Compléments de Mathématiques 2008-2009

MATH0232-x, 2e bachelier en chimie, géométrologie, informatique

---

Liste d'exercices 1(bis)

---

1. Déterminer (si possible) la valeur des intégrales suivantes

$$\int_e^{e^2} \frac{\ln x}{x} dx \quad \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+9} dx \quad \int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2} dx.$$

2. Calculer les transformées de Fourier (+) des fonctions données explicitement comme suit

$$f_1(x) = e^{-|x-1|}, \quad f_2(x) = e^{-2x^2}, \quad f_3(x) = xe^{-x^2}, \quad f_4(x) = x\chi_{[0,1]}(x).$$

3. Déterminer (si possible) le produit de composition (convolution) des fonctions f et g suivantes

$$f(x) = e^x \chi_{[0,+\infty[}(x) \quad g(x) = x$$

Même question pour $f(x) = e^{-|x|}$, $g = f$ et pour $f(x) = \sin x$, $g(x) = \chi_{[0,\frac{\pi}{2}]}$.

4. Déterminer la transformée de Fourier (-) du Laplacien d'une fonction f (en supposant l'intégrabilité)

5. A proposer aux informaticiens

Soit un signal f (on suppose que cette fonction est intégrable et de carré intégrable). On définit *l'autocorrélation* du signal par

$$E_f(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{f(x-t)}\, dx, \qquad t \in \mathbb{R}$$

et la *densité spectrale de puissance* de ce signal (PSD) par

$$D_f(y) = \left|\widehat{f}(y)\right|^2, \qquad y \in \mathbb{R}$$

où $\widehat{f}(y)$ désigne la transformée de Fourier négative de f en y. On pose $f^s(x) = \overline{f(-x)},\ x \in \mathbb{R}$.

- Montrer que l'autocorrélation s'écrit

$$E_f = f * f^s$$

- Montrer que l'autocorrélation d'une fonction à valeurs réelles est une fonction paire
- Montrer que

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |E_f(t)| = E_f(0).$$

- Montrer qu'à une constante multiplicative près, la densité spectrale et l'autocorrélation sont les transformées de Fourier l'une de l'autre.

F. Bastin, September 25, 2008