Mathématiques générales B

Liste 1

2e bachelier en Informatique, Chimie et Géométrologie

Exercice 1. Calculer (si possible) les intégrales suivantes

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-2|x|}dx \qquad \int_{\mathbb{R}} e^{ix}e^{-|x|}dx \qquad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{9+x^2}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(9+x^2)^2} \qquad \int_0^{\to+\infty} \frac{\sin(x)\cos(x)}{x}dx \qquad \int_0^{\to+\infty} \frac{\sin(x)\cos(2x)}{x}dx$$

et

$$\int_{\mathbb{R}} e^{3ix}f(x)dx$$

où

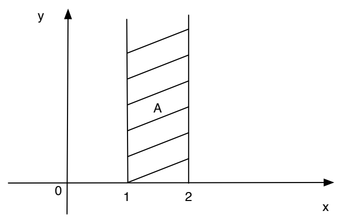
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1] \\ 2-x & \text{si } x \in [1,2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

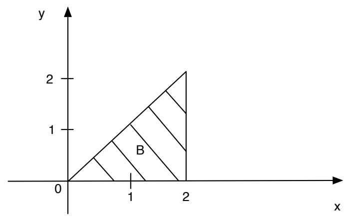
Exercice 2. Calculer si possible

$$\int\int_A f(x,y)dxdy \qquad \int\int_B g(x,y)dxdy \qquad \int\int_A h(x,y)dxdy$$

avec

$$f(x,y) = e^{-xy} \quad g(x,y) = x^2e^{-xy} \quad h(x,y) = e^{-(x+y)}$$





Exercice 3. Justifier l'existence de l'intégrale suivante

$$I_n = \int_0^{+\infty} x^{2n}e^{-ax^2}dx \quad a > 0, n \in \mathbb{N}$$

et montrer que

$$I_{n+1} = \frac{2n+1}{2a} I_n$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. En utilisant cette relation, donner une formule directe pour I_n

Exercice 4. On définit la fonction $\Gamma :]0,+\infty[\to]0,+\infty[$ par

$$a \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{a-1}dx$$

Montrer que

(1) la fonction Γ est bien définie,

(2) on a $\Gamma(1) = 1$,

(3) on a la formule de multiplication

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$$

pour tout $a \in]0, +\infty[$ et en particulier, pour tout $a \in \mathbb{N}$ on a $\Gamma(a+1) = a!$.

Exercice 5. On donne les fonctions suivantes

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \qquad g(x) = |x|e^{-|x|} \quad h(x) = e^{ix}e^{-|x|} \quad l(x) = e^{-|x-1|}$$

(1) Ces fonctions sont-elles intégrables dans $\mathbb{R}$? Justifier.

(2) Déterminer (si possible) la transformée de Fourier négative de chacune de ces fonctions dans $L^1(\mathbb{R})$.

Exercice 6. Montrer que la transformée de Fourier d'une fonction paire (resp. impaire) est paire (resp. impaire). Qu'en est-il de la réciproque ?

Exercice 7. En utilisant le théorème de transfert, calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} \sin(x) dx$$

Exercice 8. Si f est une fonction de $L^2(\mathbb{R})$ telle que $x \mapsto xf(x)$ soit intégrable, on pose

$$\Delta_f = \int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx$$

(1) Pour $f(x) = e^{-x^2/4}$, montrer que $\Delta_f = \sqrt{2\pi}$.

(2) En déduire l'égalité suivante (principe d'incertitude d'Heisenberg dans le cas d'une Gaussienne)

$$\Delta_f \Delta_{\hat{f}} = \pi^2$$

pour $f(x) = e^{-x^2/4}$ et en utilisant la notation $\hat{f}$ pour la transformée de Fourier négative de f.