Compléments de mathématiques générales

Travail dirigé des 3 et 17 novembre 2008

2e bachelier en Informatique et Géométrologie

Exercice 1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a < b$. On pose

$$f(x) = e^{-ax}\chi_{]0,+\infty[}(x) \quad \text{et} \quad g(x) = e^{-bx}\chi_{]0,+\infty[}(x)$$

Calculer, si possible, le produit $f * g$.

Exercice 2. Développer la fonction f donnée explicitement par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\pi, 0[\\ x & \text{si } x \in [0, \pi[\end{cases}$$

en série de Fourier dans $L^2(]-\pi,\pi[)$.

En déduire la valeur de la série

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{(2m-1)^2}$$

Exercice 3. Soit un signal f (on suppose que cette fonction est intégrable et de carré intégrable). On définit *l'autocorrélation* du signal par

$$E_f(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{f(x-t)}dx,\ t \in \mathbb{R}$$

et la *densité spectrale de puissance* de ce signal (PSD) par

$$D_f(y) = \left|\hat{f}(y)\right|^2,\ y \in \mathbb{R}$$

où $\hat{f}(y)$ désigne la transformée de Fourier négative de f en y. On pose $f^s(x) = \overline{f(-x)}$, $x \in \mathbb{R}$.

- Montrer que l'autocorrélation s'écrit

$$E_f = f * f^s$$

- Montrer que l'autocorrélation d'une fonction à valeurs réelles est une fonction paire.
- Montrer que

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |E_f(t)| = E_f(0)$$

- Montrer que la densité spectrale et l'autocorrélation sont liées par la transformation de Fourier.

Exercice 4. Démontrer l'identité

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot (\vec{c} \wedge \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$$

Exercice 5 (Informaticiens : Approximation de π).

(1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ vérifiant $|x| \leq 1$, on a

$$\arctan(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{2m+1}$$

(Suggestion : Le faire d'abord pour $|x| < 1$.)

(2) Montrer que pour tout $x \in]-1, +\infty[$, on a

$$\arctan\left(\frac{1}{x+1}\right) + \arctan\left(\frac{x}{x+2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

(3) En utilisant le point (1) et le résultat permettant de majorer la valeur absolue des "queues" des séries alternées, calculer l'erreur absolue (i. e. la valeur absolue de la différence entre la valeur réelle et la valeur approximée) entre $\frac{\pi}{4}$ et l'approximation en 5 termes de $\frac{\pi}{4}$ obtenue via l'égalité

$$\frac{\pi}{4} = \arctan(1).$$

(4) Idem mais en utilisant cette fois l'égalité

$$\frac{\pi}{4} = \arctan(\frac{1}{2}) + \arctan(\frac{1}{3})$$

obtenue grâce au point (2).

(5) Quelle est la meilleure approximation ? Justifier.

Exercice 6 (Géométrologues).

(1) Montrer que dans tout triangle sphérique, on a

$$\cos(a) = \cos(b+c)\sin^2(\frac{A}{2}) + \cos(b-c)\cos^2(\frac{A}{2})$$

(2) Calculer la distance qui sépare l'observatoire d'Uccle ($50°47'56''N$, $4°21'45''E$) et celui de Zurich ($47°22'40''N$, $8°33'E$).