Compléments de mathématiques générales, année académique 2009-2010

Liste 2

2e bachelier en Informatique, Chimie et Géométrologie

Ceci constitue une liste d'exercices qui viennent en supplément de ceux résolus aux cours et aux répétitions

---

1. Soit $k > 0$ et soit la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + k^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

   (a) Calculer (si possible) la transformée de Fourier de la fonction $x \mapsto e^{-k|x|}$, $x \in \mathbb{R}$.

   (b) Montrer que

$$\mathcal{F}_y^{\pm} f = \frac{\pi}{k} e^{-k|y|}.$$

   (c) A l'aide du théorème du transfert, déduire que

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} = \frac{\pi}{2ab} \frac{1}{a + b} \quad (a, b > 0).$$

2. Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x - \pi}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

   Déterminer la transformée de Fourier $(-)$ en spécifiant s'il s'agit de la transformée dans L^1 ou dans L^2.

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer et représenter graphiquement

$$g(x) = \chi_{[0,1]} \star \chi_{[1,2]} \star \chi_{[2,3]}(x).$$

4. Soient a et b des réels positifs tels que $0 < a < b$. Si on pose

$$f(x) = e^{-ax} \chi_{[0,+\infty[}(x) \quad \text{et} \quad g(x) = e^{-bx} \chi_{[0,+\infty[}(x),$$

   calculer (si possible) le produit de convolution $f \star g$.

5. Développer la fonction f donnée explicitement par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in]-\pi, 0[\\ x & \text{si} \quad x \in [0, \pi[\end{cases}$$

   en série trigonométrique de Fourier dans $\mathrm{L}^2(]-\pi,\pi[)$. En déduire la valeur de la série

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{(2m - 1)^2}.$$

6. *Application de l'outil "transformation de Fourier/produit de composition" à la résolution de l'equation de la chaleur.*

   Soit une fonction $u = u(x, t)$ $(x \in \mathbb{R}, t \geq 0)$ de classe C_2 dont les dérivées partielles jusqu'à l'ordre 2 sont intégrables par rapport à x sur $\mathbb{R}$ quel que soit t. Soit aussi une constante strictement positive v.

   On suppose que u vérifie l'équation

$$D_t u(x, t) = v^2 D_x^2 u(x, t), \quad t \geq 0, \ x \in \mathbb{R}.$$

   On pose

$$f(x) = u(x, 0), \quad \widehat{f} = \mathcal{F}^- f$$

   et on définit la fonction

$$F(y, t), \ t \geq 0, \ y \in \mathbb{R}$$

   de telle sorte que, pour t fixé, $F(y, t)$ soit la transformée de Fourier (négative) en y de la fonction $x \mapsto u(x, t)$.

(a) Montrer que pour tout y, la fonction $t \mapsto F(y,t)$ vérifie

$$D_t F(y,t) + v^2 y^2 F(y,t) = 0.$$

(b) Déduire du point précédent que l'on a

$$F(y,t) = \widehat{f}(y)\ e^{-v^2 y^2 t}.$$

(c) Déduire de ce qui précède que l'on a finalement

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} f\left(x + 2v\sqrt{t}y\right)\ e^{-y^2}\ dy, \quad x \in \mathbb{R},\ t \geq 0.$$

7. Soit un signal f (on suppose que cette fonction est intégrable et de carré intégrable). On définit *l'autocorrélation* du signal par

$$E_f(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{f(x-t)}\ dx, \qquad t \in \mathbb{R}$$

et la *densité spectrale de puissance* de ce signal (PSD) par

$$D_f(y) = \left|\widehat{f}(y)\right|^2, \qquad y \in \mathbb{R}$$

où $\widehat{f}(y)$ désigne la transformée de Fourier négative de f en y. On pose $f^s(x) = \overline{f(-x)},\ x \in \mathbb{R}$.

(a) Montrer que l'autocorrélation s'écrit

$$E_f = f * f^s$$

(b) Montrer que l'autocorrélation d'une fonction à valeurs réelles est une fonction paire

(c) Montrer que

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |E_f(t)| = E_f(0).$$

(d) Montrer qu'à une constante multiplicative près, la densité spectrale et l'autocorrélation sont les transformées de Fourier l'une de l'autre.

FB, 12 octobre 2009 (Version 1 : 09 octobre 2009, avec LS)