---

1. L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2-1 \geq 2x|x-1|$ est
   $]-\infty,-\frac{1}{3}]$☐ $[-\frac{1}{3},1]$☐ $[-\frac{1}{3},+\infty[$☐ $[1,+\infty[$☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte ♣
2. Si r est un réel strictement négatif, alors $|r-1|$ vaut
   $-r-1$☐ $r-1$☐ $1-r$♣ aucune des réponses précédentes n'est correcte☐
3. Si $a=-1$, alors l'expression $\sum_{j=2}^{5} a^j$ vaut
   -1☐ 0♣ 1☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte☐
4. Dans un repère orthonormé du plan, l'ensemble des points dont les coordonnées cartésiennes (x,y) vérifient l'équation $x^2-2y^2+4=0$ est
   une hyperbole ♣ une parabole ☐ une ellipse ☐ une droite ou une union finie de droites☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte ☐
5. Pour que deux réels non nuls aient le même carré, il est nécessaire que ces réels soient égaux
   Vrai ☐ Faux♣

---

1. L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2-1 \leq 2x|x-1|$ est
   $]-\infty,-\frac{1}{3}]$☐ $[-\frac{1}{3},1]$☐ $[-\frac{1}{3},+\infty[$♣ $[1,+\infty[$☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte ☐
2. Si r est un réel strictement négatif, alors $\sqrt{r^2}-r$ vaut
   0☐ $\pm 2r$☐ $-2r$♣ aucune des réponses précédentes n'est correcte☐
3. L'expression $\sum_{n=1}^{3}(n!)$ vaut
   $n!$ ☐ 3☐ 8☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte♣
4. Dans un repère orthonormé du plan, l'ensemble des points dont les coordonnées cartésiennes (x,y) vérifient l'équation $x^2+2y^2+1=0$ est
   une hyperbole ☐ une parabole ☐ une ellipse ☐ une droite ou une union finie de droites☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte ♣
5. Si le carré du réel non nul a est plus petit ou égal au carré du réel b, alors, nécessairement, le réel a est plus petit ou égal au réel b
   Vrai ☐ Faux♣

1. L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 - 1 \geq \frac{x}{2}|x-1|$ est
   $]-\infty, -\frac{2}{3}]\square$ $[-\frac{2}{3}, 1]\square$ $[-\frac{2}{3}, +\infty[\square$ $[1, +\infty[\square$ aucune des réponses précédentes n'est correcte $\clubsuit$

2. Si r est un réel strictement négatif, alors $\sqrt{r^2} + r$ vaut
   $0\clubsuit$ $\pm 2r\square$ $-2r\square$ aucune des réponses précédentes n'est correcte$\square$

3. Si $r_j = \frac{1}{2}$ $(j = 1, 2, 3, 4)$, alors l'expression $\sum_{j=1}^{4} r_j$ vaut
   $\frac{1}{2}\square$ $2\clubsuit$ $4\square$ aucune des réponses précédentes n'est correcte$\square$

4. Dans un repère orthonormé du plan, l'ensemble des points dont les coordonnées cartésiennes (x, y) vérifient l'équation $x^2 - 2y^2 = 0$ est
   une hyperbole $\square$ une parabole $\square$ une ellipse $\square$ une droite ou une union finie de droites$\clubsuit$ aucune des réponses précédentes n'est correcte $\square$

5. Deux réels non nuls peuvent avoir le même carré mais être de valeur absolue différente
   Vrai $\square$ Faux $\clubsuit$

---

1. L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 - 1 \leq \frac{x}{2}|x-1|$ est
   $]-\infty, -\frac{2}{3}]\square$ $[-\frac{2}{3}, 1]\clubsuit$ $[-\frac{2}{3}, +\infty[\square$ $[1, +\infty[\square$ aucune des réponses précédentes n'est correcte $\square$

2. Si r est un réel strictement négatif, alors $|1-r|$ vaut
   $r - 1\square$ $-r-1\square$ $1-r\clubsuit$ aucune des réponses précédentes n'est correcte$\square$

3. Si $a = -1$, alors l'expression $\sum_{j=1}^{5} (-1)^j a^j$ vaut
   $-1\square$ $0\square$ $1\square$ aucune des réponses précédentes n'est correcte$\clubsuit$

4. Dans un repère orthonormé du plan, l'ensemble des points dont les coordonnées cartésiennes (x, y) vérifient l'équation $x^2 + 3y = 0$ est
   une hyperbole $\square$ une parabole $\clubsuit$ une ellipse $\square$ une droite ou une union finie de droites$\square$ aucune des réponses précédente n'est correcte $\square$

5. Pour que deux réels aient le même carré, il suffit qu'ils soient opposés
   Vrai $\clubsuit$ Faux $\square$

Question 1) Déterminer le domaine de définition des fonctions f, g données par

$$f(x) = \sqrt{x^3 + |x|}, \quad g(x) = \ln(x^2 + 3x + 2).$$

Solution. Le domaine de définition de la fonction f est

$$\begin{aligned}
\{x \in \mathbb{R} \ : \ x^3 + |x| \geq 0\} &= [0, +\infty[\cup \{x \in]-\infty, 0[\ : \ x^3 - x = x(x^2 - 1) \geq 0\} \\
&= [0, +\infty[\cup \{x \in]-\infty, 0[\ : \ x^2 - 1 \leq 0\} \\
&= [0, +\infty[\cup [-1, 0[\\
&= [-1, +\infty[.
\end{aligned}$$

Le domaine de définition de g est

$$\begin{aligned}
\{x \in \mathbb{R} \ : \ x^2 + 3x + 2 > 0\} &= \{x \in \mathbb{R} \ : \ (x+2)\ (x+1) > 0\} \\
&=]-\infty, -2[\cup]-1, +\infty[.
\end{aligned}$$

Question 2) Pour chacune des expressions suivantes, déterminer si elle a un sens et dans ce cas, la simplifier au maximum.

$$\arccos(\cos(1)), \quad \arcsin\left(\sin(\frac{8\pi}{15})\right), \quad 2 + \ln\left(\frac{2\sqrt{2}}{e^2}\right).$$

Solution. Comme $1 \in [0, \pi]$, on a

$$\arccos(\cos(1)) = 1.$$

On a $\frac{\pi}{2} < \frac{8\pi}{15} < \pi$ donc $0 < \pi - \frac{8\pi}{15} = \frac{7\pi}{15} < \frac{\pi}{2}$ et $\sin(\frac{8\pi}{15}) = \sin(\frac{7\pi}{15})$; dès lors

$$\arcsin\left(\sin(\frac{8\pi}{15})\right) = \arcsin\left(\sin(\frac{7\pi}{15})\right) = \frac{7\pi}{15}.$$

En utilisant les propréiéts de la fonction ln, on obtient

$$2 + \ln\left(\frac{2\sqrt{2}}{e^2}\right) = 2 + \ln(2\sqrt{2}) - 2\ln e = 2 + \ln 2 + \frac{1}{2}\ln 2 - 2 = \frac{3}{2}\ln 2.$$

Question 3) Décomposer la fraction rationnelle suivante en une somme de fractions simples à coefficients réels

$$\frac{1}{x^3 + x^2}.$$

Solution. Le dénominateur s'écrit $x^3 + x^2 = x^2(x+1)$; on sait donc qu'il existe des réels uniques r, s, t tels que

$$\frac{1}{x^3 + x^2} = \frac{r}{x} + \frac{s}{x^2} + \frac{t}{x+1}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}.$$

En procédant par coefficents indéterminés, on trouve

$$\frac{1}{x^2 + x^3} = \frac{-1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}.$$

Remarquons cependant que la forme du dénominateur permet de trouver la réponse assez directement en procédant comme suit

$$\frac{1}{x^2 + x^3} = \frac{(1+x) - x}{x^2(x+1)} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x^2} - \frac{(1+x) - x}{x(x+1)} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}.$$

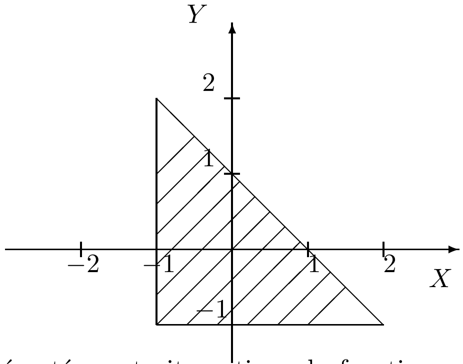
Question 4) 4.1) Dans un même repère orthonormé du plan, représenter graphiquement les fonctions f, g, h suivantes en utilisant des couleurs différentes

$$f(x) = \cos x,\ x \in [-2\pi, 2\pi]; \quad g(x) = 1 + |\cos x|,\ x \in [-2\pi, 2\pi]; \quad h(x) = -1 + \cos(|x|),\ x \in [-2\pi, 2\pi].$$

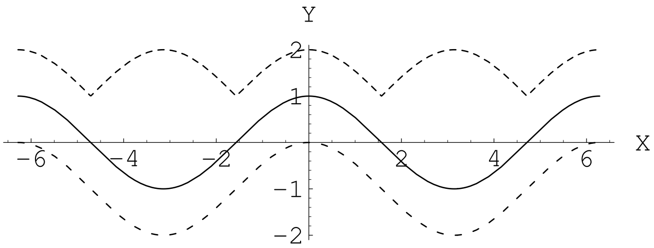
4.2) Dans un repère orthonormé du plan, représenter graphiquement l'ensemble suivant en le hachurant.

$$\left\{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 - 4x \leq 0 \text{ et } y \geq 4 - x^2\right\}.$$

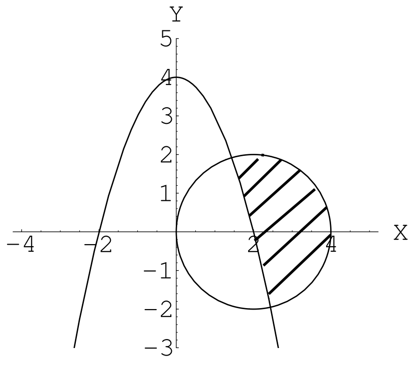
4.3) Décrire analytiquement l'ensemble hachuré suivant (les bords sont compris dans l'ensemble).



Solution. 4.1) La fonction f est représentée en trait continu. la fonction g est représentée par la courbe avec le trait pointillé finement ("au-dessus" de l'axe X car g est à valeurs strictement positives). La fonction h, à valeurs négatives ou nulle, est la troisième courbe.



4.2) Voici une représentation de l'ensemble



4.3) Voir l'interrogation de novembre 2005 (correction disponible sur le web, aux pages habituelles).

On a la propriété suivante : ***le logarithme népérien est une fonction qui, à tout produit de deux réels de son domaine de définition associe la somme des valeurs de la fonction en ces réels.***

Exprimer mathématiquement cette propriété. Démontrer cette propriété.

Solution. Voir notes de cours.

Question 1) Déterminer le domaine de définition de la fonction f donnée par

$$f(x) = \sqrt{x^2|x| - x}.$$

Solution. Le domaine de définition de la fonction f est

$$\begin{aligned}\{x \in \mathbb{R} \ : \ x^2|x| - x \geq 0\} &= \ ]-\infty, 0] \cup \{x \in]0, +\infty[\ : \ x^3 - x = x(x^2-1) \geq 0\} \\ &= \ ]-\infty, 0] \cup \{x \in]0, +\infty[\ : \ x^2 - 1 \geq 0\} \\ &= \ ]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[.\end{aligned}$$

Question 2) Pour chacune des expressions suivantes, déterminer si elle a un sens et dans ce cas, la simplifier au maximum.

$$\arcsin\left(\sin(\frac{1}{2})\right), \quad \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}(\frac{8\pi}{15})\right), \quad \ln(\cos\frac{\pi}{6}) + \ln 6.$$

Solution. Comme $\frac{1}{2} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, on a

$$\arcsin\left(\sin(\frac{1}{2})\right) = \frac{1}{2}.$$

On a $\frac{\pi}{2} < \frac{8\pi}{15} < \pi$ donc $-\frac{\pi}{2} < \frac{8\pi}{15} - \pi = -\frac{7\pi}{15} < 0$ et $\operatorname{tg}(\frac{8\pi}{15}) = \operatorname{tg}(\frac{-7\pi}{15})$; dès lors

$$\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}(\frac{8\pi}{15})\right) = -\frac{7\pi}{15}.$$

On a $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ donc

$$\ln(\cos\frac{\pi}{6}) + \ln 6 = \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \ln 6 = \ln\left(6\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \ln(3\sqrt{3}) = \frac{3}{2}\ln 3.$$

Question 3) 3.1) Déterminer tous les nombres complexes z vérifiant l'équation $z^4 - 1 = 0$.
3.2) Déterminer ensuite les coordonnées polaires des points du plan définis par les complexes dont il est question au point précédent.
Solution. On a directement $z^4 - 1 = (z^2-1)\ (z^2+1) = (z-1)\ (z+1)\ (z-i)\ (z+i)$ donc les complexes cherchés sont $1, -1, i, -i$. Leurs coordonnées polaires respectives sont (l'angle polaire étant choisi dans l'intervalle $[0, 2\pi[$): $1, 0;\ 1, \pi;\ 1, \frac{\pi}{2};\ 1, \frac{3\pi}{2}$.

Question 4) Décomposer la fraction rationnelle suivante en une somme de fractions simples à coefficients réels

$$\frac{x^2}{4x^2 - 1}.$$

Solution. Comme le degré du numérateur est égal au degré du dénominateur, effectuons la division; on a immédiatement

$$\frac{x^2}{4x^2-1} = \frac{1}{4}\frac{4x^2 - 1 + 1}{4x^2 - 1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4(4x^2-1)}.$$

Cela étant, on a $4x^2 - 1 = (2x-1)(2x+1)$ donc

$$\frac{1}{4x^2-1} = \frac{1}{2(2x-1)} - \frac{1}{2(2x+1)}$$

et finalement

$$\frac{x^2}{4x^2-1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8(2x-1)} - \frac{1}{8(2x+1)}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\}.$$

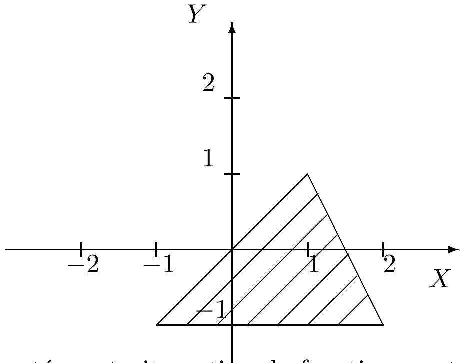
Question 5) 5.1) Dans un même repère orthonormé du plan, représenter graphiquement les fonctions f, g, h suivantes en utilisant des couleurs différentes

$$f(x) = \sin x,\ x \in [-2\pi, 2\pi]; \quad g(x) = -1 + |\sin x|,\ x \in [-2\pi, 2\pi]; \quad h(x) = 1 + \sin(|x|),\ x \in [-2\pi, 2\pi].$$

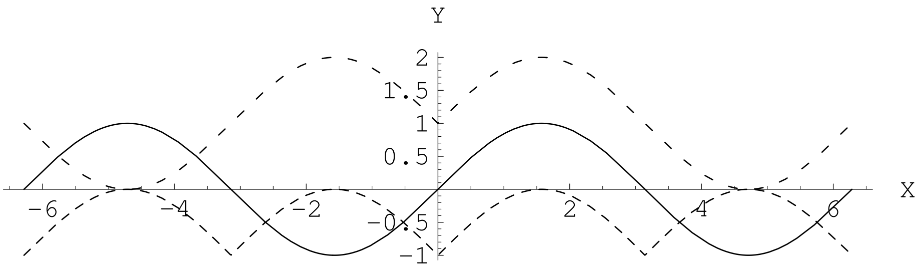
5.2) Dans un repère orthonormé du plan, représenter graphiquement l'ensemble suivant en le hachurant.

$$\left\{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 - 4x \le 0 \text{ et } x \ge 1 - y^2\right\}.$$

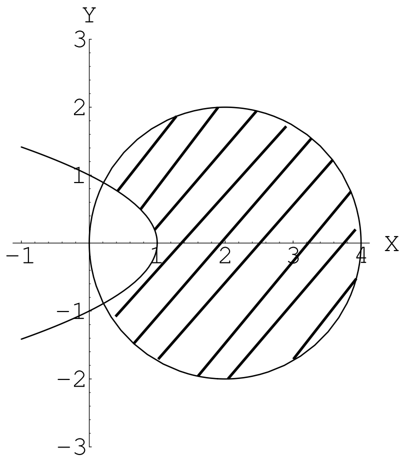
5.3) Décrire analytiquement l'ensemble hachuré suivant (les bords ne sont pas compris dans l'ensemble).



Solution. 5.1) La fonction f est représentée en trait continu; la fonction g est représentée par la courbe entièrement située sous l'axe X (la fonction g est à valeurs négatives ou nulle); la fonction h est représentée par la courbe entièrement située au-dessus de l'axe X (la fonction h est à valeurs positives ou nulles).



5.2) Voici une repésentation de l'ensemble



5.3) Voir l'interrogation de novembre 2005 (disponible sur le web, pages habituelles).

Question 6) On a la propriété suivante : ***le logarithme népérien est une fonction qui, à tout produit de deux réels de son domaine de définition associe la somme des valeurs de la fonction en ces réels.***

Exprimer mathématiquement cette propriété. Démontrer cette propriété.

Solution. Voir notes de cours.

Mathématiques générales **Correction de l'interrogation du 08 novembre 2006**

1ère année de Bachelier en chimie, géologie

Question 1) Déterminer le domaine de définition des fonctions f, g données par

$$f(x) = \sqrt{x - x^2|x|}, \quad g(x) = \ln(x^2 + 2x + 1).$$

Solution. Le domaine de définition de f est

$$\begin{aligned}\{x \in \mathbb{R} \ : \ x - x^2|x| \geq 0\} &= \{x \in]-\infty, 0[\ : \ x - x^2|x| \geq 0\} \cup \{x \in [0, +\infty[\ : \ x - x^2|x| \geq 0\} \\ &= \{x \in [0, +\infty[\ : \ x - x^2|x| \geq 0\} \\ &= \{x \in [0, +\infty[\ : \ x - x^2 x \geq 0\} = \{0\} \cup \{x \in]0, +\infty[\ : \ 1 - x^2 \geq 0\} \\ &= [0, 1].\end{aligned}$$

Le domaine de définition de g est

$$\{x \in \mathbb{R} \ : \ x^2 + 2x + 1 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} \ : \ (x+1)^2 > 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

Question 2) Pour chacune des expressions suivantes, déterminer si elle a un sens et dans ce cas, la simplifier au maximum.

$$\operatorname{arcos}(\cos(\frac{-8\pi}{15})), \quad \sin\left(\arcsin(\sqrt{2})\right), \quad \ln(\sin 1) + \ln(\cos 1) - \ln(\sin 2) - \ln 2.$$

Solution. On a $\cos(\frac{-8\pi}{15}) = \cos(\frac{8\pi}{15})$ et $\frac{8\pi}{15} \in [0, \pi]$; dès lors

$$\operatorname{arcos}(\cos(\frac{-8\pi}{15})) = \operatorname{arcos}(\cos(\frac{8\pi}{15})) = \frac{8\pi}{15}.$$

Comme arcsin est défini sur $[-1, 1]$ et comme $\sqrt{2} > 1$, la seconde expression n'a pas de sens.
On a $\ln(\sin 1) + \ln(\cos 1) = \ln(\sin 1 \ \cos 1) = \ln\left(\frac{2 \sin 1 \ \cos 1}{2}\right) = \ln(\sin 2) - \ln 2$ donc

$$\ln(\sin 1) + \ln(\cos 1) - \ln(\sin 2) - \ln 2 = -2 \ln 2.$$

Question 3) Décomposer la fraction rationnelle suivante en une somme de fractions simples à coefficients réels

$$\frac{1}{x^3 - x^2}.$$

Solution. On a $x^3 - x^2 = x^2(x-1)$; dès lors, on obtient directement

$$\frac{1}{x^3 - x^2} = \frac{1 - x + x}{(x-1)\,x^2} = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x-1)\,x} = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}.$$

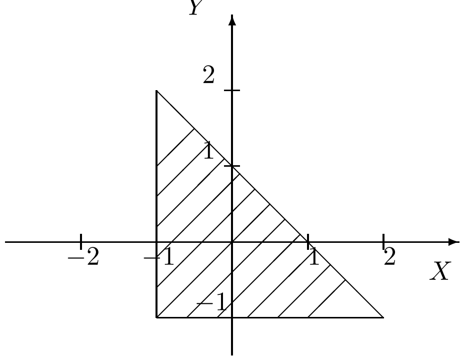
Question 4) 4.1) Dans un même repère orthonormé du plan, représenter graphiquement les fonctions f, g, h suivantes en utilisant des couleurs différentes

$$f(x) = \sin x, \ x \in [-2\pi, 2\pi]; \quad g(x) = \sin(\frac{x}{2}) \ \cos(\frac{x}{2}), \ x \in [-2\pi, 2\pi]; \quad h(x) = 1 + \sin(|x|), \ x \in [-2\pi, 2\pi].$$

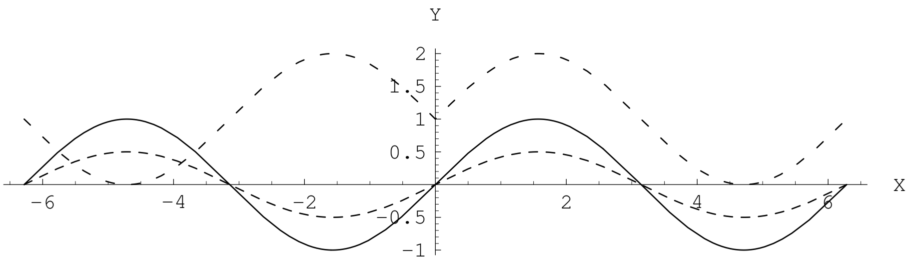
4.2) Dans un repère orthonormé du plan, représenter graphiquement l'ensemble suivant en le hachurant.

$$\left\{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}, x^2 - y^2 - 1 \leq 0 \text{ et } x \geq -1 + y^2\right\}.$$

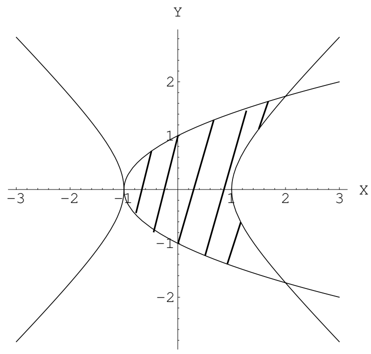
4.3) Décrire analytiquement l'ensemble hachuré suivant (les bords sont compris dans l'ensemble).



Solution. 4.1) La fonction $f = \sin$ est représentée en trait continu; la fonction g est en fait la fonction $\frac{\sin}{2} = \frac{f}{2}$ et est représentée en avec le trait pointillé finement; la fonction h est représentée par la courbe entièrement située "au-dessus" de l'axe des X (l'image de h est $[0, 2]$).



4.2) On a la représentation suivante (les bords sont compris dans l'ensemble)



4.3) Voir l'interrogation des biologistes.

Question 5) 5.1) On donne une fonction f, à valeurs réelles, de domaine de définition $[0, +\infty[$. On demande de définir mathématiquement ce que l'on entend par "*f est une fonction convexe sur* $[0, +\infty[$" et d'en donner une interprétation graphique.

5.2) Dans un repère orthonormé du plan et en se servant du cercle centré à l'origine et de rayon 1, on demande de définir géométriquement le cosinus du réel -5.

Solution. Voir notes de cours.

Mathématiques générales **QCM du 01 décembre 2006**

---

1. La limite $\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}$ est égale à $-\infty\square$ $0\clubsuit$ $1\square$ $e\square$ $+\infty\square$ aucune des réponses précédentes n'est correcte$\square$
2. La limite $\lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(\sqrt{1-x})}{|x|}$ est égale à $-\infty\square$ $-1\square$ $0\clubsuit$ $1\square$ $+\infty\square$ aucune des réponses précédentes n'est correcte$\square$
3. Le domaine de dérivabilité de la fonction $x \mapsto \ln(x^2)$ est
$]-\infty,0[\square$ $]0,+\infty[\square$ $]-1,1[\setminus\{0\}\square$ $\mathbb{R}\square$ $\mathbb{R}_0\clubsuit$ aucune des réponses précédentes n'est correcte$\square$
4. La dérivée de la fonction $f(x) = \sin(\cos x),\ x \in \mathbb{R}$ est donnée explicitement par

$\square\cos(\sin x)$	$\square-\cos(\sin x)$	$\square\sin(\sin x)$	$\square-\sin(\sin x)$
$\square\cos(\cos x)$	$\square-\cos(\cos x)$	$\square\sin(\cos x)$	$\square-\sin(\cos x)$
$\square\cos(\cos x)\ \sin x$	$\square\cos(\cos x)\ \cos x$	$\square\sin(\cos x)\ \sin x$	$\square\sin(\cos x)\ \cos x$
$\clubsuit-\cos(\cos x)\ \sin x$	$\square-\cos(\cos x)\ \cos x$	$\square-\sin(\cos x)\ \sin x$	$\square-\sin(\cos x)\ \cos x$
$\square\cos(\sin x)\ \sin x$	$\square\cos(\sin x)\ \cos x$	$\square\sin(\sin x)\ \sin x$	$\square\sin(\sin x)\ \cos x$
$\square-\cos(\sin x)\ \sin x$	$\square-\cos(\sin x)\ \cos x$	$\square-\sin(\sin x)\ \sin x$	$\square-\sin(\sin x)\ \cos x$

5. Pour toutes fonctions f, g définies sur $]0,1[$ admettant des limites en 0^+ et vérifiant $\lim_{x\to 0^+}(fg)(x) = \infty$ et $\lim_{x\to 0^+} f(x) \in \mathbb{R}$, on a $\lim_{x\to 0^+} g(x) = \infty$ Vrai$\clubsuit$ Faux$\square$

Mathématiques générales **QCM du 01 décembre 2006**

---

1. La limite $\lim_{x\to-\infty} \ln(x^2)$ est égale à $-\infty\square$ $0\square$ $1\square$ $e\square$ $+\infty\clubsuit$ aucune des réponses précédentes n'est correcte$\square$
2. La limite $\lim_{x\to 1} \frac{\ln(|2-x|)}{x-1}$ est égale à $-\infty\square$ $-1/2\square$ $0\square$ $1/2\square$ $+\infty\square$ aucune des réponses précédentes n'est correcte$\clubsuit$
3. Le domaine de dérivabilité de la fonction $x \mapsto \ln(1-e^x)$ est
$]-\infty,0[\clubsuit$ $]0,+\infty[\square$ $]-1,1[\setminus\{0\}\square$ $\mathbb{R}\square$ $\mathbb{R}_0\square$ aucune des réponses précédentes n'est correcte$\square$
4. La dérivée de la fonction $f(x) = \cos(\cos x),\ x \in \mathbb{R}$ est donnée explicitement par

$\square\cos(\sin x)$	$\square-\cos(\sin x)$	$\square\sin(\sin x)$	$\square-\sin(\sin x)$
$\square\cos(\cos x)$	$\square-\cos(\cos x)$	$\square\sin(\cos x)$	$\square-\sin(\cos x)$
$\square\cos(\cos x)\ \sin x$	$\square\cos(\cos x)\ \cos x$	$\clubsuit\sin(\cos x)\ \sin x$	$\square\sin(\cos x)\ \cos x$
$\square-\cos(\cos x)\ \sin x$	$\square-\cos(\cos x)\ \cos x$	$\square-\sin(\cos x)\ \sin x$	$\square-\sin(\cos x)\ \cos x$
$\square\cos(\sin x)\ \sin x$	$\square\cos(\sin x)\ \cos x$	$\square\sin(\sin x)\ \sin x$	$\square\sin(\sin x)\ \cos x$
$\square-\cos(\sin x)\ \sin x$	$\square-\cos(\sin x)\ \cos x$	$\square-\sin(\sin x)\ \sin x$	$\square-\sin(\sin x)\ \cos x$

5. Pour toutes fonctions f, g définies sur $]0,1[$ admettant des limites en 0^+ et telles que $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, on a $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} g(x)$ Vrai$\clubsuit$ Faux$\square$

Mathématiques générales **QCM du 01 décembre 2006**

---

1. La limite $\lim_{x\to+\infty} \text{arctg}\left(\frac{x}{1+x}\right)$ est égale à $-\infty\square$ $-\pi/2\square$ $0\square$ $\pi/2\square$ $+\infty\square$ aucune des réponses précédentes n'est correcte$\clubsuit$
2. La limite $\lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(|x+1|)}{\ln(x^2)}$ est égale à $-\infty\square$ $-1/2\square$ $0\square$ $1/2\clubsuit$ $+\infty\square$ aucune des réponses précédentes n'est correcte$\square$
3. Le domaine de dérivabilité de la fonction $x \mapsto \ln(|x-1|)$ est
$]-\infty,0[\square$ $]0,+\infty[\square$ $]-1,1[\setminus\{0\}\square$ $\mathbb{R}\square$ $\mathbb{R}_0\square$ aucune des réponses précédentes n'est correcte$\clubsuit$
4. La dérivée de la fonction $f(x) = \sin(\sin x),\ x \in \mathbb{R}$ est donnée explicitement par

$\square\cos(\sin x)$	$\square-\cos(\sin x)$	$\square\sin(\sin x)$	$\square-\sin(\sin x)$
$\square\cos(\cos x)$	$\square-\cos(\cos x)$	$\square\sin(\cos x)$	$\square-\sin(\cos x)$
$\square\cos(\cos x)\ \sin x$	$\square\cos(\cos x)\ \cos x$	$\square\sin(\cos x)\ \sin x$	$\square\sin(\cos x)\ \cos x$
$\square-\cos(\cos x)\ \sin x$	$\square-\cos(\cos x)\ \cos x$	$\square-\sin(\cos x)\ \sin x$	$\square-\sin(\cos x)\ \cos x$
$\square\cos(\sin x)\ \sin x$	$\clubsuit\cos(\sin x)\ \cos x$	$\square\sin(\sin x)\ \sin x$	$\square\sin(\sin x)\ \cos x$
$\square-\cos(\sin x)\ \sin x$	$\square-\cos(\sin x)\ \cos x$	$\square-\sin(\sin x)\ \sin x$	$\square-\sin(\sin x)\ \cos x$

5. Pour toutes fonctions f, g définies sur $]0,1[$ telles que $\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} g(x)$, on a $\lim_{x\to0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$
Vrai$\square$ Faux$\clubsuit$

Mathématiques générales **QCM du 01 décembre 2006**

---

1. La limite $\lim_{x\to0^+} \arccos\left(\frac{x}{x+1}\right)$ est égale à $-\infty\square$ $-\pi/2\square$ $0\square$ $\pi/2\clubsuit$ $+\infty\square$ aucune des réponses précédentes n'est correcte$\square$
2. La limite $\lim_{x\to0} \frac{\ln(|x-1|)}{\sin x}$ est égale à $-\infty\square$ $-1\clubsuit$ $0\square$ $1\square$ $+\infty\square$ aucune des réponses précédentes n'est correcte$\square$
3. Le domaine de dérivabilité de la fonction $x \mapsto \ln(2-\sin x)$ est
$]-\infty,0[\square$ $]0,+\infty[\square$ $]-1,1[\setminus\{0\}\square$ $\mathbb{R}\clubsuit$ $\mathbb{R}_0\square$ aucune des réponses précédentes n'est correcte$\square$
4. La dérivée de la fonction $f(x) = \cos(\sin x),\ x \in \mathbb{R}$ est donnée explicitement par

$\square\cos(\sin x)$	$\square-\cos(\sin x)$	$\square\sin(\sin x)$	$\square-\sin(\sin x)$
$\square\cos(\cos x)$	$\square-\cos(\cos x)$	$\square\sin(\cos x)$	$\square-\sin(\cos x)$
$\square\cos(\cos x)\ \sin x$	$\square\cos(\cos x)\ \cos x$	$\square\sin(\cos x)\ \sin x$	$\square\sin(\cos x)\ \cos x$
$\square-\cos(\cos x)\ \sin x$	$\square-\cos(\cos x)\ \cos x$	$\square-\sin(\cos x)\ \sin x$	$\square-\sin(\cos x)\ \cos x$
$\square\cos(\sin x)\ \sin x$	$\square\cos(\sin x)\ \cos x$	$\square\sin(\sin x)\ \sin x$	$\square\sin(\sin x)\ \cos x$
$\square-\cos(\sin x)\ \sin x$	$\square-\cos(\sin x)\ \cos x$	$\square-\sin(\sin x)\ \sin x$	$\clubsuit-\sin(\sin x)\ \cos x$

5. Pour toutes fonctions f, g définies sur $]0,1[$ telles que $\lim_{x\to0^+} f(x) = \infty$ et $\lim_{x\to0^+} g(x) = \infty$, on a $\lim_{x\to0^+} (fg)(x) = \infty$ Vrai$\clubsuit$ Faux$\square$

QCM

1. Le domaine de définition de la fonction f donnée par
$$f(x) = \ln\left(e^{x+1} - 1\right)$$
est $]-\infty, -1[$☐ $]-\infty, 0[$☐ $]-1, +\infty[$♣ $]0, +\infty[[$☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte ☐

2. La partie imaginaire du conjugué du complexe $\frac{1}{i}$ est
-1☐ 0☐ 1♣ $-i$☐ i☐ aucune des réponses proposées n'est correcte☐

3. Pour que le produit de deux réels non nuls soit strictement positif, il est nécessaire que ces réels soient strictement positifs
Vrai ☐ Faux♣

4. La dérivée de la fonction $f(x) = \mathrm{arctg}(e^x)$, $x \in \mathbb{R}$, est donnée par
☐$\frac{e^x}{1+e^x}$ ♣$\frac{1}{e^{-x}+e^x}$ ☐$\frac{e^x}{1+x^2}$ ☐$\frac{1}{1+e^{2x}}$ ☐$\frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}$ ☐$\frac{1}{\sqrt{e^x+e^{-x}}}$ ☐$\frac{e^x}{\sqrt{1+x^2}}$ ☐$\frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}$
☐$\frac{e^x}{1-e^x}$ ☐$\frac{1}{e^x-e^{-x}}$ ☐$\frac{e^x}{1-x^2}$ ☐$\frac{1}{1-e^{2x}}$ ☐$\frac{e^x}{\sqrt{1-e^x}}$ ☐$\frac{1}{\sqrt{e^x-e^{-x}}}$ ☐$\frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}}$ ☐$\frac{1}{\sqrt{1-e^{2x}}}$
☐aucune des réponses précédentes n'est correcte

Autre version du QCM

1. Le domaine de définition de la fonction f donnée par
$$f(x) = \arcsin(e^x)$$
est $[-1, 1]$☐ $]-\infty, 0]$♣ $[0, +\infty[$☐ $[\frac{1}{e}, e]$☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte ☐

2. Le conjugué de la partie imaginaire du complexe $\frac{1}{i}$ est
-1♣ 0☐ 1☐ $-i$☐ i☐ aucune des réponses proposées n'est correcte☐

3. Pour que le produit de deux réels non nuls soit strictement négatif, il est suffisant que ces réels soient de signes opposés
Vrai ♣ Faux☐

4. La dérivée de la fonction $f(x) = \ln(1 + e^x)$, $x \in \mathbb{R}$, est donnée par
♣$\frac{1}{1+e^{-x}}$ ☐$\frac{1}{1+e^x}$ ☐$\frac{e^x}{1+x^2}$ ☐$\frac{1}{1+e^{2x}}$ ☐$\frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}$ ☐$\frac{1}{\sqrt{e^x+e^{-x}}}$ ☐$\frac{e^x}{\sqrt{1+x^2}}$ ☐$\frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}$
☐$\frac{e^x}{1-e^x}$ ☐$\frac{1}{e^x-e^{-x}}$ ☐$\frac{e^x}{1-x^2}$ ☐$\frac{1}{1-e^{2x}}$ ☐$\frac{e^x}{\sqrt{1-e^x}}$ ☐$\frac{1}{\sqrt{e^x-e^{-x}}}$ ☐$\frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}}$ ☐$\frac{1}{\sqrt{1-e^{2x}}}$
☐aucune des réponses précédentes n'est correcte

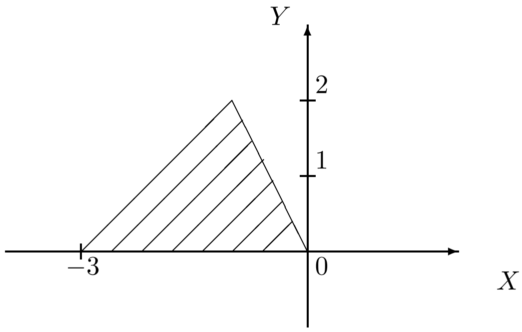
Autres questions (1er bachelier en biologie, chimie, géologie, philosophie)

Question 1. Si elle existe, déterminer la limite suivante
$$\lim_{x \to -\infty} \ln\left(-\frac{1}{x}\right).$$

Solution. Comme la fonction ln est définie dans $]0, +\infty[$ le domaine de définition de $x \mapsto \ln\left(-\frac{1}{x}\right)$ est $]-\infty, 0[$; la question posée a donc un sens. Cela étant, on obtient
$$\lim_{x \to -\infty} \ln\left(-\frac{1}{x}\right) = \lim_{y \to 0^+} \ln y = -\infty.$$

Question 2. (i) Dans un repère orthonormé du plan représenter graphiquement l'ensemble suivant (en le hachurant)
$$\left\{(x, y) : x, y \in \mathbb{R},\ x^2 - 2x + y^2 \leq 3 \textbf{ et } x - 1 \geq y^2\right\}.$$

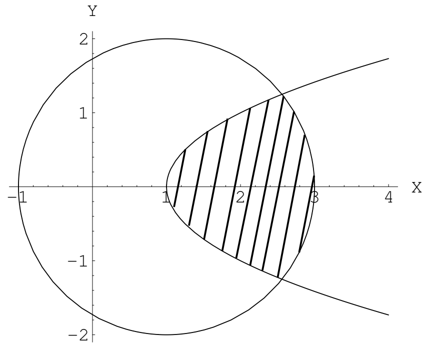
(ii) Décrire analytiquement l'ensemble suivant (les bords sont compris dans l'ensemble)



Solution. (i) On a

$$x^2 - 2x + y^2 = 3 \;\Leftrightarrow\; x^2 - 2x + 1 + y^2 = 4 \Leftrightarrow\; (x-1)^2 + y^2 = 4$$

et l'équation $x = 1 + y^2$ est celle de la parabole d'axe X, de sommet de coordonnées $(1, 0)$ et qui passe par le point de coordonnées $(2, 1)$. L'ensemble donné est donc constitué des points situés à la fois "à l'intérieur" du cercle centré en $(1, 0)$, de rayon 2 et "à l'intérieur" de la parabole d'équation $x = 1 + y^2$. On a la représentation suivante (les bords sont compris dans l'ensemble)



(ii) Cet exercice a été résolu au cours d'une répétition de fin septembre-début octobre 2006.

Question 3. Primitiver les fonctions f et g suivantes, en spécifiant chaque fois l'intervalle sur lequel vous travaillez.

$$f : x \mapsto \frac{1}{x^2 - 3x + 2}, \quad g : x \mapsto \ln x.$$

Solution. Comme on a $x^2 - 3x + 2 = (x-1)\ (x-2)$, la fonction f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$, donc primitivable sur $]-\infty, 1[$, $]1, 2[$, $]2, +\infty[$; de plus,

$$f(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$$

et

$$\int f(x)dx \;=\; \int \frac{1}{x-2}dx - \int \frac{1}{x-1}dx \simeq \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|$$

sur $]-\infty, 1[$ (resp. $]1, 2[$, $]2, +\infty[$).

La fonction g est continue sur $]0, +\infty[$ donc y est primitivable; la régularité de g permet une primitivation par parties immédiate

$$\int \ln x\ dx = \int Dx\ \ \ln x\ dx \;=\; x \ln x \;-\int 1dx \;\simeq\; x \ln x \;-\; x, \quad x \in]0, +\infty[.$$

Question 4. Déterminer l'approximation polynomiale aux ordres $1, 2$ en 0 de la fonction $f(x) = \sqrt{1+x},\ x \geq -1$.

Dans le même repère orthonormé et en justifiant celles-ci, déterminer les représentations graphiques de f et ses approximations à l'ordre 1, 2; utiliser différentes couleurs pour les différents graphiques.

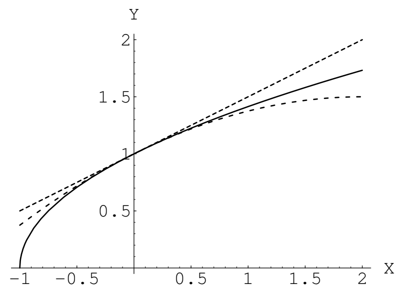
Solution. La fonction donnée est indéfiniment continûment dérivable sur $]-1, +\infty[$ et on a

$$Df(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}, \quad D^2 f(x) = -\frac{1}{4(1+x)\sqrt{1+x}}, \quad x > -1.$$

Les approximations demandées sont donc

$$P_1(x) = f(0) + xDf(0) = 1 + \frac{x}{2}, \quad P_2(x) = P_1(x) + \frac{x^2}{2}D^2f(0) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}.$$

Une représentation graphique est la suivante (la fonction est représentée en traits pleins et les approximations en traits pointillés; la droite tangente est la représentation de l'approximation d'ordre 1; la représentation de l'approximation d'ordre 2 est une parabole)



Question 5. Démontrer la propriété suivante: ***Si une fonction dérivable dans un intervalle ouvert de*** $\mathbb{R}$ ***admet un maximum en un point*** x_0 ***de cet intervalle, alors la dérivée en ce point est nulle.***

Solution. Voir notes de cours.

$\boxed{\text{Autres questions}}$ (1er bachelier en géographie, informatique)

Question 1. Si elles existent, déterminer les limites suivantes

$$\lim_{x\to-\infty} \ln\left(-\frac{1}{x}\right), \quad \lim_{x\to+\infty} x\left(\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Solution. Pour la première limite: voir l'examen des biologistes.

Cas de la seconde limite: la fonction $x \mapsto x\left(\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}\right)$ est définie sur $\mathbb{R}$; la question posée a donc un sens. Cela étant, un passage direct à la limite donne une forme indéterminée car $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$ donc $\lim_{x\to+\infty} x\left(\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}\right) ='' 0 \,.\, \infty''$. Si on écrit

$$x\left(\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}}$$

la forme indéterminée est $''\frac{0}{0}''$ et autorise un recours au théorème de l'Hospital. On a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{D(\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2})}{D(\frac{1}{x})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2}{1+x^2} = -1$$

donc finalement

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{D(\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2})}{D(\frac{1}{x})} = -1.$$

Questions 2, 3, 4: voir l'examen des biologistes.

Question 5. Si elle converge, déterminer la somme de la série suivante

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^m.$$

Solution. La série donnée est une série géométrique; sa raison est $\frac{2}{3}$; elle est donc convergente et sa somme est

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^m = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3.$$

Question 6. Démontrer la propriété suivante: ***Si une fonction dérivable dans un intervalle ouvert de*** $\mathbb{R}$ ***admet un maximum en un point*** x_0 ***de cet intervalle, alors la dérivée en ce point est nulle.***

Solution. Voir notes de cours.

Solution. 1.1) Le système d'équations

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x - z = 1 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases}$$

a pour solution $x = y = 3/4, z = -1/4$; cela signifie que la droite et le plan ont pour intersection le point de coordonnées $(3/4, 3/4, -1/4)$. En particulier, la distance entre la droite et le plan est nulle.

1.2) La distance entre le point P_0 et le plan π est

$$\frac{|1 + 0 - 2 - 1|}{\sqrt{1 + 1 + 4}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

1.3) Un vecteur directeur de d a pour composantes $(1, 1, 1)$; d_0 a donc pour équations cartésiennes

$$x - 1 = y = z + 1.$$

1.4) Cherchons deux vecteurs directeurs linéairement indépendants du plan π. On cherche donc des vecteurs dont les composantes x, y, z vérifient l'équation

$$x + y + 2z = 0.$$

On voit directement que les vecteurs de composantes $(2, 0, -1)$ et $(0, 2, -1)$ conviennent. D'autre part, on trouve également directement que le point de coordonnées cartésiennes $(1, 0, 0)$ est un point du plan. Il s'ensuit que des équations paramétriques cartésiennes du plan sont fournies par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad r, s \in \mathbb{R}.$$

Question 1) Déterminer toutes les solutions de l'équation

$$4D^2f(x) - Df(x) = x + 1.$$

Solution. Cette question est en fait celle de l'interrogation des biologistes de mars 2006.

Résolvons l'équation homogène $4D^2f(x) - Df(x) = 0$. Son polynôme caractéristique est $P(z) = 4z^2 - z = z(4z - 1)$, lequel a pour zéros les nombres $0, 1/4$. Il s'ensuit que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$c + c'e^{x/4},\ x \in \mathbb{R}$$

où c, c' sont des constantes complexes arbitraires.

Le second membre de l'équation de départ est une exponentielle polynôme $g(x) = x + 1 = (x + 1)e^{0x}$. Comme 0 est zéro de multiplicité 1 de l'équation caractéristique, on sait qu'une solution particulière est de la forme

$$f(x) = (ax + b)x$$

où a, b sont des constantes à déterminer. On a

$$f(x) = ax^2 + bx,\ Df(x) = 2ax + b,\ D^2f(x) = 2a$$

donc

$$4D^2f(x) - Df(x) = 8a - 2ax - b = x + 1 \ \Leftrightarrow\ -2a = 1\text{et } 8a - b = 1.$$

Cela fournit

$$a = -\frac{1}{2}, \qquad b = -5.$$

Une solution particulière est donc $f(x) = -\frac{x}{2}(x + 10)$ et les solutions de l'équation de départ sont les fonctions

$$-\frac{x}{2}(x + 10) + c + c'e^{x/4},\ x \in \mathbb{R}$$

où c, c' sont des constantes complexes arbitraires.

Question 2) Calculer

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\ dx, \qquad \int_2^4 \frac{\ln x}{x} dx$$

et simplifier la réponse au maximum.

Solution. Voir l'interrogation de mars 2006.

Question 3) 3.1) On donne

$$g(x, y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right).$$

- Où la fonction g est-elle continûment dérivable?
- Dans l'ensemble déterminé au point précédent et en simplifiant au maximum, déterminer l'expression explicite de

$$xD_xg(x, y) + yD_yg(x, y).$$

3.2) - Déterminer dans quel ensemble la fonction f de deux variables réelles suivante est continûment dérivable

$$f(x, y) = \arcsin\left(x^2 + 4y^2\right)$$

- Représenter graphiquement cet ensemble (en le hachurant).
- On définit F par

$$F(t) = f\left(\frac{1 - t}{2}, \frac{\sqrt{t}}{2}\right).$$

Déterminer l'expression explicite de F, son domaine de dérivabilité et l'expression explicite de sa dérivée première.

Solution. 3.1) Comme la fonction arctg est indéfiniment continûment dérivable dans $\mathbb{R}$, la fonction g est indéfiniment continûment dérivable dans

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ y\neq 0\};$$

dans cet ensemble, on a

$$D_xg(x,y)=\frac{1/y}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}=\frac{y}{x^2+y^2},\qquad D_yg(x,y)=\frac{-x/y^2}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}=\frac{-x}{x^2+y^2}.$$

Il s'ensuit que

$$xD_xg(x,y)+yD_yg(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}-\frac{xy}{x^2+y^2}=0.$$

3.2) - Pour les deux premiers items de la question: voir l'interrogation de mars 2006.
- Partie concernant la fonction F (troisième item).
On a

$$\left(\frac{1-t}{2}\right)^2+4\left(\frac{\sqrt{t}}{2}\right)^2=\frac{1-2t+t^2+4t}{4}=\frac{(1+t)^2}{4}.$$

Dès lors

$$F(t)=\arcsin\left(\frac{(1+t)^2}{4}\right).$$

Comme arcsin est dérivable dans $]-1,1[$, le domaine de dérivabilité de F est

$$\left\{t\in\mathbb{R}\ :\ -1<\frac{(1+t)^2}{4}<1\right\}=\{t\in\mathbb{R}\ :\ |t+1|<2\}=]-3,1[.$$

Dans cet ensemble, on a

$$DF(t)=(D\arcsin X)_{X=\frac{(1+t)^2}{4}}\ \frac{1+t}{2}=2\frac{1+t}{\sqrt{16-(1+t)^4}}.$$

Question 4) a) On donne les réels $x_0=1,\ x_m=m+\frac{1}{m}\ (m=1,2,3),\ x_4=4$. Rappeler la définition de la largeur d'un découpage de l'intervalle $[1,4]$ et utiliser celle-ci pour calculer la largeur du découpage donné.

b) On donne f explicitement par

$$f(x,y)=x^3+y^3,\quad x,y\in\mathbb{R}.$$

En appliquant la définition des dérivées, montrer que la dérivée partielle par rapport à la seconde variable de cette fonction au point $(-1,1)$ est égale à 3.

Solution. a) Définition de la largeur d'un découpage: voir cours.
Si $x_0=1,x_1=2,x_2=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2},x_3=3+\frac{1}{3}=\frac{10}{3},x_4=4$, on a

$$x_1-x_0=1,\ x_2-x_1=\frac{1}{2},\ x_3-x_2=\frac{10}{3}-\frac{5}{2}=\frac{5}{6},\ x_4-x_3=\frac{2}{3}$$

donc

$$\text{largeur}=\sup\{1,\frac{1}{2},\frac{5}{6},\frac{2}{3}\}=1.$$

b) Voir l'interrogation des chimistes de mars 2006.

Mathématiques générales — Interrogation du 02 mars 2007

1ere année de bachelier en informatique

Question 1) Déterminer toutes les solutions de l'équation

$$4D^2f(x) + 4Df(x) + f(x) = 1 + e^{-x/2}.$$

Solution. Le polynôme caractéristique de cette équation est $4z^2 + 4z + 1 = (2z + 1)^2$, lequel a pour zéro double le nombre $-\frac{1}{2}$. Il s'ensuit que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$(cx + c')e^{-x/2}, \ x \in \mathbb{R}$$

où c, c' sont des constantes arbitraires.

On voit immédiatement qu'une solution particulière de l'équation $4D^2f(x) + 4Df(x) + f(x) = 1$ est la fonction constante 1.

Cherchons alors une solution particulière de l'équation $4D^2f(x)+4Df(x)+f(x) = e^{-x/2}$. Vu la forme du second membre, on sait qu'il existe une solution particulière du type

$$f(x) = a\ x^2\ e^{-x/2}$$

(où a est une constante à déterminer) car $-1/2$ est zéro double du polynôme caractéristique. On a successivement

$$Df(x) = a\left(2x - \frac{x^2}{2}\right)e^{-x/2}, \quad D^2f(x) = a\left(2 - 2x + \frac{x^2}{4}\right)e^{-x/2}$$

$$4D^2f(x) + 4Df(x) + f(x) = \left(4a(2 - 2x + \frac{x^2}{4}) + 4a(2x - \frac{x^2}{2}) + ax^2\right)\ e^{x/2} = 8ae^{-x/2}.$$

Dès lors

$$4D^2f(x) + 4Df(x) + f(x) = e^{-x/2} \ \Leftrightarrow \ 8a = 1.$$

Une solution particulière de l'équation $4D^2f(x) + 4Df(x) + f(x) = e^{-x/2}$ est donc la fonction

$$\frac{x^2}{8}\ e^{-x/2}, \ x \in \mathbb{R}.$$

En conclusion, les solutions de l'équation de départ sont les fonctions

$$1 + \frac{x^2}{8}\ e^{-x/2} + (cx + c')e^{-x/2}, \ x \in \mathbb{R}$$

où c, c' sont des constantes arbitraires.

Question 2) On donne

$$f(x) = \frac{x}{1 + x^2}, \quad g(x) = \frac{x}{1 + x^4}, \quad h(x) = xe^{-x/2}, \quad x \in [0, +\infty[.$$

- Ces fonctions sont-elles intégrables sur $[0, +\infty[$? Pourquoi?
- Calculer alors l'intégrale des fonctions intégrables.

Solution. La fonction f, continue sur $[0, +\infty[$, n'est pas intégrable sur cet intervalle car elle y est positive et la limite suivante existe et est infinie

$$\int_0^t f(x)dx = \frac{\ln(1 + t^2)}{2} \ \to\ +\infty \quad \text{si } t \to +\infty.$$

La fonction g est intégrable sur $[0, +\infty[$ car elle y est continue, positive et

$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^t g(x)dx = \lim_{t\to+\infty} \frac{\operatorname{arctg} t^2}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

L'intégrale de g sur l'intervalle est égale à cette limite, donc à $\frac{\pi}{4}$.
La fonction h est intégrable sur $[0, +\infty[$ car elle y est continue, positive et la limite suivante existe et est finie

$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^t xe^{-x/2}dx = \lim_{t\to+\infty} \left(\left[-2xe^{-x/2}\right]_0^t + 2\int_0^t e^{-x/2}dx\right) = \lim_{t\to+\infty} \left(-2te^{-t/2} - 4\ (e^{-t/2} - 1)\right) = 4.$$

L'intégrale de h sur l'intervalle est égale à cette limite, donc à 4.

Question 3) On donne une fonction f, continûment dérivable sur $]\frac{1}{2},2[\times]-1,1[$ et on définit

$$F(t)=f\left(\frac{t}{t+1},\frac{t+1}{t}\right).$$

- Déterminer l'ensemble où la fonction F est dérivable.
- Sachant que

$$D_xf(x,y)=-\frac{y}{x^2},\quad D_yf(x,y)=\frac{1}{x}$$

déterminer explicitement la dérivée première de F; que peut-on en déduire en ce qui concerne les valeurs de F sur son domaine de dérivabilité?

Solution. Premier item. La fonction F est dérivable dans

$$\left\{t\in\mathbb{R}\ :\ t\neq 0, t\neq -1,\ \frac{1}{2}<\frac{t}{t+1}<2,\ -1<\frac{t+1}{t}<1\right\}.$$

Comme $\frac{1}{2}<\frac{t}{t+1}<2$ si et seulement si $t\in]-\infty,-2[\cup]1,+\infty[$ et comme $-1<\frac{t+1}{t}<1$ si et seulement si $t<-\frac{1}{2}$, on trouve finalement que F est dérivable dans

$$\Big(\ ]-\infty,-2[\cup]1,+\infty[\Big)\cap\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right[=]-\infty,-2[.$$

Second item. On a

$$(D_xf)\left(\frac{t}{t+1},\frac{t+1}{t}\right)=-\frac{(t+1)^3}{t^3},\quad (D_yf)\left(\frac{t}{t+1},\frac{t+1}{t}\right)=\frac{t+1}{t}$$

et

$$D\frac{t}{t+1}=\frac{1}{(t+1)^2},\quad D\frac{t+1}{t}=-\frac{1}{t^2};$$

dès lors

$$\begin{aligned}DF(t)&=(D_xf)\left(\frac{t}{t+1},\frac{t+1}{t}\right)D\frac{t}{t+1}\ +\ (D_yf)\left(\frac{t}{t+1},\frac{t+1}{t}\right)D\frac{t+1}{t}\\&=-\frac{t+1}{t^3}-\frac{t+1}{t^3}=-2\ \frac{t+1}{t^3}.\end{aligned}$$

La dérivée est donc toujours strictement négative sur $]-\infty,-2[$. Il s'ensuit que F est strictement décroissant sur cet intervalle donc vérifie

$$\lim_{s\to-\infty}F(s)=\lim_{y\to1}f(1,y)<F(t)<\lim_{s\to-2}F(s)=\lim_{x\to2}f(x,\frac{1}{2})$$

Remarque. Si on considère[1] que l'on a $D_xf(x,y)=\frac{y}{x^2}$ on trouve

$$DF(t)=\frac{t+1}{t^3}-\frac{t+1}{t^3}=0$$

dont F est constant sur $]-\infty,-2[$.

Question 4) a) On considère l'intervalle $I=[-1,2]$. L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse? Justifier votre réponse.

En augmentant le nombre de points d'un découpage de I,
on diminue toujours la largeur du découpage.

b) L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse? Justifier votre réponse.

Pour diminuer la largeur d'un découpage de I,
il est nécessaire d'augmenter le nombre de points du découpage.

[1] une telle fonction f ne peut cependant pas exister car elle serait de classe C_2 mais ne vérifierait pas l'égalité des dérivées croisées

c) On donne les réels $x_0 = -1, x_1 = -\frac{1}{3}, x_2 = -\frac{1}{4}, x_3 = \frac{1}{4}, x_4 = 1, x_5 = 2$. Que vaut la largeur du découpage de I déterminé par ces réels?

d) On donne f explicitement par

$$f(x,y) = y^2 + 2xy, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

En appliquant la définition des dérivées, montrer que la dérivée partielle par rapport à la seconde variable de cette fonction au point $(1,2)$ est égale à 6.

Solution. a) Faux. Par exemple, pour l'intervalle $[0,4]$, les points $0,2,4$ en constituent un découpage dont la largeur vaut 2; les quatre points $0,1,2,4$ en constituent un découpage dont la largeur vaut également 2. On peut aussi considérer le découpage formé par les quatre points $0,1/2,1,4$; dans ce cas la largeur est strictement plus grande que la précédente (elle vaut 3).

b) C'est faux. Pour le justifier, on donne l'exemple de deux découpages de $[0,5]$, le second ayant une largeur (strictement) inférieure à celle du premier et le nombre de points du second étant strictement plus petit que le nombre de points du premier: le découpage $0,1,2,5$ (quatre points) de l'intervalle $[0,5]$ a pour largeur 3 et le découpage $0,5/2,5$ (trois points) a pour largeur $5/2(<3)$.

c,d): Voir l'interrogation de mars 2006.

Question 1) Déterminer toutes les solutions de l'équation

$$D^2 f(x) - f(x) = x + 1.$$

Solution. Le polynôme caractéristique est $z^2 - 1 = (z-1)(z+1)$; il a donc pour zéros 1 et -1. Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions

$$ce^x + c'e^{-x}, \ x \in \mathbb{R}$$

où c, c' sont des constantes arbitraires.

On voit aussi immédiatement que la fonction f définie par $f(x) = -x - 1$ vérifie l'équation.

En conclusion, les fonctions qui vérifient l'équation de départ sont les fonctions

$$ce^x + c'e^{-x} - x - 1, \ x \in \mathbb{R}$$

où c, c' sont des constantes arbitraires.

Question 2) Déterminer les intégrales suivantes

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{1-4x^2} dx, \qquad \int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin^2 x \ dx$$

en simplifiant la réponse au maximum.

Solution. La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1-4x^2}$ est intégrable sur l'intervalle $[1, +\infty[$ car elle y est continue et $\lim_{x\to+\infty} x^2 f(x)$ existe et est fini (cette limite vaut en effet $-\frac{1}{4}$). Cela étant, on a

$$\frac{1}{1-4x^2} = \frac{1}{(1-2x)(1+2x)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+2x} - \frac{1}{2x-1}\right) = \frac{1}{4} D \ln\left(\frac{1+2x}{2x-1}\right), \ x > \frac{1}{2}.$$

Une intégration par variation de primitive conduit à

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{1-4x^2} dx = \frac{1}{4} \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{1+2x}{2x-1}\right) - \frac{1}{4} \lim_{x\to1} \ln\left(\frac{1+2x}{2x-1}\right) = -\frac{\ln 3}{4}.$$

La fonction $g : x \mapsto \sin^2 x$ est continue donc intégrable sur l'intervalle fermé borné $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$. Cela étant, comme $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$, on a

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin^2 x \ dx = \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{\pi/2} (1 - \cos(2x)) \ dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{4} \int_{\pi/6}^{\pi/2} D \sin(2x) \ dx = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{4}\left(\sin \pi - \sin(\frac{\pi}{3})\right) = \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

Question 3) (3.1) On donne

$$g(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}}.$$

- Où la fonction g est-elle continûment dérivable?
- Montrer que dans l'ensemble déterminé au point précédent, la fonction g vérifie l'équation

$$D_x(xg) + D_y(yg) = g.$$

(3.2) - Déterminer dans quel ensemble la fonction de deux variables suivante (notée f) est continûment dérivable

$$f(x, y) = \ln\left(16 - 4x^2 + 4y^2\right)$$

et représenter graphiquement ce domaine (en le hachurant).
- Déterminer l'expression explicite de la fonction F définie par

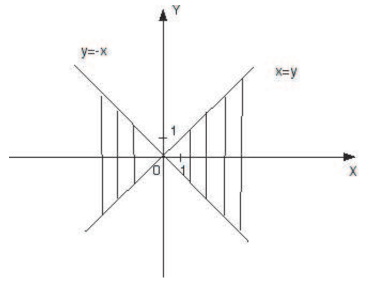
$$F(t) = f(t - 1, t + 1).$$

- Déterminer le domaine de dérivabilité et l'expression explicite de la dérivée de F.

Solution. (3.1) La fonction g est continûment dérivable sur l'ensemble

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 - y^2 > 0\right\} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |x| > |y|\right\}$$

dont la représentation graphique est (les points des droites d'équation $x + y = 0$ et $x - y = 0$ n'étant pas repris dans l'ensemble)



Cela étant, on a $g(x,y)=(x^2-y^2)^{-1/2}$ et

$$D_xg=-\frac{1}{2}\ 2x\ g^3=-xg^3,\quad D_yg=-\frac{1}{2}\ (-2y)\ g^3=yg^3$$

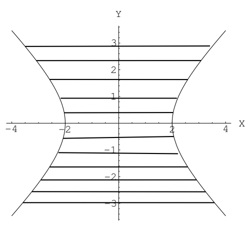
donc

$$D_x(xg)+D_y(yg)=g+xD_xg+g+yD_yg=2g-x^2g^3+y^2g^3=2g-(x^2-y^2)g^3=2g-g^{-2}g^3=g.$$

(3.2) La fonction est continûment dérivable dans

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ 4>x^2-y^2\}$$

qui est une surface du plan délimitée par l'hyperbole d'équation cartésienne $x^2-y^2=4$ (les points de cette hyperbole n'étant pas compris dans l'ensemble).



L'expression explicite de F est

$$F(t)=\ln\left(16-4(t-1)^2+4(t+1)^2\right)=\ln\left(16-4t^2+8t-4+4t^2+8t+4\right)=\ln(16+16t)=4\ln 2+\ln(t+1)$$

La fonction F est dérivable dans $]-1,+\infty[$ et

$$DF(t)=D\ln(t+1)=\frac{1}{t+1},\quad t>-1.$$

Question 4) a) Si on diminue le nombre de points d'un découpage d'un intervalle, on augmente toujours la largeur du découpage. Vrai □ Faux□.

b) On donne les réels $x_m=\frac{m^2}{8}$ $(m=0,1,2,3,4)$. Sur la droite réelle, représenter le découpage de l'intervalle $[0,2]$ qu'ils constituent. Rappeler la définition de la largeur d'un découpage de l'intervalle $[0,2]$ et utiliser celle-ci pour calculer la largeur du découpage donné.

c) On donne f explicitement par

$$f(x,y)=y^2+2xy,\quad x,y\in\mathbb{R}.$$

En appliquant la définition des dérivées, montrer que la dérivée partielle par rapport à la seconde variable de cette fonction au point $(1,2)$ est égale à 6.

Solution. a) Faux: considérer par exemple le découpage $0,1,2,4$ (4 points) de $[0,4]$ dont la largeur vaut 2 et le découpage $0,2,4$ (trois points) du même intervalle dont la largeur vaut 2 également.

b) Cf l'interrogation de mars 2006 des géologues.

c) Question tout à fait analogue à celle des géologues de mars 2006.

Question 1) Déterminer toutes les solutions de l'équation

$$4D^2f(x) = x + 1.$$

Solution. Les solutions de l'équation homogène $4D^2f = 0$ sont les polynômes

$$cx + c', \ x \in \mathbb{R}$$

où c, c' sont des constantes arbitraires.

Vu la forme du second membre, une solution particulière a la forme

$$f(x) = (ax + b)x^2$$

où a, b sont des constantes à déterminer. On a $D^2f(x) = 2(ax + b) + 4ax = 6ax + 2b$ donc

$$4D^2f(x) = x + 1 \ \Leftrightarrow \ 24ax + 8b = x + 1 \ \Leftrightarrow a = 1/24 \text{ et } b = 1/8.$$

Il s'ensuit que les solutions de l'équation de départ sont les fonctions

$$cx + c' + \frac{x^2}{24}(x + 3), \ x \in \mathbb{R}$$

où c, c' sont des constantes arbitraires.

Question 2) Calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + 9x^2}\, dx, \qquad \int_{\pi/6}^{\pi/3} \sin x \ \cos x \ dx$$

et simplifier la réponse au maximum.

Solution. La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1+9x^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ car elle y est continue, positive et car la limite suivante existe et est finie

$$\lim_{t \to +\infty} \int_0^t f(x)dx = \frac{1}{3} \lim_{t \to +\infty} \operatorname{arctg}(3t) = \frac{\pi}{6}.$$

L'intégrale de f sur l'intervalle est égale à cette limite, à savoir $\frac{\pi}{6}$.

La fonction $g : x \mapsto \sin x \cos x$ est continue sur l'intervalle fermé borné $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$; elle y est donc intégrable et on a directement

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \sin x \ \cos x \ dx = \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{\pi/3} D \sin^2 x \ dx = \frac{1}{2} \ \left(\sin^2(\frac{\pi}{3}) - \sin^2(\frac{\pi}{6})\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}.$$

Question 3) (3.1) On donne

$$g(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

- Où la fonction g est-elle deux fois continûment dérivable?
- Montrer que dans l'ensemble déterminé au point précédent, la fonction g vérifie

$$D_x^2 g + D_y^2 g = g^3.$$

(3.2) - Déterminer dans quel ensemble la fonction de deux variables suivante (notée f) est continûment dérivable

$$f(x, y) = \ln\left(16 - 4x^2 - 4y^2\right)$$

et représenter graphiquement ce domaine (en le hachurant).
- Déterminer l'expression explicite de la fonction F définie par

$$F(t) = f(t - 1, t + 1).$$

- Déterminer le domaine de dérivabilité et l'expression explicite de la dérivée de F.

Solution. (3.1) La fonction g est deux fois continûment dérivable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Dans cet ensemble, on a successivement

$$g(x,y) = (x^2+y^2)^{-1/2}, \quad D_x g = -xg^3,\ D_y g = -yg^3$$

$$D_x^2 g = -g^3 - 3xg^2 D_x g = -g^3 + 3x^2 g^5, \quad D_y^2 g = -g^3 - 3yg^2 D_y g = -g^3 + 3y^2 g^5$$

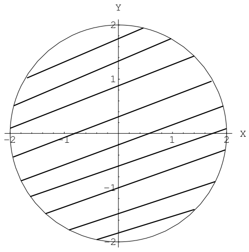
donc

$$D_x^2 g + D_y^2 g = -2g^3 + 3(x^2+y^2)g^5 = -2g^3 + 3g^{-2}g^5 = g^3.$$

(3.2) La fonction est continûment dérivable dans

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 4 > x^2 + y^2\}$$

qui est la surface intérieure au cercle (circonférence) d'équation cartésienne $x^2 + y^2 = 4$ (les points de cette circonférence n'étant pas compris dans l'ensemble).



L'expression explicite de F est

$$F(t) = \ln\left(16 - 4(t-1)^2 - 4(t+1)^2\right) = \ln\left(16 - 4t^2 + 8t - 4 - 4t^2 - 8t - 4\right) = \ln(8 - 8t^2) = 3\ln 2 + \ln(1-t^2)$$

La fonction F est dérivable dans $]-1,1[$ et, dans cet ensemble, on a

$$DF(t) = D\ln(1-t^2) = -2\frac{t}{1-t^2}.$$

Question 4) (i) On donne les réels $x_0 = -1, x_1 = -\frac{1}{3}, x_2 = -\frac{1}{4}, x_3 = \frac{1}{4}, x_4 = 1, x_5 = 2$. Que vaut la largeur du découpage de l'intervalle $[-1,2]$ déterminé par ces réels?
(ii) - Quand dit-on qu'une fonction f (de deux variables réelles) est dérivable par rapport à sa première variable au point (x_0,y_0) de son domaine de définition? Qu'appelle-t-on alors dérivée partielle de f par rapport à la première variable au point (x_0,y_0)?
- En appliquant ce qui précède à $f(x,y) = y^2 + 2xy$, montrer que la dérivée partielle de f par rapport à la première variable au point $(2,1)$ est égale à 2.

Solution. (i) Voir l'interrogation des informaticiens de mars 2006.

(ii) Voir notes cours et voir l'interrogation des informaticiens de mars 2006 (question tout à fait analogue).

Mathématiques générales **Correction de l"Ecrit 1", 21 mai 2007**

1er bachelier en biologie, chimie, géographie, géologie, philosophie

QCM

1. Le domaine de définition de la fonction f donnée par $f(x) = \ln(|x-1|)$ est
   $\mathbb{R}_0\square$ $]-\infty,0[\square$ $]0,+\infty[\square$ $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}\square$ $]0,1[\square$ aucune des réponses précédentes n'est correcte $\clubsuit$
2. La partie imaginaire du complexe $(1+i^3)i$ est
   $-1\square$ $0\square$ $1\clubsuit$ $-i\square$ $i\square$ aucune des réponses proposées n'est correcte$\square$
3. La limite $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sin(2x)}{x}$ vaut
   $-\infty\ \square$ $-2\ \square$ $0\ \clubsuit$ $2\ \square$ $+\infty\ \square$ aucune des réponses précédentes n'est correcte$\square$
4. Si le produit de deux réels est strictement plus grand que 1, alors au moins l'un d'entre eux est strictement plus grand que 1 Vrai $\square$ Faux$\clubsuit$

Autre version du QCM

1. Le domaine de définition de la fonction f donnée par $f(x) = \ln(x-x^2)$ est
   $\mathbb{R}_0\square$ $]-\infty,0[\square$ $]0,+\infty[\square$ $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}\square$ $]0,1[\clubsuit$ aucune des réponses précédentes n'est correcte $\square$
2. La partie imaginaire du complexe $(1-i^3)i^2$ est
   $-1\clubsuit$ $0\square$ $1\square$ $-i\square$ $i\square$ aucune des réponses proposées n'est correcte$\square$
3. La limite $\lim_{x\to-\infty}\frac{|1-x^2|}{|1+x^2|}$ vaut
   $-\infty\ \square$ $-1\ \square$ $0\ \square$ $1\ \clubsuit$ $+\infty\ \square$ aucune des réponses précédentes n'est correcte$\square$
4. Si la différence entre deux réels est strictement négative, alors le produit de ces deux réels est strictement négatif aussi
   Vrai $\square$ Faux$\clubsuit$

Autres questions

Question 1) Résoudre l'inéquation $|x| \leq x^2$ (x est une variable réelle).

Solution. Le réel 0 vérifie cette inégalité.

Si l'on considère uniquement des réels non nuls, comme $x^2 = |x|^2$, l'inégalité $|x| \leq x^2$ est alors équivalente à l'inégalité $1 \leq |x|$, laquelle a pour solution les réels de l'ensemble $]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$.

Finalement, l'ensemble des solutions de l'inéquation de départ est

$$\{0\}\cup]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[.$$

Question 2) (i) Déterminer le domaine de définition, de continuité et de dérivabilité de la fonction $f : x \mapsto \ln\left(\frac{1}{x}\right)$ ainsi que l'expression de sa dérivée.

(ii) Dans un même repère orthonormé, tracer le graphique de la fonction $x \in]0,+\infty[\mapsto \ln x$ et, A PARTIR DE celui-ci, tracer également le graphique de f.

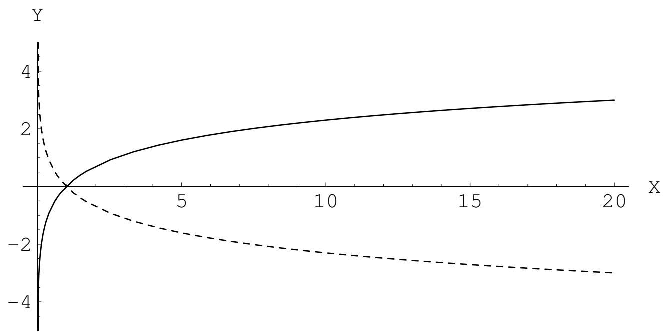
Solution. (i) et (ii) Comme les domaines de définition, de continuité et de dérivabilité de la fonction ln sont $]0,+\infty[$, les domaines respectifs de la fonction f sont également tous égaux à $]0,+\infty[$ et on a

$$f(x) = -\ln x, \qquad \forall x > 0$$

vu les propriétés de la fonction logarithme. Il s'ensuit directement que

$$Df(x) = -\frac{1}{x},\ x > 0$$

et que le graphique de f (en pointillé) est simplement le symétrique du graphique de ln par rapport à l'axe X.



Question 3) Primitiver les fonctions f et g suivantes, en spécifiant chaque fois l'intervalle sur lequel vous travaillez.

$$f : x \mapsto xe^{2x}, \quad g : x \mapsto \frac{x}{1+x^2}.$$

Solution. Les deux fonctions sont continues sur $\mathbb{R}$; elles y sont donc primitivables.

Une primitivation directe par parties donne

$$\int xe^{2x}dx = \frac{1}{2}\int xDe^{2x}dx = \frac{x}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx \simeq \frac{x}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pour g, c'est encore plus immédiat car $g = \frac{1}{2}D\ln(1+x^2),\ x \in \mathbb{R}$ donc

$$\int g(x)dx \simeq \frac{1}{2}\ln(1+x^2),\ x \in \mathbb{R}$$

Question 4) 4.1) Déterminer l'approximation polynomiale en 0 à l'ordre $1,2,3$ de la fonction $f(x) = \cos^2 x,\ x \in \mathbb{R}$.

4.2) Déterminer les représentations graphiques de f et de ces approximations (utiliser différentes couleurs).

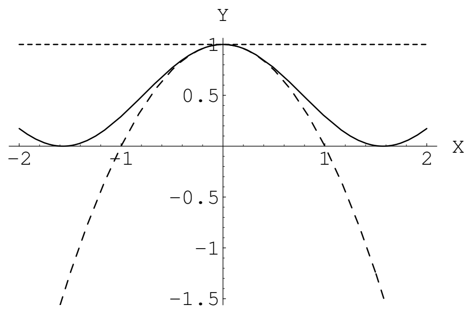
Solution. 4.1) La fonction donnée est indéfiniment continûment dérivable dans $\mathbb{R}$ donc on peut trouver ses approximations explicitement à partir des développements de Taylor. On a

$$Df(x) = -2\cos x \sin x = -\sin(2x), \quad D^2f(x) = -2\cos(2x), \quad D^3f(x) = 4\sin(2x), \quad x \in \mathbb{R}$$

Dès lors les approximations sont

$$P_1(x) = f(0) + xDf(0) = 1, \quad P_2(x) = P_1(x) + \frac{x^2}{2}D^2f(0) = 1 - x^2, \quad P_3f(x) = P_2f(x) + \frac{x^3}{6}D^3f(0) = P_2(x).$$

Les représentations de f et de P_1, P_2 sont les suivantes (dans le dessin ci-dessous, P_2 est la parabole et P_1 est la droite horizontale)



Mathématiques générales **Correction de l "Ecrit 2", 21 mai 2007**; durée: 2h00

1ère année de bachelier en biologie, chimie, géologie, géographie

Question 1) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $D^2f(x) + Df(x) - 2f(x) = 1 + e^x$.

Solution. Résolvons l'équation homogène $D^2f(x)+Df(x)-2f(x) = 0$. L'équation caractéristique est $z^2+z-2 = 0$; ses solutions sont $-2, 1$. Il s'ensuit que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$ce^x + c'e^{-2x},\ x \in \mathbb{R}$$

où c, c' sont des constantes complexes arbitraires.

On voit directement qu'une solution particulière de $D^2f(x) + Df(x) - 2f(x) = 1$ est la fonction constante $-\frac{1}{2}$.

Cherchons à présent une solution particulière de $D^2f(x) + Df(x) - 2f(x) = e^x$. Vu la forme du second membre et le fait que 1 est solution de l'équation caractéristique, une solution particulière a la forme $f(x) = Axe^x$ où A est une constante à déterminer. On a $Df(x) = Ae^x(1 + x)$ et $D^2f(x) = Ae^x(2 + x)$ donc

$$D^2f + Df - 2f = Ae^x(2 + x) + Ae^x(1 + x) - 2Axe^x = 3Ae^x$$

et

$$D^2f + Df - 2f = e^x \ \Leftrightarrow\ 3Ae^x = e^x \ \Leftrightarrow\ A = \frac{1}{3}.$$

Il s'ensuit que les solutions de l'équation de départ sont les fonctions

$$ce^x + c'e^{-2x} - \frac{1}{2} + \frac{x}{3}e^x,\ x \in \mathbb{R}$$

où c, c' sont des constantes complexes arbitraires.

Question 2) 2.1) On donne la fonction f par $f(x, y) = \ln(x^2 + y + 1)$.
- Déterminer le domaine de dérivabilité de cette fonction; représenter ce domaine dans un repère orthonormé (en le hachurant).
- Montrer que l'expression $xD_xf + 2(y + 1)D_yf$ est constante dans ce domaine; déterminer cette constante.

2.2) On donne la fonction g par $g(x, y) = \arcsin\left(\frac{x}{y}\right)$.
- Déterminer où cette fonction est continûment dérivable et représenter cet ensemble dans un repère orthonormé (en le hachurant).
- Déterminer l'expression explicite de $F(t) = g\left(t, \frac{1}{t}\right)$, le domaine de dérivablité de cette fonction et l'expression explicite de sa dérivée.

Solution. 2.1) La fonction f est dérivable dans $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ x^2 + y + 1 > 0\}$ qui est la description analytique de l'ensemble des points du plan situés "au-dessus" de la parabole d'équation $y = -x^2 - 1$, les points de cette parabole étant exclus.

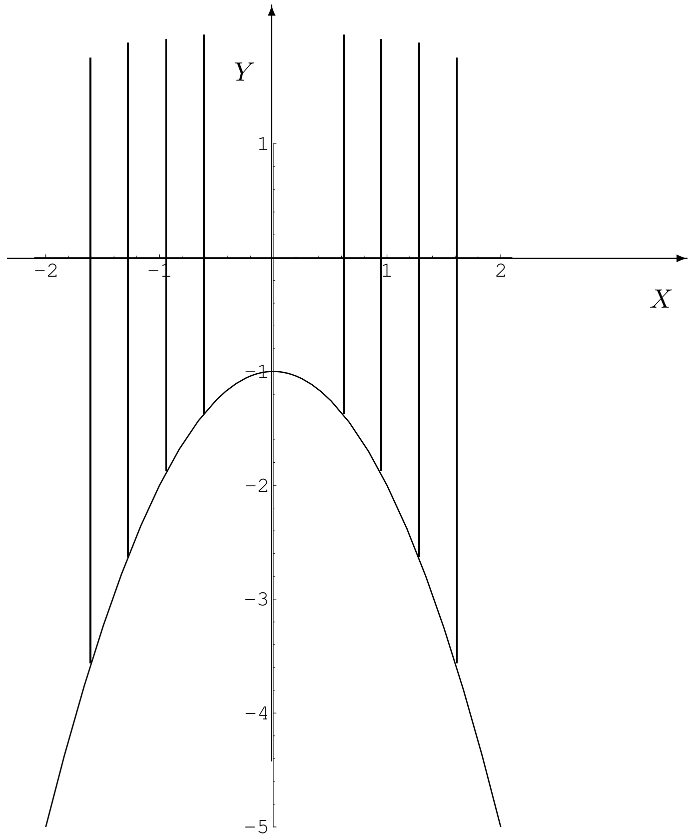
On a

$$D_xf(x, y) = \frac{2x}{x^2 + y + 1}, \quad D_yf(x, y) = \frac{1}{x^2 + y + 1}$$

donc

$$xD_xf + 2(y + 1)D_yf = 2\frac{x^2 + y + 1}{x^2 + y + 1} = 2$$

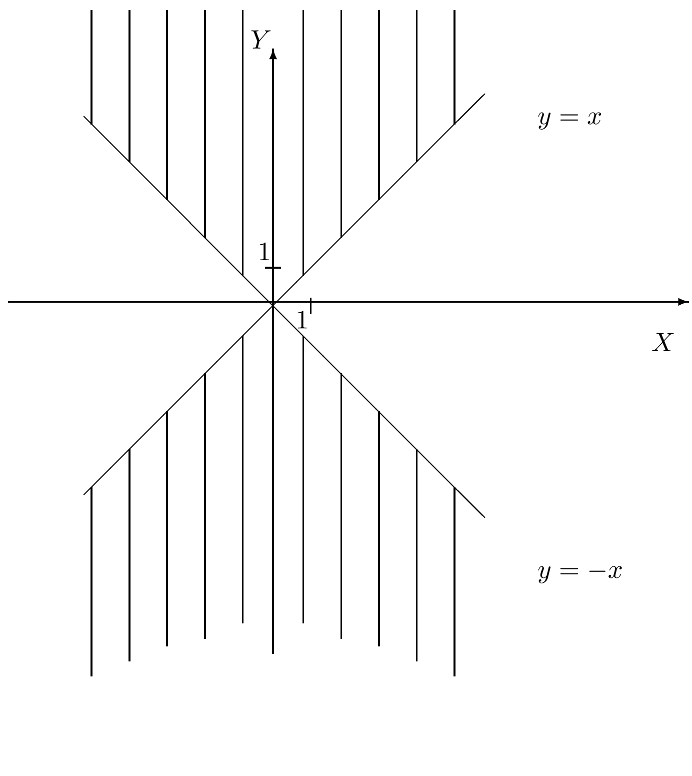
quel que soit $(x, y) \in \Omega$.



2.2) Comme arcsin est indéfiniment continûment dérivable dans $]-1,1[$, la fonction g est continûment dérivable dans

$$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ y\neq 0, \left|\frac{x}{y}\right|<1\right\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ |x|<|y|\}$$

qui se représnte par l'ensemble hachuré ci-dessous (les points des droites $x=y$ et $x=-y$ n'étant pas compris dans l'ensemble)



La fonction F est dérivable dans $\left\{t \in \mathbb{R} : t \neq 0, |t| < \frac{1}{|t|}\right\} =]-1,0[\cup]0,1[$ et $F(t) = \arcsin\left(\frac{t}{\frac{1}{t}}\right) = \arcsin(t^2)$,

$$DF(t) = \frac{2t}{\sqrt{1-t^4}},\ t \in]-1,0[\cup]0,1[$$

Question 3) 3.1) En justifiant vos démarches, déterminer (si possible) la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+1} dx$$

3.2) En justifiant vos démarches, déterminer (si possible) la valeur de l'intégrale de $f(x,y) = x^2\ \cos(xy)$ **sur** $A = \left[0, \frac{1}{2}\right] \times [0,\pi]$.

Solution. 3.1) On a

$$\frac{1}{x^2+2x+1} = \frac{1}{(x+1)^2} = -D\frac{1}{x+1},\ x \geq 0$$

et la fonction $f : x \in [0,+\infty[\mapsto \frac{1}{x^2+2x+1}$ est à valeurs positives. On a successivement

$$\int_0^t f(x)dx = -\int_0^t D\frac{1}{x+1}dx = 1 - \frac{1}{1+t}, \quad t > 0$$

et finalement

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t\to+\infty}\int_0^t f(x)dx = 1 - \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{1+t} = 1.$$

3.2) La fonction donnée est continue sur l'ensemble borné fermé A; elle y est donc intégrable et on peut calculer son intégrale en procédant dans n'importe quel ordre d'intégration à une variable. Vu la forme de la fonction, on voit qu'il est aisé d'intégrer par rapport à y; ainsi

$$\begin{aligned}
\int\int_A f(x,y)dxdy &= \int_0^{1/2}\left(\int_0^{\pi} x^2\cos(xy)dy\right)\ dx \\
&= \int_0^{1/2} x\left(\int_0^{\pi} D_y\sin(xy)\ dy\right)\ dx \\
&= \int_0^{1/2} x\sin(\pi x)\ dx \\
&= -\frac{1}{\pi}\int_0^{1/2} xD\cos(\pi x)\ dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{1/2}\cos(\pi x)\ dx \\
&= \frac{1}{\pi^2}.
\end{aligned}$$

Question 4) On donne les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad C = \begin{pmatrix} i & i-1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4.1) Déterminer (si possible) les matrices CA, C^*A.
4.2) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice A.
4.3) Si la matrice A est diagonalisable, en déterminer une forme diagonale ainsi qu'une matrice qui transforme A en celle-ci.
4.4) La matrice A est-elle inversible? Pourquoi? Dans le cas où elle est inversible, en déterminer l'inverse et vérifier que votre réponse est correcte.

Solution. 4.1) Il n'est pas possible d'effectuer le produit de C (de type 2×3) par A (de type 2×2); par contre, C^*A est possible et on a

$$C^*A = \begin{pmatrix} 3 & -i \\ 1 & -i-1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.2) Le déterminant caractéristique de A est

$$det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1;$$

les valeurs propres de A sont donc 1 et -1.

Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 1 sont les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que $(A - I)X = 0$, c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \ \Leftrightarrow x = y.$$

Les vecteurs cherchés sont donc

$$c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ c \in \mathbb{C}_0.$$

Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre -1 sont les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que $(A + I)X = 0$, c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \ \Leftrightarrow x = -y.$$

Les vecteurs cherchés sont donc

$$c\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ c \in \mathbb{C}_0.$$

4.3) La matrice est diagonalisable car elle est de dimension deux et elle possède deux vecteurs propres linéairement indépendants. On a (par exemple)

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

4.4) La matrice est inversible car son déterminant n'est pas nul; il vaut d'ailleurs -1. Cela étant, on a

$$A^{-1} = -1\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = A$$

et on vérifie que la réponse est correcte en calculant A^2:

$$A^2 = AA = I.$$

Mathématiques générales — Correction de l'"Ecrit 1", 29 mai 2007

1er bachelier en informatique

QCM

1. Le domaine de définition de la fonction f donnée par $f(x) = \ln(|x - x^2|)$ est
$\mathbb{R}_0\square$ $]-\infty, 0[\square$ $]0, +\infty[\square$ $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}\clubsuit$ $]0, 1[\square$ aucune des réponses précédentes n'est correcte $\square$

2. La partie imaginaire du conjugué du complexe $(1 + i^3)i$ est
$-1\clubsuit$ $0\square$ $1\square$ $-i\square$ $i\square$ aucune des réponses proposées n'est correcte$\square$

3. La limite $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{|x|-1}}$ vaut
$-\infty \square$ $-1 \square$ $0 \square$ $1 \clubsuit$ $+\infty \square$ aucune des réponses précédentes n'est correcte$\square$

4. Si le quotient de deux réels strictement positifs est strictement plus grand que 1, alors au moins l'un d'entre eux est strictement plus grand que 1 Vrai $\square$ Faux$\clubsuit$

Autres questions

Question 1) Résoudre l'inéquation $x^2 + |x| - 2 \leq 0$ (x est une variable réelle).

Solution. On a $x^2 + |x| - 2 = |x|^2 + |x| - 2 = (|x| - 1)\ (|x| + 2)$ donc

$$x^2 + |x| - 2 \leq 0 \ \Leftrightarrow\ |x| - 1 \leq 0 \ \Leftrightarrow\ x \in [-1, 1].$$

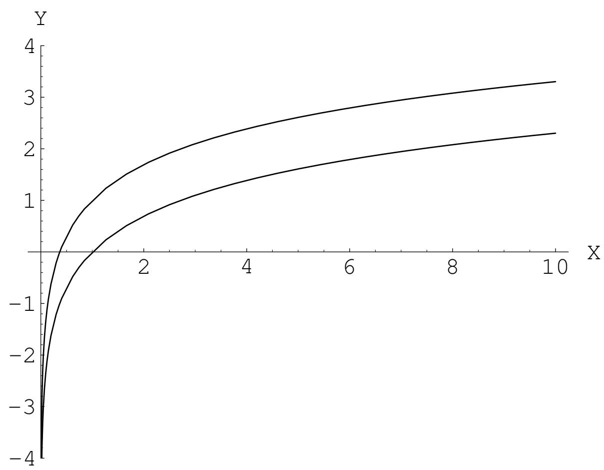
Les réels qui vérifient l'inégalité donnée sont donc ceux de l'intervalle $[-1, 1]$.

Question 2) (i) Déterminer le domaine de définition, de continuité et de dérivabilité de la fonction $f : x \mapsto \ln(ex)$ ainsi que l'expression de sa dérivée.

(ii) Dans un même repère orthonormé, tracer le graphique de la fonction $x \in]0, +\infty[\mapsto \ln x$ et, A PARTIR DE celui-ci, tracer également le graphique de f.

Solution. (i) Vu les propriétés du logarithme, la fonction donnée est définie, continue et dérivable sur $]0, +\infty[$ et s'écrit $f(x) = \ln e + \ln x = 1 + \ln x,\ x > 0$. Il s'ensuit que $Df(x) = D\ln x = \frac{1}{x},\ x > 0$.

(ii) Vu l'expression de f en fonction du logarithme, le graphique de f est simplement le dessin obtenu en translatant le graphique du logarithme d'une unité "vers le haut" (c'est-à-dire en translatant le graphique de ln d'une distance 1 dans la direction déterminée par l'axe Y).



Question 3) Primitiver les fonctions f et g suivantes, en spécifiant chaque fois l'intervalle sur lequel vous travaillez.

$$f : x \mapsto xe^{x^2}, \quad g : x \mapsto \frac{x^3}{1 - x^2}.$$

Solution. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, donc y est primitivable; une primitivation directe donne

$$\int f(x)dx \;=\; \frac{1}{2}\int De^{x^2}\,dx \;\simeq\; \frac{e^{x^2}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pour tout $x \notin \{-1,1\}$, on a

$$\frac{x^3}{1-x^2} = -x + \frac{x}{1-x^2} = \begin{cases} -x - \frac{1}{2}D\ln(1-x^2) & \text{si } |x|<1 \\ -x - \frac{1}{2}D\ln(x^2-1) & \text{si } |x|>1 \end{cases}$$

donc

$$\int g(x)\,dx \simeq \begin{cases} -\frac{1}{2}\left(x^2+\ln(1-x^2)\right) & \text{si } x\in]-1,1[\\ \\ -\frac{1}{2}\left(x^2+\ln(x^2-1)\right) & \text{si } x\in]-\infty,1[\text{ (resp. } x\in]1,+\infty[). \end{cases}$$

Question 4) 4.1) Déterminer l'approximation polynomiale en 0 à l'ordre $1,2,3$ de la fonction $f(x) = \sin x\cos x,\ x\in\mathbb{R}$.

4.2) Déterminer les représentations graphiques de f et de ces approximations (utiliser différentes couleurs).

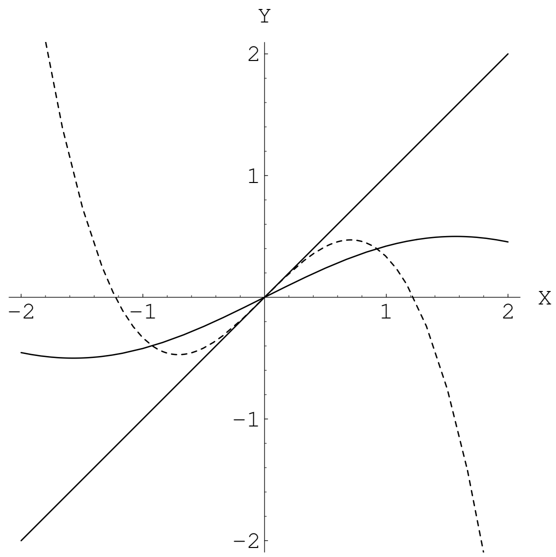
Solution. La fonction donnée s'écrit aussi $f(x) = \frac{\sin(2x)}{2}$, $x\in\mathbb{R}$, et elle est indéfiniment continûment dérivable sur $\mathbb{R}$. Dès lors, les approximations demandées existent et se calculent directement par les développements limités de Taylor. On a

$$Df(x) = \cos(2x), \quad D^2f(x) = -2\sin(2x), \quad D^3f(x) = -4\cos(2x)$$

donc

$$P_1(x) = f(0)+xDf(0) = x, \quad P_2(x) = P_1(x)+\frac{x^2}{2}D^2f(0) = P_1(x), \quad P_3(x) = P_2(x)+\frac{x^3}{3!}D^3f(0) = x-\frac{2}{3}x^3, \quad x\in\mathbb{R}.$$

Les représentations graphiques sont les suivantes (la droite d'équation $y = x$ est la représentation de P_1 et le graphique en pointillés est la représentation de P_3).



Mathématiques générales Correction de l' "Ecrit 2", 29 mai 2007

1ère année de bachelier en informatique

Question 1) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $D^2 f(x) + f(x) = x + e^x$.

Solution. Résolvons l'équation homogène $D^2 f(x) + f(x) = 0$. Le polynôme caractéristique est $z^2 + 1$; ses zéros sont i et $-i$; il s'ensuit que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$c \cos x + c' \sin x, \ x \in \mathbb{R}$$

où c, c' sont des constantes complexes arbitraires. Cet ensemble de fonctions peut encore s'écrire

$$ce^{ix} + c'e^{-ix}, \ x \in \mathbb{R}$$

où c, c' sont des constantes complexes arbitraires.

Cela étant, on voit directement qu'une solution particulière de l'équation $D^2 f(x) + f(x) = x$ est la fonction $x \mapsto x$ et qu'une solution particulière de $D^2 f(x) + f(x) = e^x$ est la fonction $x \mapsto \frac{1}{2}e^x$, toutes les deux définies sur $\mathbb{R}$.

Il s'ensuit que les solutions de l'équation de départ sont les fonctions

$$c \cos x + c' \sin x + x + \frac{1}{2}e^x, \ x \in \mathbb{R}$$

où c, c' sont des constantes complexes arbitraires.

Question 2) On donne la fonction f par

$$f(x, y) = \arcsin\left(x^2 + y - 1\right)$$

2.1) - Déterminer le domaine de dérivabilité de cette fonction et le représenter graphiquement dans un repère orthonormé (en le hachurant).

- Montrer que l'expression $D_x f - 2xD_y f$ est constante dans ce domaine; déterminer cette constante.

2.2) On définit F par

$$F(t) = f(1 + \cos t, \sin^2 t).$$

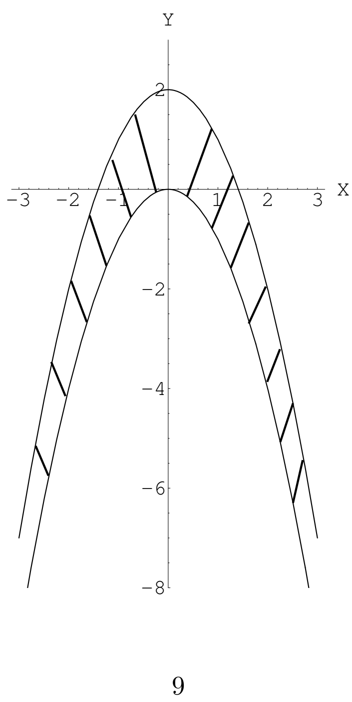
- Dans quelle partie de $[-\pi, \pi]$ cette fonction est-elle dérivable?

- Calculer explicitement la dérivée première de F.

Solution. 2.1) Comme la fonction arcsin est dérivable dans $]-1, 1[$ la fonction donnée est dérivable dans

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x^2 + y - 1 < 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -x^2 < y < 2 - x^2\}$$

qui est une description analytique de l'ensemble des points du plan situés "entre" les paraboles d'équation cartésienne $y = -x^2$ et $y = 2 - x^2$, les points de ces paraboles n'étant pas compris dans l'ensemble.



Dans le domaine de dérivabilité, on a

$$D_x f(x,y) = \frac{2x}{\sqrt{1-(x^2+y-1)^2}}, \quad D_y f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-(x^2+y-1)^2}}$$

donc

$$D_x f - 2x D_y f = 0.$$

2.2) Comme les fonctions sin et cos sont dérivables dans $\mathbb{R}$, la fonction F est dérivable dans

$$\{t \in \mathbb{R} : -1 < (1+\cos t)^2 + \sin^2 t - 1 < 1\} = \{t \in \mathbb{R} : -1 < 1 + 2\cos t < 1\} = \{t \in \mathbb{R} : -1 < \cos t < 0\}.$$

Si l'on conserve uniquement les réels de l'intervalle $[-\pi, \pi]$, on obtient que cette fonction est dérivable dans

$$\{t \in [-\pi,\pi] : -1 < \cos t < 0\} = \left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[\bigcup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[.$$

La fonction F a pour expression

$$F(t) = \arcsin(1 + 2\cos t)$$

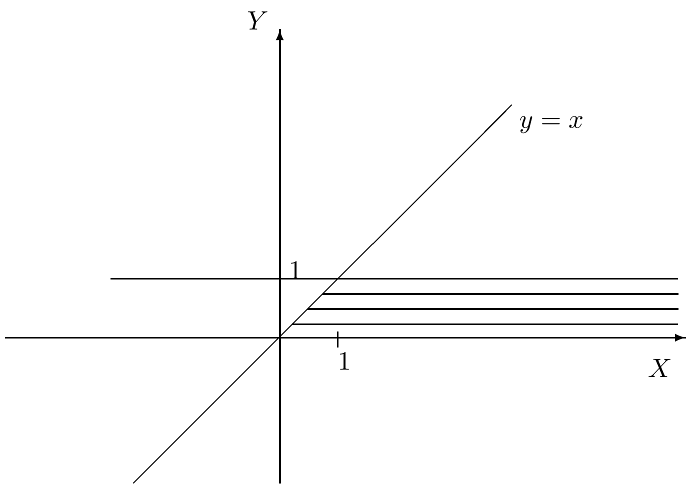
donc

$$DF(t) = \frac{-2\sin t}{\sqrt{1-(1+2\cos t)^2}} = \frac{-\sin t}{\sqrt{-\cos t}\sqrt{1+\cos t}}, \ t \in \left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[\bigcup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[.$$

Question 3) 3.1) On donne $f(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2)$.
- Cette fonction est-elle intégrable sur $]0, r]$? (r est un réel strictement positif). Pourquoi?
- Si la fonction est intégrable sur les intervalles considérés, déterminer $\int_0^r f(x)\ dx$ pour toutes les valeurs de $r > 0$.
- Donner une interprétation graphique de cette intégrale dans le cas $r = e$ et dans le cas $r = e^2$.
3.2) Soit A la partie du plan hachurée ci-dessous (ensemble fermé non borné) et soit la fonction de deux variables réelles f donnée explicitement par

$$f(x,y) = (x+y)e^{-(x-y)}.$$

Si f est intégrable sur A, déterminer son intégrale sur A. Justifier vos démarches et donner une représentation analytique de A.



Solution. 3.1) La fonction donnée s'écrit aussi $f(x) = \ln(|x|), x \neq 0$. Cette fonction est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; elle vérifie aussi $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} f(x) = 0$; il s'ensuit qu'elle est intégrable sur $]0, r]$ quel que soit le réel $r > 0$.

Cela étant, une intégration par parties fournit

$$\int_0^r f(x)dx = \int_0^r Dx\ \ \ln x\ dx = r\ln r - \int_0^r 1\ dx = r\ln r - r.$$

Dans le cas $r = e$, on a $\int_0^r f(x)dx = 0$. Comme la fonction ln est négative sur $]0,1]$ et postive sur $]1, e]$, cela signifie que l'aire de la surface du plan située au-dessus du graphique de $\ln x,\ x \in]0,1]$ et en dessous de l'axe X est égale à l'aire de la surface du plan située en dessous du graphique de $\ln x,\ x \in]1, e]$ et au-dessus de l'axe X.

Dans le cas $r = e^2$, on a $\int_0^r f(x)dx = e^2$. Comme la fonction ln est négative sur $]0,1]$ et postive sur $]1,e^2]$, cela signifie que l'aire de la surface du plan située en dessous du graphique de $\ln x,\ x \in]1,e^2]$ et au-dessus de l'axe X moins l'aire de la surface du plan située au-dessus du graphique de $\ln x,\ x \in]0,1]$ et en dessous de l'axe X est égale à e^2.

3.2) Une représentation analytique de A est donnée par

$$\{x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,1] \text{ et } x \geq y\}.$$

Comme $f(x,y) \geq 0$ quel que soit $(x,y) \in A$, la fonction f sera intégrable sur A si on parvient à intégrer dans un certain ordre; son intégrale est alors égale au nombre trouvé en intégrant dans n'importe quel ordre. Le calcul suivant donne donc à la fois l'intégrabilité de f sur A et la valeur de son intégrale.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left(\int_y^{+\infty} (x+y)e^{-(x-y)}dx \right) dy &= \int_0^1 e^y \left(\int_y^{+\infty} xe^{-x}dx \ + \ y \int_y^{+\infty} e^{-x}dx \right) dy \\
&= \int_0^1 e^y \left(ye^{-y} \ + e^{-y} \ + \ ye^{-y} \right) dy \\
&= \int_0^1 (2y+1)dy \\
&= 2.
\end{aligned}$$

Question 4) 4.1) Déterminer les valeurs propres de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -8 & 4 & -6 \\ 8 & 1 & 9 \end{pmatrix}.$$

4.2) Déterminer toutes les matrices qui commutent avec la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4.3) Parmi les matrices déterminées au point précédent, quelles sont celles dont les valeurs propres sont 0 et 1?

Solution. 4.1) Les valeurs propres de la matrice donnée, notée A, sont les zéros du polynôme (en λ) $det(A - \lambda I)$. On a

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ -8 & 4-\lambda & -6 \\ 8 & 1 & 9-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 4-\lambda & -6 \\ 1 & 9-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - 13\lambda + 42) = (1-\lambda)\ (\lambda-7)\ (\lambda-6).$$

Les valeurs propres de A sont donc les nombres $1, 6$ et 7.

4.2) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On doit déterminer les $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Le membre de droite de cette égalité est la matrice

$$\begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix}$$

et le membre de gauche est la matrice

$$\begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix}.$$

L'égalité entre ces deux matrices est donc équivalente au système

$$\begin{cases} b = -c \\ a = d \end{cases}$$

Les matrices répondant à la question sont donc les matrices

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

4.3) Le polynôme caractéristique d'une matrice quelconque trouvée au point précédent est le polynôme (en la variable λ) $(a-\lambda)^2 + b^2$. On doit donc déterminer $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tels que

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 0 \\ (a-1)^2 + b^2 = 0 \end{cases}$$

Les solutions de ce système sont les couples $\left(\frac{1}{2}, \frac{i}{2}\right)$ et $\left(\frac{1}{2}, -\frac{i}{2}\right)$.

Mathématiques générales **Correction de l'"Ecrit 1"** ; 21 août 2007

QCM

1. Le domaine de définition de la fonction f donnée par $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x} - 1\right)$ est
$\mathbb{R}_0\square$ $]-\infty, 0[\square$ $]0, +\infty[\square$ $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}\square$ $]0,1[\clubsuit$ aucune des réponses précédentes n'est correcte $\square$

2. La partie imaginaire du conjugué du complexe $(1+i^3)i$ est
$-1\clubsuit$ $0\square$ $1\square$ $-i\square$ $i\square$ aucune des réponses proposées n'est correcte$\square$

3. La limite $\lim_{x\to\pi/2} \frac{\sin x}{x}$ vaut
$-\infty$ $\square$ -2 $\square$ 0 $\square$ 2 $\square$ $+\infty$ $\square$ aucune des réponses précédentes n'est correcte$\clubsuit$

4. Si le produit de deux réels est plus petit ou égal à 1, chacun des deux réels est nécessairement plus petit ou égal à 1
Vrai $\square$ Faux$\clubsuit$

Autres questions

Question 1) 1.1) Résoudre l'inéquation $|x| \geq x^3$ (x est une variable réelle).
1.2) Résoudre l'équation $\sin(2x) = 1$ (x est une variable réelle).

Solution. 1.1) Le réel 0 est solution.

Si $x > 0$, l'inéquation est équivalente à $1 \geq x^2$; dans ce cas, les solutions sont les réels de l'intervalle $]0,1]$.

Si $x < 0$, l'inégalité $|x| \geq x^3$ est toujours vérifiée puisque le membre de droite est un réel négatif et que celui de gauche est un réel positif. Tous les réels négatifs sont donc solutions.

En regroupant, on trouve finalement que les solutions de l'équation sont les réels de l'intervalle

$$]-\infty, 1]$$

1.2) Les solutions de l'équation sont les réels x pour lesquels il existe un entier k tel que $2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, c'est-à-dire les réels

$$\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

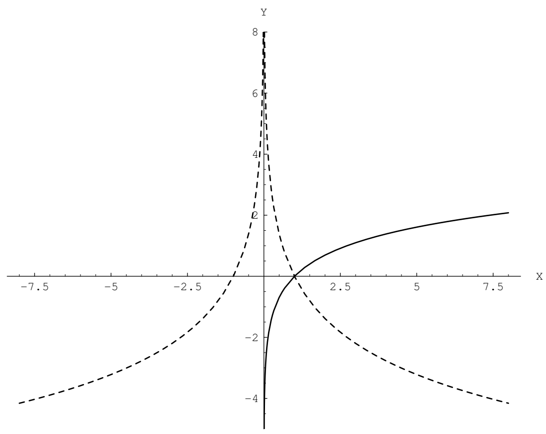
Question 2) (i) Déterminer le domaine de définition, de continuité et de dérivabilité de la fonction $f : x \mapsto \ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$ ainsi que l'expression de sa dérivée.

(ii) Dans un même repère orthonormé, tracer le graphique de la fonction $x \in]0, +\infty[\mapsto \ln x$ et, A PARTIR DE celui-ci, esquisser également le graphique de f.

Solution. (i) Comme le domaine de définition, de continuité et de dérivabilité de ln est $]0, +\infty[$, le domaine de définition, de continuité et de dérivabilité de f est $\mathbb{R}_0$. Remarquons alors que dans ce domaine, on a $f(x) = -2\ln(|x|)$ donc aussi

$$Df(x) = -2D\ln(|x|) = -\frac{2}{x}.$$

(ii) La fonction ln est représentée en trait continu et f en pointillé; pour $x > 0$, le graphique de f est obtenu directement à partir du ln et le graphique complet s'obtient par symétrie par rapport à l'axe Y puisque f est une fonction paire.



Question 3) Primitiver les fonctions f, g et h suivantes, en spécifiant chaque fois l'intervalle sur lequel vous travaillez.

$$f : x \mapsto x\cos x, \quad g : x \mapsto \frac{x^2}{1+x^2}, \quad h : x \mapsto \ln x.$$

Quelle est la primitive de f qui s'annule en π?

Solution.

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$; elle y est donc primitivable. Les propriétés des polynômes et des fonctions trigonométriques conduisent immédiatement à la solution par primitivation par parties:

$$\int f(x)dx = \int xD\sin x \; dx = x\sin x - \int \sin x \; dx \simeq x\sin x + \cos x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Cherchons alors la constante r telle que $\pi \sin\pi + \cos\pi + r = 0$; on obtient immédiatement $r = 1$. Dès lors, la primitive de f qui s'annule en π est la fonction

$$x\sin x + \cos x + 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$; elle y est donc primitivable. De plus, une décomposition en fractions simples donne tout de suite une primitive (primitivation directe):

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}dx = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx \simeq x - \operatorname{arctg} x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

La fonction h est continue sur $]0, +\infty[$; elle y est donc primitivable. De plus, une intégration directe par parties fournit

$$\int \ln x \; dx = \int Dx \;\; \ln x \; dx = x\ln x - \int 1 \; dx \simeq x\ln x - x, \quad x \in]0, +\infty[.$$

Question 4) Déterminer l'approximation polynomiale en 0 à l'ordre $1, 2$ de la fonction $f(x) = \sqrt{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Solution. La fonction donnée est indéfiniment continûment dérivable dans $\mathbb{R}$. Ses approximations polynomiales P_n à l'ordre n en 0 peuvent donc être calculées directement comme suit. On a

$$Df(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad D^2 f(x) = (1+x^2)^{-1/2} - x^2(1+x^2)^{-3/2}.$$

Il s'ensuit directement que

$$P_1(x) = f(0) + xDf(0) = 1, \quad P_2(x) = P_1(x) + \frac{x^2}{2}D^2 f(0) = 1 + \frac{x^2}{2}.$$

Question 1) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $D^2f(x) - Df(x) - 2f(x) = \sqrt{\pi} + e^x$.

Solution. Résolvons l'équation homogène $D^2f(x)-Df(x)-2f(x) = 0$. L'équation caractéristique est $z^2-z-2 = 0$; ses solutions sont $2, -1$. Il s'ensuit que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$ce^{-x} + c'e^{2x},\ x \in \mathbb{R}$$

où c, c' sont des constantes complexes arbitraires.

On voit directement qu'une solution particulière de $D^2f(x)-Df(x)-2f(x) = \sqrt{\pi}$ est la fonction constante $-\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Cherchons à présent une solution particulière de $D^2f(x) - Df(x) - 2f(x) = e^x$. Vu la forme du second membre et le fait que 1 n'est pas solution de l'équation caractéristique, une solution particulière a la forme $f(x) = Ae^x$ où A est une constante à déterminer. On a $Df(x) = D^2f(x) = Ae^x$ donc

$$D^2f - Df - 2f = -2Ae^x$$

et

$$D^2f + Df - 2f = e^x \ \Leftrightarrow\ -2Ae^x = e^x \ \Leftrightarrow\ A = -\frac{1}{2}.$$

Il s'ensuit que les solutions de l'équation de départ sont les fonctions

$$ce^{-x} + c'e^{2x} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{1}{2}e^x,\ x \in \mathbb{R}$$

où c, c' sont des constantes complexes arbitraires.

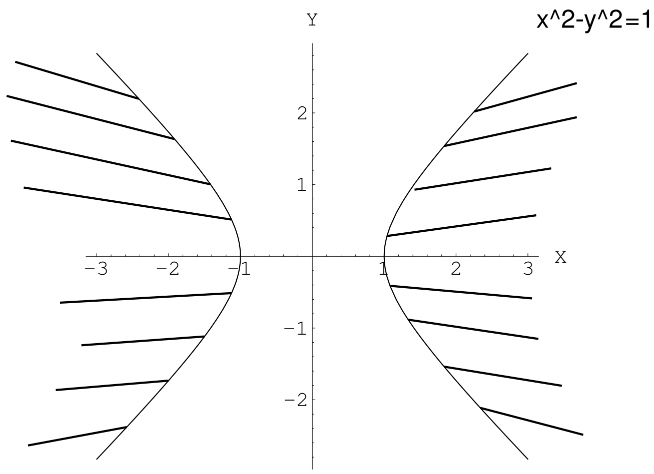
Question 2) 2.1) On donne la fonction f par $f(x, y) = \ln(x^2 - y^2 - 1)$.
- Déterminer le domaine de dérivabilité de cette fonction; représenter ce domaine dans un repère orthonormé (en le hachurant).
- Montrer que l'expression $yD_xf + xD_yf$ est constante dans ce domaine; déterminer cette constante.

2.2) On donne la fonction g par $g(x, y) = \arcsin\left(\frac{x}{y}\right)$.
- Déterminer où cette fonction est continûment dérivable et représenter cet ensemble dans un repère orthonormé (en le hachurant).
- Déterminer l'expression explicite de $F(t) = g\left(t, \frac{1}{t}\right)$, le domaine de dérivablité de cette fonction et l'expression explicite de sa dérivée.

Solution. 2.1) Le domaine de dérivabilité de f est l'ensemble

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 > 1\}$$

qui se représente par l'ensemble des points du plan situés de part et d'autre des branches de l'hyperbole d'équation cartésienne $x^2 - y^2 = 1$ (comme indiqué en hachuré sur le dessin), les points de cette hyperbole n'étant pas compris dans l'ensemble.



Dans ce domaine, on a

$$D_x f(x,y) = \frac{2x}{x^2-y^2-1}, \quad D_y f(x,y) = \frac{-2y}{x^2-y^2-1}$$

donc l'expression $yD_x + xD_y f$ y est nulle, quel que soit le point du domaine.

2.2) Voir l'examen du mois de mai 2007 (1ère session 2006-2007)

Question 3) 3.1) En justifiant vos démarches, déterminer (si possible) la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+6x+9} dx$$

3.2) En justifiant vos démarches, déterminer (si possible) la valeur de l'intégrale de $f(x,y) = \sin x$ sur A décrit analytiquement par $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \in [0,\pi], \ 0 \leq y \leq \sin x\}$. Représenter A dans un repère orthonormé.

Solution. 3.1) On a

$$\frac{1}{x^2+6x+9} = \frac{1}{(x+3)^2} = -D\frac{1}{x+3}, \ x \geq 0$$

et la fonction $f \ : \ x \in [0,+\infty[\mapsto \frac{1}{x^2+6x+9}$ est à valeurs positives. On a successivement

$$\int_0^t f(x)dx = -\int_0^t D\frac{1}{x+3}dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{t+3}, \quad t > 0$$

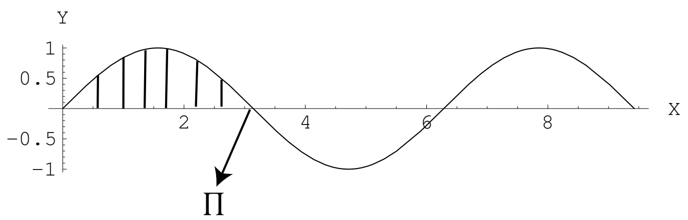
et finalement

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t\to+\infty} \int_0^t f(x)dx = \frac{1}{3} - \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t+3} = \frac{1}{3}.$$

3.2) La fonction f est continue sur l'ensemble borné fermé A; elle y est donc intégrable et son intégrale s'obtient en intégrant successivement par rapport aux deux variables, et cela dans n'importe quel ordre. Ainsi, on a

$$\begin{aligned}
\int\int_A f(x,y)\ dx\ dy &= \int_0^\pi \left(\int_0^{\sin x} f(x,y)\ dy \right) dx = \int_0^\pi \left(\int_0^{\sin x} \sin x\ dy \right) dx \\
&= \int_0^\pi \sin^2 x\ dydx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^\pi (1 - \cos(2x))\ dx \\
&= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

L'ensemble A se représente de la manière suivante (c'est la surface du plan située "sous la courbe" représentative de $\sin x, \ x \in [0,\pi]$ et "au-dessus" de l'axe X).



Question 4) On donne les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} i & 3 \\ i-1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

4.1) Déterminer (si possible) les matrices CA, C^*A.
4.2) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice A.
4.3) Si la matrice A est diagonalisable, en déterminer une forme diagonale ainsi qu'une matrice qui transforme A en celle-ci.

4.4) La matrice A est-elle inversible? Pourquoi? Dans le cas où elle est inversible, en déterminer l'inverse et vérifier que votre réponse est correcte.

Solution. 4.1) Vu le format des matrices, seul le produit CA est possible. Le résultat est la matrice de type 3×2 suivante

$$\begin{pmatrix} i & i+3 \\ i-1 & i \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

4.2) Les valeurs propres de A sont les zéros du polynôme (en la variable λ) $P(\lambda) = det(A - \lambda I) = (1-\lambda)^2$. La matrice possède donc la seule valeur propre 1.

Les vecteurs propres relatifs à cette valeur propre sont les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que $(A - 1I)X = 0$ c'est-à-dire les solutions non nulles du système linéaire homogène (en les variables x, y)

$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Il s'ensuit que les vecteurs propres cherchés sont les vecteurs

$$X = c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ c \in \mathbb{C}_0.$$

4.3) Vu le point précédent, deux vecteurs propres de A sont toujours linéairement dépendants. La matrice ne possède donc pas deux vecteurs propres linéairement indépendants; elle n'est donc pas diagonalisable.
4.4) Le déterminant de A est égal à 1; la matrice est donc inversible et on a

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour le vérifier, effectuons le produit $A^{-1}A$; on a

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc la matrice trouvée est bien l'inverse de A.