Test de rentrée

Exercice 1. Soient un réel a et les matrices

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{10}\cos(a) & \cos(2-\pi) \\ \sqrt{5}\,\mathrm{cotg}\,(\pi/2-2) & \sin(2) \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Pour quelle(s) valeur(s) de a dans $[\pi, 5\pi]$ la matrice A est-elle inversible ? Dans le cas où elle est inversible, en déterminer l'inverse et vérifier que la réponse obtenue est correcte.

(b) Rechercher les valeurs propres de la matrice B. Cette matrice est-elle diagonalisable ? Si c'est le cas, en déterminer une forme diagonale et une matrice qui y conduit.

Exercice 2. Soient les fonctions f_1 et f_2 (d'une variable réelle) définies par

$$f_1(x) = \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} \qquad \text{et} \qquad f_2(x) = \exp\left(\frac{-x^4+8x^2}{16}\right).$$

Rechercher les éventuels extrema de ces fonctions sur leur domaine de définition. Préciser s'ils sont globaux ou non, stricts ou non. Illustrer ces résultats en esquissant le graphique de ces fonctions.

Exercice 3. Soit la fonction f (de deux variables réelles) définie par

$$f(x,y) = \arcsin\left(\frac{y}{x}\right).$$

Déterminer le domaine de dérivabilité de f et le représenter. Si elle a un sens, calculer l'expression $\frac{1}{y}D_x f(x,y) + \frac{1}{x}D_y f(x,y)$.

Exercice 4.

(i) Calculer si possible les intégrales suivantes :

$$\text{(a)} \int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx \quad \text{(b)} \int_{7\pi/2}^{13\pi/2} \sin(2x)\sin(4x)\,dx \quad \text{(c)} \int_{\mathbb{R}} \cos(\pi x)e^{-|x|}\,dx \quad \text{(d)} \int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2(x)}}.$$

(ii) Soit y un réel fixé. Si possible, déterminer la valeur des intégrales suivantes en fonction de y :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-ixy}\,dx \qquad \text{et} \qquad \int_{-1}^{1} e^{ixy}\,dx.$$

Exercice 5. Représenter graphiquement l'ensemble $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq y \leq 2x\}$. Calculer (si possible) l'intégrale double

$$\iint_E \frac{dxdy}{x^2y^2}$$

en choisissant un ordre d'intégration. Permuter ensuite les intégrales et vérifier (en effectuant les calculs) si le résultat change ou non.

Exercice 6.

(i) Déterminer si les séries suivantes convergent et déterminer la somme des séries convergentes :

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\left[\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right]^m, \qquad \sum_{m=1}^{+\infty}\frac{(-1)^m}{m!} \qquad \text{et} \qquad \sum_{m=1}^{+\infty}\left(\ln(m^2+1)-\ln(3m^2+2)\right).$$

(ii) Soit α un nombre réel. Étudier la convergence de la série suivante en fonction de α :

$$\sum_{m=1}^{+\infty} m^{-1-\cos(\alpha)}.$$

F. Bastin et L. Demeulenaere – 8 septembre 2015