(3x) + 1/5 \cos(5x) - \dots - 1/19 \cos(19x) + 1/21 \cos(21x)$
	

Conclusion

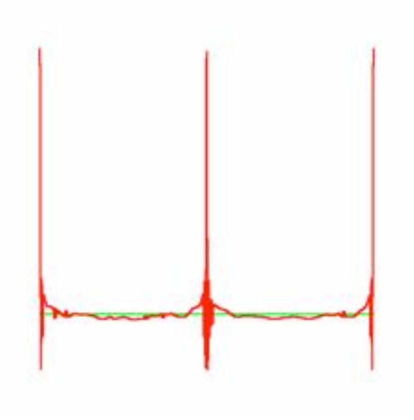
- En continuant à ajouter des fonctions cosinus, et
- Avec les coefficients **impairs successifs,**
- Alternativement **négatifs et positifs,**
- On se rapproche de plus en plus de la ***courbe créneau***

Voir ▪ Série de Wallis

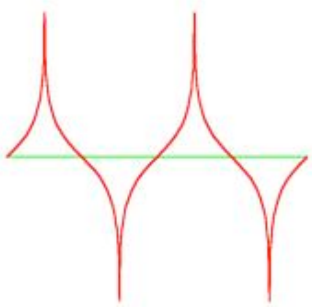
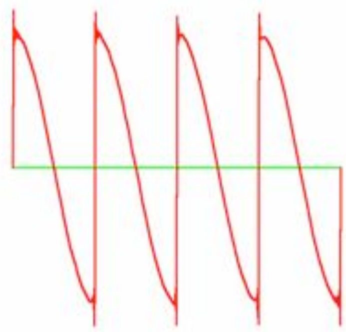
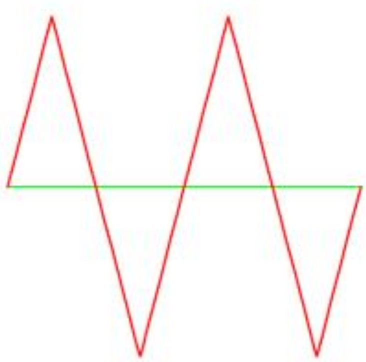
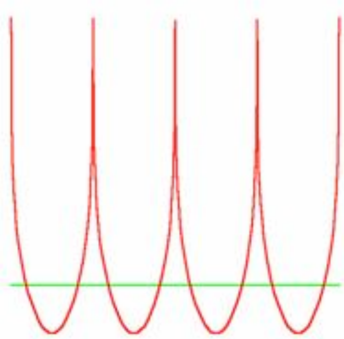
-Ý- Autres EXEMPLES

Avec des sinus et cosinus simplement

$y = \cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) + \dots$	$y = \sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) + \dots$

Autres exemples

y = sin(x) - **- 1/3 sin(3x)** - **+ 1/5 sin(5x)** - **- …** 	**y = 2/(1x3) sin(2x)** **+ 4/(3x5) sin(4x)** **+ 6/(5x7) sin(6x)** **+ ...** 
y = sin(x) **- 1/3 ^{2} sin(3x)** **+ 1/5 ^{2} sin(5x)** **- …** 	**y = 2/(1x3) cos(2x)** **+ 4/(3x5) cos(4x)** **+ 6/(5x7) cos(6x)** **+ ...** 

-Ý- HISTORIQUE

- Fourier est connu pour ses travaux pour la chaleur
- Il trouve une équation avec des dérivées qu'il faut résoudre

- Il trouve une manière générale de la résoudre
- Elle est si générale qu'elle donne cet outil formidable

La transformée de Fourier

- Et plus récemment avec les besoins des ordinateurs

La transformée de Fourier rapide
FFT: Fast Fourier Transform

Ce que disait Fourier

- "Ce mouvement peut toujours être décomposé en plusieurs autres
- dont chacun s'accomplit comme s'il avait lieu seul
- Cette superposition des effets simples est un des éléments fondamentaux de la théorie de la chaleur"

- "Cette remarque est essentielle, en ce qu'elle conduit à connaître comment les fonctions entièrement arbitraires
- peuvent ainsi être développées en séries de sinus d'arc multiples"

Biblio très complète sur ce sujet	- Fourier - Créateur de la physique mathématique

-Ý- THÉORIE

Série de Fourier

- Une fonction périodique ***f(x)***		$f(x) =$
- Elle peut être développée en série de Fourier - Elle comporte 3 éléments:	- Un terme constant a_0 , appelé **composante continue**	a_0
	- Une composante **fondamentale** caractérisée par les valeurs de a_1 et b_1	$+ a_1 \cos x + b_1 \sin x$
	- Des **harmoniques** *(multiples de la fréquence fondamentale)* caractérisées par les valeurs des autres coefficients de Fourier: a_n et b_n	$+ a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x$ $+ \ldots$ $+ \mathbf{a_n \cos nx + b_n \sin nx}$ $+ \ldots$

- Coefficients de Fourier	a_n et b_n nombres réels
- Qui se prêteraient bien à une interprétation en nombres complexes	$c_n = a_n e+ i \,.\, b_n$
- L'outil correspondant est appelé transformée de Fourier	$\hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-itx} dx$
- Détermination des coefficients - Formule d'Euler - Fourier	$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$

- Dans l'intervalle (-p, p)

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx$$

-Ý- DROITE en Fourier

- Fonction

f(x) = x dans l'intervalle (-p < *x* < p)

- Détermination des coefficients

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx.dx = \frac{1}{\pi}\left[x.\frac{\sin nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos nx}{n^2}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx.dx = \frac{1}{\pi}\left[x\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi n}\left[\frac{\sin nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

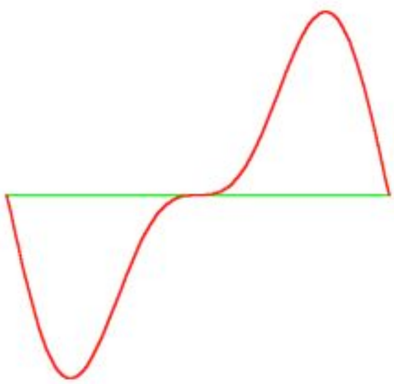
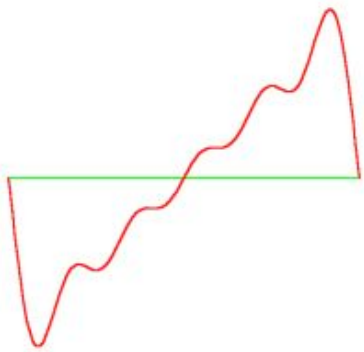
$$= -\frac{\cos n\pi}{n} - \frac{\cos(-n\pi)}{n} = -\frac{2\cos n\pi}{n} = -\frac{2}{n}(-1)^n$$

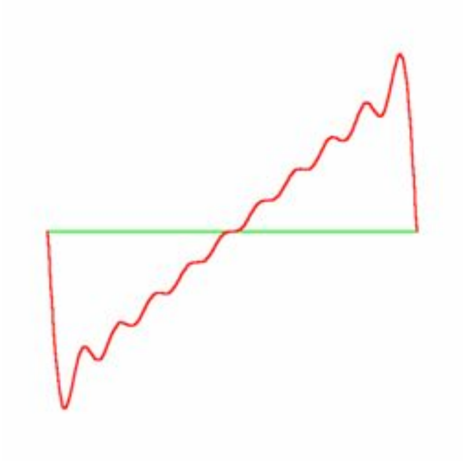
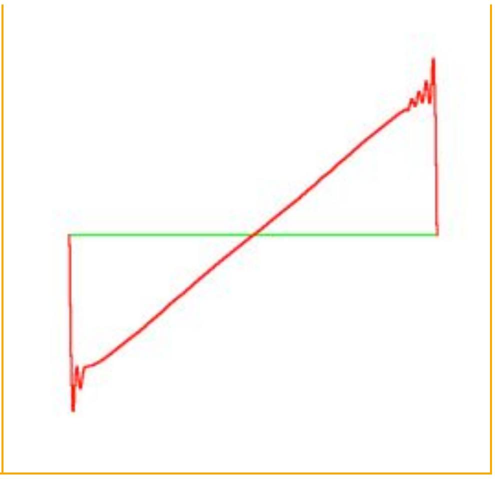
- Soit

Le calcul est donné à titre indicatif; il dépasse de loin le cadre de ce site

x = 2 sinx - sin2x + 2/3 sin3x - 2 sin4x + …

Illustration selon la quantité de coefficients

2 coefficients	**5 coefficients**
2sin(x) - sin(2x) 	2sin(x) - sin(2x) + 2/3sin(3x) - 1/2sin(4x) + 2/5sin(5x) 
10 coefficients	**50 coefficients**

-Ý-	*Voir*	▪ Fourier ▪ Série de Wallis ▪ Théorie des nombres