

Compléments de mathématiques générales
« Test de rentrée »

- Exercice 1.** (a) Quelle est la hauteur d'eau (exprimée en mm) sur un balcon de $3m^2$ sachant qu'il est tombé 21ℓ d'eau de pluie ?
- (b) Si on double la longueur de l'arête d'un cube, par combien l'aire totale des faces de ce cube est-elle multipliée ?

Exercice 2. Résoudre dans $[0, 2\pi]$ l'équation

$$\sin(2x) = \cos(x).$$

Exercice 3. Esquisser le graphique et déterminer les foyers et l'excentricité de la conique d'équation cartésienne

$$25y^2 - 4x^2 - 100 = 0.$$

Exercice 4. Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} i & -i & 1+i \\ i & i & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Calculer le déterminant de la matrice A .
- (b) Rechercher les valeurs propres de la matrice B . Cette matrice est-elle diagonalisable ? Si c'est le cas, en déterminer une forme diagonale et une matrice qui y conduit.

Exercice 5. Déterminer la somme des séries (*la troisième série uniquement pour les informaticiens*)

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \left[\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) \right]^{m/2}, \quad \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(\ln 3)^m}{m!} \quad \text{et} \quad \sum_{m=2}^{+\infty} \frac{1}{m(m+1)}.$$

Exercice 6. Déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre 1, 2 et 3 en 0 de la fonction sinus. Représenter le sinus et les approximations dans un même repère orthonormé.

Exercice 7. Calculer (si possible) les intégrales suivantes :

$$(a) \int_0^\pi \frac{dx}{\cos^2(x)} \quad (b) \int_0^{+\infty} x e^{-3x} dx \quad (c) \int_0^{+\infty} x e^{-3x^2} dx \quad (d) \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2 - 1} dx$$

Exercice 8. Représenter graphiquement dans un repère orthonormé l'ensemble

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < x^2\}$$

et calculer, si possible, l'intégrale double

$$\iint_E \frac{x^2 y}{(4x^2 + y^2)^2} dx dy.$$