

Compléments de Mathématiques 2008-2009

MATH0232-x, 2e bachelier en chimie, géométrie, informatique

Liste d'exercices 4

REMARQUE: exercices à sélectionner selon sections et timing

1. Rechercher les extrema éventuels des fonctions f suivantes. Préciser s'ils sont stricts et/ou globaux. Esquisser le graphique de f (sauf pour la dernière donnée) et de quelques-unes de ses courbes de niveau.

$$f(x, y) = xy, \quad f(x, y) = x^2 + y, \quad f(x, y) = \arctg\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$f(x, y) = \sin x, \quad f(x, y) = y - \sin x, \quad f(x, y) = 2x^3 + (x - y)^2 - 6y$$

2. Rechercher les points stationnaires des fonctions f suivantes, ainsi que les extrema éventuels

$$f(x, y) = \cos(x + y), \quad f(x, y) = \cos(x + y) + \sin(x - y)$$

$$f(u, v) = u^3 + v^3 - 6uv, \quad f(u, v) = |u| + |v|, \quad f(x, y) = x^2 - e^{y^2}$$

3. *Extrema sous contraintes par approche directe-i.e. sans multiplicateur de Lagrange*
 - Minimiser la fonction f donnée par $f(x, y) = x^2y^2$ sous la contrainte $x + y = 1$.
 - Même question avec $f(x, y) = xy$ sous la contrainte $x^2 + y^2 = 1$.
 - Déterminer la distance entre l'origine et la courbe d'équation cartésienne $x^2 - 2x + y^2 - 4y + 4 = 0$ (+représentation)
 - Déterminer la distance entre le point de coordonnées $(0, 1)$ et la courbe d'équation cartésienne $x^2 - y^2 = 1$ (+représentation).
 - Déterminer la distance entre la courbe d'équation cartésienne $x^2/4 + y^2 = 1$ et la droite d'équation cartésienne $x + y = 4$ (+représentation).

4. On donne les fonctions f, g par

$$f(x, y) = x^2 - 3xy - y^2, \quad g(x, y) = x + y.$$

Déterminer les extrema demandés ci-dessous par des méthodes directes.

- (i) Déterminer les extrema éventuels de la fonction f sur \mathbb{R}^2 . Sont-ils globaux? Justifier.
 - (ii) Déterminer les extrema éventuels de f sous la contrainte $g(x, y) = 0$. Sont-ils globaux? Justifier.
5. On donne la fonction f par

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 4y - 3, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Déterminer les extrema demandés ci-dessous par des méthodes directes.

- (i) Déterminer ses éventuels extrema libres dans \mathbb{R}^2 .
 - (ii) Déterminer ses éventuels extrema libres dans l'ouvert $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4\}$.
 - (iii) Déterminer ses éventuels extrema sous la contrainte $x^2 + y^2 = 4$.
 - (iv) Déterminer ses éventuels extrema libres dans le fermé borné $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$.
6. Montrer que le rectangle d'aire maximale contenu dans une boule du plan est un carré. En déterminer la longueur des côtés.