

« Test de rentrée »

**Exercice 1.** (a) Vous faites du shopping et vous avez un coup de coeur pour une pièce de collection. Celle-ci est cependant un peu chère pour vos économies. Vous savez par ailleurs qu'une augmentation des prix va survenir la semaine qui suit et que cette augmentation sera de l'ordre de 30%. Mais ensuite, ce sera la période des soldes et vous savez que les prix vont alors chuter de 30%. Vous êtes de toute façon décidé à acquérir la pièce ; pour déboursier le moins possible, vous achetez avant l'augmentation de prix ou vous attendez les soldes ? Pourquoi ?

(b) La force gravitationnelle entre deux objets est donnée par la formule suivante

$$F = \frac{Gm_1m_2}{d^2}$$

où  $G$  est la constante gravitationnelle,  $m_1$  et  $m_2$  sont les masses des deux objets et  $d$  est la distance qui les sépare. Si on remplace l'un des deux objets par un objet deux fois plus massif, comment la distance  $d$  doit-elle être modifiée pour laisser la force gravitationnelle inchangée ?

**Exercice 2.** Résoudre dans  $[0, 2\pi]$  l'équation  $\sin(2x) = 2 \cos^2(x)$ .

**Exercice 3.** Esquisser le graphique et déterminer les foyers et l'excentricité de la conique d'équation cartésienne  $4x^2 + 25y^2 - 100 = 0$ .

**Exercice 4.** Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2-i & i & 1 \\ i & 1 & 1+i \\ 3-i & i & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Est-ce que la matrice  $A$  est inversible ? Justifier.

(b) Rechercher les valeurs propres de la matrice  $B$ . Cette matrice est-elle diagonalisable ? Si c'est le cas, en déterminer une forme diagonale et une matrice qui y conduit.

**Exercice 5.** Déterminer la somme des séries

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \left[ \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) \right]^m, \quad \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(\ln 3)^m}{m!} \quad \text{et} \quad \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{m!}{m^2}.$$

**Exercice 6.** Déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre 1, 2 et 3 en 0 de la fonction sinus. Représenter le sinus et les approximations dans un même repère orthonormé.

**Exercice 7.** Calculer (si possible) les intégrales suivantes :

$$(a) \int_0^\pi \frac{dx}{\cos^2(x)} \quad (b) \int_0^1 \ln(x^2) dx \quad (c) \int_0^{\pi/4} \sin(x) \cos(3x) dx \quad (d) \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3+x} dx$$

**Exercice 8.** Représenter graphiquement l'ensemble  $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq y \leq 2x\}$ . Calculer (si possible) l'intégrale double

$$\iint_E \frac{dx dy}{x^2 y^2}$$

en choisissant un ordre d'intégration. Permuter ensuite les intégrales et vérifier (en effectuant les calculs) si le résultat change ou non.

**Exercice 9.** Soit la fonction  $f$  (de deux variables réelles) définie par

$$f(x, y) = \arcsin\left(\frac{x}{y}\right).$$

Donner le domaine de dérivabilité de  $f$  et le représenter. Calculer  $|x|D_x f(x, y) + |y|D_y f(x, y)$ .