

COMPLÉMENTS DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES

Liste 3

2e bachelier en Informatique, Chimie et Géométrie

*Ceci constitue une liste d'exercices qui viennent en supplément de ceux résolus aux cours et aux répétitions.*

1. Déterminer les extrema des fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathbb{R}$  respectivement par

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}.$$

2. Rechercher les points stationnaires et les extrema éventuels (en précisant s'ils sont stricts et/ou globaux) des fonctions  $f_j$  ( $j \in \{1, \dots, 8\}$ ) suivantes définies par

$$f_1(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy, \quad f_2(x, y) = x^2 - e^{y^2}, \quad f_3(x, y) = 2(x^2 + y^2) - 4xy - 5, \quad f_4(x, y) = \arctg\left(\frac{x}{y}\right),$$

$$f_5(x, y) = \operatorname{arccotg}(xy), \quad f_6(x, y) = x^2 + y^4, \quad f_7(x, y) = x^2 - y^4 \quad \text{et} \quad f_8(x, y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

3. Soit la fonction  $f$  définie par

$$f(x, y) = \sqrt{1 + x^2 + y^2} - x^2 - 2y^2.$$

Déterminer les extrema locaux de  $f$ . Sont-ils globaux ? (Suggestion : étudier la fonction  $y \mapsto f(x_0, y)$  pour un réel  $x_0$  quelconque.)

4. Déterminer les éventuels extrema globaux de  $f$  définie par  $f(x, y) = x^2 - y$  sous la contrainte  $1 - x^2 - y^2 = 0$  (en utilisant plusieurs méthodes).
5. Rechercher les extrema de la fonction  $f$  définie par

$$f(x, y) = (4x - x^2) \cos(y)$$

sur l'ensemble  $E = [1, 3] \times [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ .

6. On donne explicitement les fonctions  $f$  et  $g$  définies par

$$f(x, y) = xy \quad \text{et} \quad g(x, y) = 4x^2 + y^2.$$

- (a) Déterminer ses éventuels extrema libres de  $f$ .
- (b) S'ils existent, déterminer les extrema de  $f$  sous la contrainte  $g(x, y) = 1$ .
- (c) S'ils existent, déterminer les extrema de  $f$  dans l'ensemble

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, g(x, y) \leq 1\}.$$

Représenter l'ensemble  $A$  dans un repère orthonormé.

7. Une boîte parallépipédique de volume  $V$  doit avoir cinq faces en plastique et une en verre. Si le verre coûte deux fois plus cher que le plastique, quelles dimensions faut-il donner à cette boîte pour que le prix de revient soit minimal ?