Compléments de Mathématiques 2008-2009

MATH0232-x, 2e bachelier en chimie, géométrologie, informatique

---

Liste d'exercices 3

---

1. Soit l'espace (des vecteurs libres) muni d'une base orthonormée $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. On donne les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ respectivement de composantes $(1,1,0), (0,1,0), (0,1,1)$.
   a) Ces vecteurs forment-ils une base de l'espace? Si la réponse est affirmative, déterminer les composantes des vecteurs $\vec{e}_1, \vec{e}_2+\vec{e}_3, \vec{e}_1-\vec{e}_2$ dans cette base. Représenter les vecteurs $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{e}_2+\vec{e}_3, \vec{e}_1-\vec{e}_2$.
   b) Dans la base $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, déterminer
   - les composantes de la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur le plan vectoriel L engendré par $\vec{u}$ et $\vec{w}$
   - les composantes de la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur la droite vectorielle engendrée par $\vec{u}+\vec{w}$
   - les composantes de la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur la droite vectorielle orthogonale à L
   - une base orthonormée de L.

2. Dans un repère orthonormé de l'espace, quel ensemble représentent respectivement les systèmes suivants? (a est un paramètre réel) Justifier.

$$a)\ \begin{cases} 2x-y+z=1 \\ -x+y-z=1 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} 2x-y+z=1 \\ -2x+y-z=-1 \end{cases} \qquad c)\ \begin{cases} 2x-y+z=1 \\ -x+y-z=1 \\ x+z=0 \end{cases}$$

$$d)\ \begin{cases} 2x-y+z=1 \\ -x+y-z=1 \\ y-z=3 \end{cases} \qquad e)\ \begin{cases} 2x-y+z=1 \\ -x+y-z=1 \\ y-z=2 \end{cases} \qquad f)\ \begin{cases} 2x-y+z=1 \\ -x+y-z=1 \\ x-y+z=0 \end{cases}$$

$$g)\ \begin{cases} 2x-y+z=1 \\ -x+y-z=1 \\ -x+2y-2z=4 \end{cases} \qquad h)\ ax+ay+az+1=0$$

3. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, déterminer des équations paramétriques cartésiennes des ensembles dont des équations cartésiennes sont fournies respectivement par les expressions a), b) suivantes

$$a)\ 2x-y+z=1, \quad b)\ \begin{cases} 2x-y+z=1 \\ -x+y-z=1 \end{cases}$$

4. On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé et on donne une droite d_0 et un plan Π_0 par l'intermédiaire de leurs équations cartésiennes

$$d_0\ :\ \begin{cases} 2x-3y+z=0 \\ 3x+2y+1=0 \end{cases} \qquad \Pi_0\ :\ x+y+z=2.$$

   a) La droite d_0 et le plan Π_0 sont-ils parallèles? Pourquoi?
   Si ce n'est pas le cas, déterminer les coordonnées cartésiennes du point d'intersection de d_0 et Π_0.
   b) Déterminer des équations cartésiennes d'une droite parallèle à Π_0 passant par l'origine.
   c) Déterminer des equations cartésiennes de la droite orthogonale à Π_0 et passant par l'origine.

5. On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé et on donne les points A, B, C respectivement de coordonnées $(3,1,1), (2,-1,0), (1,0,1)$.
   a) Ces points appartiennent-ils à une même droite d (resp. à un même plan Π)? Si c'est le cas, déterminer des équations cartésiennes de d (resp. de Π).
   b) On donne le point D de coordonnées $(1,1,1)$. Appartient-il à d (resp. à Π)?

6. On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.
a) Déterminer la distance entre le point de coordonnées $(1, -1, 1)$ et le plan Π d'équation cartésienne $x - y + z = 2$.
b) Déterminer la distance entre le point de coordonnées cartésiennes $(1, 0, 3)$ et la droite d'équations cartésiennes $\left\{ \begin{array}{l} 2x + 2y = 3 \\ x - 3z = 1 \end{array} \right.$

7. On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé. On donne les droites d_1, d_2 respectivement d'équations cartésiennes

$$d_1 : \left\{ \begin{array}{l} 2x + 2y = 3 \\ x - 3z = 1 \end{array} \right. , \qquad d_2 : \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ x - y + 2 = 0 \end{array} \right.$$

- Sont-elles parallèles, sécantes, gauches? Justifier.
- Si elles sont gauches, déterminer des équations cartésiennes de la perpendiculaire commune à ces deux droites. Si elles définissent un plan, déterminer l'équation cartésienne de celui-ci.
- Déterminer la distance entre ces deux droites.

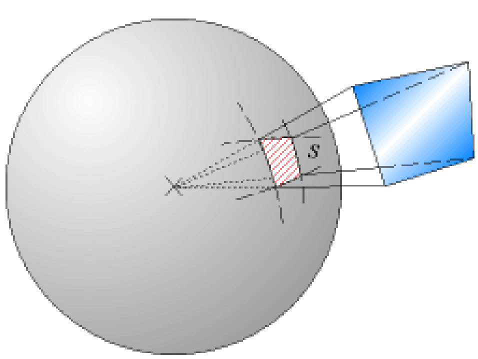
8. *(Pour les géométrologues: trigonométrie sphérique)*
a) Etablir la formule des sinus et la formule des cotangentes à partir de la formule fondamentale
b) (Avec calculatrice!) Calculer la distance qui sépare Rio de Janeiro $(23°27'S,\ 43°10'O)$ et le cap de Bonne-Espérance $(34°32'S,\ 18°30'E)$
c) Un mile nautique est défini comme étant la distance entre deux points du globe situés sur un même méridien et séparés par une minute d'arc. Que vaut cette distance en kilomètres?
d) [Calculs de surfaces sphériques.]
En mathématique, en géométrie et en physique, un *angle solide* (mesure de l'angle solide) est l'analogue tridimensionnel de l'angle plan ou bidimensionnel. Dans l'espace bidimensionnel, l'angle plan (mesure de l'angle plan) est défini comme le rapport de la longueur de l'arc sur le rayon d'un cercle; dans l'espace tridimensionnel, (la mesure de) *l'angle solide est défini* de façon analogue comme le rapport de la surface d'une partie d'une sphère sur le rayon au carré. Son unité est le stéradian noté sr.

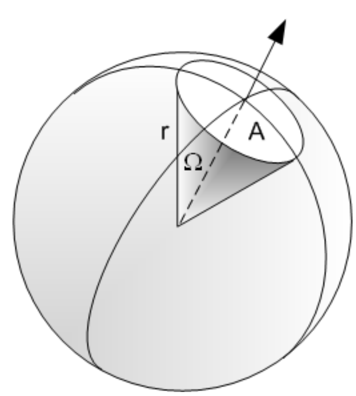
Un angle solide est souvent noté Ω (oméga majuscule). Il mesure la surface sur laquelle un objet se projette radialement sur une sphère de rayon unité.

Le stéradian est défini comme étant (la mesure de) l'angle solide qui, ayant son sommet au centre d'une sphère, découpe, sur la surface de cette sphère, une aire équivalente à celle d'un carré dont le côté est égal au rayon de la sphère. Autrement dit, un angle solide d'un stéradian délimite sur la sphère unité à partir du centre de cette sphère une surface d'aire 1. Pour une sphère complète, l'angle solide vaut donc 4π stéradians. Le stéradian est une quantité sans dimension. Dans la pratique, le symbole *sr* est utilisé lorsque cela s'avère utile plutôt que de ne pas mettre d'unité du tout.

Par exemple, le regard d'un œil humain embrasse environ 0,5 sr.

Exercice: quelle est la mesure, en stéradians, de l'angle solide déterminé par un cône circulaire de mesure d'angle au sommet égale à θ (radians)?





F. Bastin, October 14, 2008