5. *Trigonométrie sphérique*

Exercice 1 (Rappel sur les coniques). Dans un repère orthonormé, on considère les coniques d'équation

$$x^2 + \frac{9y^2}{25} = \frac{1}{16} \qquad \text{et} \qquad \frac{25y^2}{48} - 3x^2 = 75.$$

De quel(s) type(s) de coniques s'agit-il ? Déterminer les coordonnées des foyers, des points d'intersection avec les axes, les équations des éventuelles asymptotes et l'excentricité de chacune de ces coniques. Les représenter graphiquement.

Exercice 2. À partir des formules fondamentales du triangle sphérique, démontrer

(i) la formule des 5 éléments

$$\sin(b)\cos(C) = \cos(c)\sin(a) - \sin(c)\cos(a)\cos(B),$$

(ii) la formule des sinus

$$\sin(b)\sin(C) = \sin(B)\sin(c),$$

(iii) et la formule des cotangentes

$$\sin(B)\,\mathrm{cotg}(C) = \sin(a)\,\mathrm{cotg}(c) - \cos(a)\cos(B).$$

Exercice 3. Calculer la distance (en km) qui sépare les villes Pékin ($39°54'18"N$, $116°28'54"E$) et Moscou ($55°45'19"N$, $37°34'18"E$).

Exercice 4. Un navire veut se rendre d'un point M_1 ($33°2'S$, $74°3'O$) à un point M_2 ($43°51'S$, $170°45'E$) par le plus court chemin.

(a) Calculer la distance entre ces deux points.

(b) Déterminer l'angle de route initial (angle indiqué sur la boussole par la direction du navire de départ).

(c) Montrer que la latitude maximum que le navire atteint est $56°33'42"S$.