Compléments de Mathématiques 2008-2009

MATH0232-x, 2e bachelier en chimie, géométrologie, informatique

---

Liste d'exercices 2

---

1. On donne les fonctions suivantes

$$f_1(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad , \quad f_2(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ -e^{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$f_3(x) = e^{-|x|}(x \in \mathbb{R}), \quad f_4(x) = \frac{1}{1+ix} = \frac{1-ix}{1+x^2}(x \in \mathbb{R}).$$

   - Déterminer la transformée de Fourier (-) de f_1, f_2, f_3, en spécifiant s'il s'agit de la transformée dans L^1 ou L^2.
   - (Informaticiens) Déterminer la transformée de Fourier (+) de f_4, en spécifiant s'il s'agit de la transformée dans L^1 ou L^2. Montrer que cette transformée est nulle sur $]-\infty, 0[$.
   - Déterminer (si possible) le produit de composition $f_1 * f_1$ ainsi que sa transformée de Fourier (-).

2. *Application de l'outil "transformation de Fourier/produit de composition" à la résolution de l'equation de la chaleur.*

   Soit une fonction $u = u(x,t)$ $(x \in \mathbb{R}, t \geq 0)$ de classe C_2 dont les dérivées partielles jusqu'à l'ordre 2 sont intégrables par rapport à x sur $\mathbb{R}$ quel que soit t. Soit aussi une constante strictement positive v.

   On suppose que u vérifie l'équation

$$D_t u(x,t) = v^2 D_x^2 u(x,t), \quad t \geq 0, \ x \in \mathbb{R}.$$

   On pose

$$f(x) = u(x,0), \quad \widehat{f} = \mathcal{F}^- f$$

   et on définit la fonction

$$F(y,t), \ t \geq 0, \ y \in \mathbb{R}$$

   de telle sorte que, pour t fixé, $F(y,t)$ soit la transformée de Fourier (négative) en y de la fonction $x \mapsto u(x,t)$.

   (a) Montrer que pour tout y, la fonction $t \mapsto F(y,t)$ vérifie

$$D_t F(y,t) + v^2 y^2 F(y,t) = 0.$$

   (b) Déduire du point précédent que l'on a

$$F(y,t) = \widehat{f}(y) \ e^{-v^2 y^2 t}.$$

   (c) Déduire de ce qui précède que l'on a finalement

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} f\left(x + 2v\sqrt{t}y\right) \ e^{-y^2} \ dy, \quad x \in \mathbb{R}, \ t \geq 0.$$

3. Pour quelle(s) valeur(s) du réel strictement positif r les fonctions f, g suivantes sont-elles orthogonales dans $L^2([0,1])$?

$$f(x) = \sin(rx), \quad g(x) = \cos(rx).$$

4. (Procédé d'orthonormation; à comparer avec les vecteurs "géométriques")

   a) On donne les fonctions f, g, h de carré intégrable sur l'intervalle $[a, b]$. Montrer que les fonctions

$$f, \quad G = g \ - \ \frac{< g, f >}{\|f\|^2} f, \quad H = h \ - \ \frac{< h, G >}{\|G\|^2} \, G \ - \ \frac{< h, f >}{\|f\|^2} f$$

   sont orthogonales deux à deux dans $L^2([a, b])$.

   b) On donne $f(x) = 1, \ g(x) = x, \ h(x) = x^2$ et $[a, b] = [-1, 1]$. Déterminer G et H. Normer ensuite les fonctions f, G, H.

   c) La fonction $T(x) = x^2 + 2x, \ x \in [-1, 1]$ se décompose comme suit : $T = af + bG + cH$, où a, b, c sont des constantes. Déterminer la valeur de ces constantes.

5. Développer la fonction $f : \ x \mapsto \sin(2x)$ en série trigonométrique de Fourier dans $L^2([0, \pi])$ et dans $L^2([-1, 1])$.