Mathématiques générales **Correction du QCM du 7 octobre 2007**

---

1. L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 - 1 \geq 2x|x-1|$ est
   $]-\infty, -\frac{1}{3}]\square$ $[-\frac{1}{3}, 1]\square$ $[-\frac{1}{3}, +\infty[\square$ $[1, +\infty[\square$ aucune des réponses précédentes n'est correcte $\clubsuit$
2. Si r est un réel strictement négatif, alors $|r-1|$ vaut
   $-r-1\square$ $r-1\square$ $1-r\clubsuit$ aucune des réponses précédentes n'est correcte$\square$
3. Si $a=-1$, alors l'expression $\displaystyle\sum_{j=2}^{5} a^j$ vaut
   $-1\square$ $0\clubsuit$ $1\square$ aucune des réponses précédentes n'est correcte$\square$
4. Dans un repère orthonormé du plan, l'ensemble des points dont les coordonnées cartésiennes (x,y) vérifient l'équation $x^2 - 2y^2 + 4 = 0$ est
   une hyperbole $\clubsuit$ une parabole $\square$ une ellipse $\square$ une droite ou une union finie de droites$\square$ aucune des réponses précédentes n'est correcte $\square$
5. Pour que deux réels non nuls aient le même carré, il est nécessaire que ces réels soient égaux
   Vrai $\square$ Faux$\clubsuit$

---

1. L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 - 1 \leq 2x|x-1|$ est
   $]-\infty, -\frac{1}{3}]\square$ $[-\frac{1}{3}, 1]\square$ $[-\frac{1}{3}, +\infty[\clubsuit$ $[1, +\infty[\square$ aucune des réponses précédentes n'est correcte $\square$
2. Si r est un réel strictement négatif, alors $\sqrt{r^2} - r$ vaut
   $0\square$ $\pm 2r\square$ $-2r\clubsuit$ aucune des réponses précédentes n'est correcte$\square$
3. L'expression $\displaystyle\sum_{n=1}^{3}(n!)$ vaut
   $n!$ $\square$ $3\square$ $8\square$ aucune des réponses précédentes n'est correcte$\clubsuit$
4. Dans un repère orthonormé du plan, l'ensemble des points dont les coordonnées cartésiennes (x,y) vérifient l'équation $x^2 + 2y^2 + 1 = 0$ est
   une hyperbole $\square$ une parabole $\square$ une ellipse $\square$ une droite ou une union finie de droites$\square$ aucune des réponses précédentes n'est correcte $\clubsuit$
5. Si le carré du réel non nul a est plus petit ou égal au carré du réel b, alors, nécessairement, le réel a est plus petit ou égal au réel b
   Vrai $\square$ Faux$\clubsuit$

1. L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 - 1 \geq \frac{x}{2}|x-1|$ est
   $]-\infty, -\frac{2}{3}]$☐ $[-\frac{2}{3}, 1]$☐ $[-\frac{2}{3}, +\infty[$☐ $[1, +\infty[$☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte ♣

2. Si r est un réel strictement négatif, alors $\sqrt{r^2} + r$ vaut
   0♣ $\pm 2r$☐ $-2r$☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte☐

3. Si $r_j = \frac{1}{2}$ $(j = 1, 2, 3, 4)$, alors l'expression $\displaystyle\sum_{j=1}^{4} r_j$ vaut
   $\frac{1}{2}$☐ 2♣ 4☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte☐

4. Dans un repère orthonormé du plan, l'ensemble des points dont les coordonnées cartésiennes (x, y) vérifient l'équation $x^2 - 2y^2 = 0$ est
   une hyperbole ☐ une parabole ☐ une ellipse ☐ une droite ou une union finie de droites♣ aucune des réponses précédentes n'est correcte ☐

5. Deux réels non nuls peuvent avoir le même carré mais être de valeur absolue différente
   Vrai ☐ Faux ♣

---

1. L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 - 1 \leq \frac{x}{2}|x-1|$ est
   $]-\infty, -\frac{2}{3}]$☐ $[-\frac{2}{3}, 1]$♣ $[-\frac{2}{3}, +\infty[$☐ $[1, +\infty[$☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte ☐

2. Si r est un réel strictement négatif, alors $|1 - r|$ vaut
   $r - 1$☐ $-r - 1$☐ $1 - r$♣ aucune des réponses précédentes n'est correcte☐

3. Si $a = -1$, alors l'expression $\displaystyle\sum_{j=1}^{5} (-1)^j a^j$ vaut
   -1☐ 0☐ 1☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte♣

4. Dans un repère orthonormé du plan, l'ensemble des points dont les coordonnées cartésiennes (x, y) vérifient l'équation $x^2 + 3y = 0$ est
   une hyperbole ☐ une parabole ♣ une ellipse ☐ une droite ou une union finie de droites☐ aucune des réponses précédente n'est correcte ☐

5. Pour que deux réels aient le même carré, il suffit qu'ils soient opposés
   Vrai ♣ Faux ☐

Question 1) 1.1) Déterminer la partie réelle, imaginaire, le conjugué et le module du complexe

$$1 - i^5$$

1.2) Simplifier l'expression suivante au maximum.

$$\ln\left(\frac{e^2}{4}\right) + \ln(2e).$$

Solution. 1.1) On a $i^4 = 1$ donc $z = 1 - i^5 = 1 - i$. Il s'ensuit que

$$\Re z = 1, \quad \Im z = -1, \quad \overline{z} = 1 + i, \quad |z| = \sqrt{(\Re z)^2 + (\Im z)^2} = \sqrt{2}.$$

1.2) En utilisant les propriétés $\ln e = 1$, $\ln(xy) = \ln x + \ln y,\ x, y > 0$ et $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x,\ x > 0$, on obtient directement

$$\ln\left(\frac{e^2}{4}\right) + \ln(2e) = 2\ln e - 2\ln 2 + \ln 2 + \ln e = 3 - \ln 2.$$

Question 2) Déterminer le domaine de définition de la fonction donnée explicitement par

$$x \mapsto \sqrt{1 - \frac{1}{x}}$$

Solution. Comme le domaine de définition de la fonction $\sqrt{\ }$ est $[0, +\infty[$, le domaine de définition de la fonction donnée est

$$\left\{x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \text{ et } 1 - \frac{1}{x} \geq 0\right\}.$$

Pour x non nul, on a

$$1 - \frac{1}{x} \geq 0 \ \Leftrightarrow\ \frac{x-1}{x} \geq 0 \ \Leftrightarrow\ x \in]-\infty, 0[\cup[1, +\infty[.$$

Le domaine de définition demandé est donc

$$]-\infty, 0[\cup[1, +\infty[.$$

Question 3) Résoudre (x est l'inconnue réelle)

$$|x| = |1 - x|.$$

Solution. On a

$$|x| = |1 - x| \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 - x \text{ ou } x = x - 1.$$

L'équation à droite du mot "ou" n'a pas de solution. On trouve donc

$$|x| = |1 - x| \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 - x \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}.$$

La solution est donc $\frac{1}{2}$.

Question 4) Décomposer la fraction rationnelle suivante en une somme de fractions simples à coefficients réels

$$\frac{1}{x^3 + x}.$$

Solution. Le dénominateur s'écrit $x^3 + x = x(x^2 + 1)$; on sait donc qu'il existe des réels uniques r, s, t tels que

$$\frac{1}{x^3 + x} = \frac{r}{x} + \frac{sx + t}{x^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

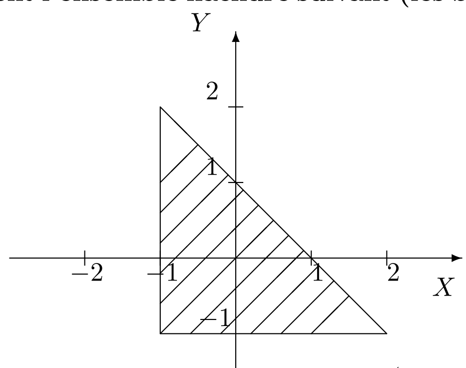
En procédant par coefficients indéterminés, on trouve $r = 1, s = -1, t = 0$ c'est-à-dire la décomposition

$$\frac{1}{x+x^3} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Remarquons cependant que la forme du dénominateur permet de trouver la réponse directement en procédant comme suit

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{(1+x^2)-x^2}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} =, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Question 5) Décrire analytiquement l'ensemble hachuré suivant (les bords sont compris dans l'ensemble).



Solution. Voir l'interrogation de novembre 2005 et de novembre 2006 (correction disponible sur le web, aux pages habituelles).

Question 6) On a la propriété suivante : *le logarithme népérien est une fonction qui, à tout produit de deux réels de son domaine de définition associe la somme des valeurs de la fonction en ces réels.*

Exprimer mathématiquement cette propriété, avec toutes les précisions indispensables au contexte.

Solution. Voir notes de cours.

Question 1) Déterminer la partie réelle, imaginaire, le conjugué et le module du complexe

$$(1+i^5)\ (1-i^5)$$

Solution. On a $(1+i^5)\ (1-i^5) = 1-i^{10}$; comme $i^2=-1$ on obtient

$$z=(1+i^5)\ (1-i^5) = 1-(-1)^5 = 2$$

donc

$$\Re z = 2, \quad \Im z = 0, \quad \overline{z} = z = 2, \quad |z| = 2.$$

Question 2) Déterminer le domaine de définition de la fonction donnée explicitement par

$$x \mapsto \ln\sqrt{1+\frac{1}{x}}$$

Solution. Le domaine de définition du logarithme népérien étant l'intervalle $]0,+\infty[$, et celui de la fonction $\sqrt{}$ étant $[0,+\infty[$, le domaine de définition de la fonction donnée est

$$\left\{x\in\mathbb{R}\ :\ x\neq 0,\ 1+\frac{1}{x}>0\right\}.$$

Pour $x\neq 0$, on a

$$1+\frac{1}{x}=\frac{x+1}{x}>0 \ \Leftrightarrow\ x\in]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[.$$

Il s'ensuit que le domaine de définition demandé est

$$]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[.$$

Question 3) Résoudre (x est l'inconnue réelle)

$$|x^2-4| = |3x|.$$

Solution. On a successivement

$$\begin{aligned} |x^2-4|=|3x| \quad &\Leftrightarrow \quad x^2-4=3x \ \text{ ou } \ x^2-4=-3x \\ &\Leftrightarrow \quad x^2-3x-4=0 \ \text{ ou } \ x^2+3x-4=0 \\ &\Leftrightarrow \quad (x-4)\ (x+1)=0 \ \text{ ou } \ (x+4)\ (x-1)=0 \end{aligned}$$

Les solutions sont donc $-4,-1,1$ et 4.

Question 4) Décomposer la fraction rationnelle suivante en une somme de fractions simples à coefficients réels

$$\frac{x}{4x^2-4x+1}.$$

Solution. La fraction donnée est une fraction propre et le dénominateur s'écrit $4x^2-4x+1=(2x-1)^2$; la décomposition en fractions simples affirme alors qu'il existe des réels uniques r,s tels que

$$\frac{x}{4x^2-4x+1}=\frac{r}{2x-1}+\frac{s}{(2x-1)^2},\ x\in\mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{2}\}.$$

En procédant par coefficients indéterminés, on trouve finalement $r=s=\frac{1}{2}$ donc

$$\frac{x}{4x^2-4x+1}=\frac{1}{2(2x-1)}+\frac{1}{2(2x-1)^2},\ x\in\mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{2}\}.$$

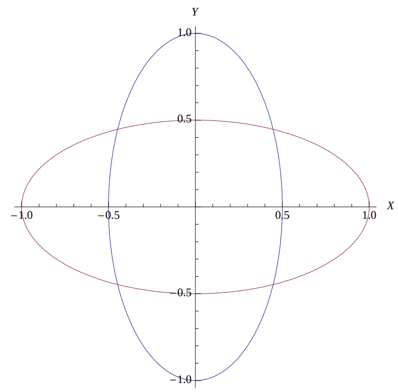
Remarquons qu'on aurait pu procéder directement, par exemple de la manière suivante

$$\frac{x}{4x^2-4x+1} = \frac{1}{2}\ \frac{2x-1+1}{(2x-1)^2} = \frac{1}{2(2x-1)} + \frac{1}{2(2x-1)^2},\ x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}.$$

Question 5) Dans un repère orthonormé du plan, représenter graphiquement l'ensemble suivant en le hachurant.

$$\left\{(x,y) : x, y \in \mathbb{R}, x^2+4y^2 \leq 1 \text{ et } 4x^2+y^2 \leq 1\right\}.$$

Solution. L'ensemble à hachurer est la partie centrale contenant l'origine (à l'intérieur des deux ellipses)



Question 6) Exprimer mathématiquement (définition) l'énoncé suivant: ***la suite de réels*** x_m ***(l'indice*** m ***variant dans les naturels positifs ou nuls), converge vers le nombre*** π***,*** **ce qui s'écrit** $\lim_{m\to+\infty} x_m = \pi$ **en abrégé. En donner une interprétation graphique (sur la droite réelle), en utilisant les mêmes notations que dans l'énoncé mathématique.**
Solution. Voir cours et notes de cours.

Mathématiques générales **Correction de l'interrogation du 07 novembre 2007**

1ère année de Bachelier en chimie et géologie

Question 1) 1.1) Déterminer la partie réelle, imaginaire, le conjugué et le module du complexe

$$(1-i)^2$$

1.2) Résoudre l'équation $z^4 - 1 = 0$ (z est l'inconnue complexe)

Solution. 1.1) On a $z = (1-i)^2 = 1 - 2i + i^2 = -2i$. Il s'ensuit que

$$\Re z = 0, \quad \Im z = -2, \quad \overline{z} = 2i, \quad |z| = 2.$$

1.2) On a $z^4 - 1 = (z^2-1)(z^2+1)$ donc les complexes qui annulent le polynôme $z \mapsto z^4 - 1$ sont $1, -1, i, -i$.

Question 2) Déterminer le domaine de définition de la fonction donnée explicitement par

$$x \mapsto \ln(|x-4|)$$

Solution. Comme le domaine de définition du logarithme népérien est l'ensemble des réels strictement positifs et comme la valeur absolue d'un nombre est toujours strictement positive sauf si le nombre est nul, on obtient immédiatement que le domaine demandé est

$$\mathbb{R} \setminus \{4\}.$$

Question 3) Simplifier les expressions suivantes au maximum.

$$a)\ \frac{\sin(\frac{4\pi}{3})}{\cos^2(\frac{8\pi}{3})}, \qquad b)\ 2\arcsin\left(\sin(\frac{5\pi}{6})\right) - \mathrm{arctg}\left(\mathrm{tg}(\frac{5\pi}{4})\right).$$

Solution. a) On a

$$\sin(\frac{4\pi}{3}) = -\sin(\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos(\frac{8\pi}{3}) = \cos(\frac{2\pi}{3}) = -\cos(\frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2}.$$

Il s'ensuit que

$$\frac{\sin(\frac{4\pi}{3})}{\cos^2(\frac{8\pi}{3})} = -2\sqrt{3}.$$

b) On a $\sin(\frac{5\pi}{6}) = \sin(\frac{\pi}{6})$ (avec $\frac{\pi}{6} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$) et $\mathrm{tg}(\frac{5\pi}{4}) = \mathrm{tg}(\frac{\pi}{4})$ (avec $\frac{\pi}{4} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$). Il s'ensuit que

$$2\arcsin\left(\sin(\frac{5\pi}{6})\right) - \mathrm{arctg}\left(\mathrm{tg}(\frac{5\pi}{4})\right) = 2\arcsin\left(\sin(\frac{\pi}{6})\right) - \mathrm{arctg}\left(\mathrm{tg}(\frac{\pi}{4})\right) = 2\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}.$$

Question 4) Résoudre (x est l'inconnue réelle)

$$x \geq x^4.$$

Solution. On a successivement

$$\begin{aligned} x \geq x^4 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > 0 \\ 1 \geq x^3 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x < 0 \\ 1 \leq x^3 \end{cases} \quad \text{ou} \quad x = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > 0 \\ 1 \geq x \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x < 0 \\ 1 \leq x \end{cases} \quad \text{ou} \quad x = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > 0 \\ 1 \geq x \end{cases} \quad \text{ou} \quad x = 0. \end{aligned}$$

La solution de l'inéquation de départ est donc l'ensemble des réels de l'intervalle $[0, 1]$.

Question 5) Décomposer la fraction rationnelle suivante en une somme de fractions simples à coefficients réels

$$\frac{1}{x^2-1}.$$

Solution. La fraction donnée est une fraction propre et le dénominateur s'écrit $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$. Il existe donc des réels uniques r, s tels que

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{r}{x-1} + \frac{s}{x+1}, \ x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

En procédant par coefficients indéterminés, on trouve immédiatement que $r = -s = \frac{1}{2}$ donc on a

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)}, \ x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$

On peut aussi procéder directement de la manière suivante

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)\ (x+1)} = \frac{1}{2}\ \frac{1-x+x+1}{(x-1)\ (x+1)} = \frac{-1}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x-1)}, \ x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$

Question 6) 6.1) A l'aide de la définition en "$\varepsilon,\ \eta$", exprimer mathématiquement l'expression abrégée suivante

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$$

6.2) Donner une interprétation graphique de votre définition, en vous servant des mêmes notations que celles que vous avez introduites au point précédent.
Solution. Voir cours et notes de cours.

Mathématiques générales **Correction du QCM du 07 décembre 2007**

---

1. La limite $\lim_{x\to 0^-} x\ln|x|$ est égale à
$-\infty\square \quad -1\square \quad 0\clubsuit \quad +\infty\square$ aucune des réponses précédentes n'est correcte$\square$

2. Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant $e^x \leq f(x),\ x\in\mathbb{R}$, alors la limite $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ est égale à
$-\infty\square \quad 0\square \quad 1\square \quad +\infty\square$ aucune des réponses précédentes n'est correcte$\clubsuit$

3. Le domaine de dérivabilité de la fonction $x\mapsto \ln(x^2)$ est
$]-\infty,0[\square \quad]0,+\infty[\square \quad \mathbb{R}\square \quad \mathbb{R}_0\clubsuit$ aucune des réponses précédentes n'est correcte$\square$

4. On donne la fonction f par $f(x)=\operatorname{arcotg}(\operatorname{tg} x)$. Dans le domaine de dérivabilité de f, la dérivée est donnée explicitement par
$\dfrac{\cos x}{1+\sin^2 x}\square \quad \dfrac{1}{1+x^2}\square \quad \dfrac{-1}{\sin^2(\operatorname{cotg} x)}\square \quad -1\clubsuit$ aucune des réponses précédentes n'est correcte$\square$

5. La fonction $\sin^2 x,\ x\in\mathbb{R}$, est une primitive de
$2\sin x,\ x\in\mathbb{R}\square \quad 2\cos x,\ x\in\mathbb{R}\square \quad \sin(2x),\ x\in\mathbb{R}\clubsuit \quad \cos(2x),\ x\in\mathbb{R}\square$ aucune des réponses précédentes n'est correcte$\square$

---

1. La limite $\lim_{x\to-\infty} xe^{-|x|}$ est égale à
$-\infty\square \quad 0\clubsuit \quad 1\square \quad +\infty\square$ aucune des réponses précédentes n'est correcte$\square$

2. Si f est une fonction définie sur $]0,+\infty[$ vérifiant $\ln x\leq f(x),\ x>0$, alors la limite $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ est égale à
$-\infty\square \quad 0\square \quad 1\square \quad +\infty\clubsuit$ aucune des réponses précédentes n'est correcte$\square$

3. Le domaine de dérivabilité de la fonction $x\mapsto\ln(1-e^x)$ est
$]-\infty,0[\clubsuit \quad]0,+\infty[\square \quad \mathbb{R}\square \quad \mathbb{R}_0\square$ aucune des réponses précédentes n'est correcte$\square$

4. On donne la fonction f par $f(x)=\arcsin(\cos x)$. Si $x\in]\pi,2\pi[$ alors la dérivée de f s'écrit explicitement
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\square \quad \dfrac{1}{\sin x}\square \quad \dfrac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}}\square \quad -1\square$ aucune des réponses précédentes n'est correcte$\clubsuit$

5. La fonction $\sin(x^2),\ x\in\mathbb{R}$, est une primitive de
$2x\cos(x),\ x\in\mathbb{R}\square \quad 2x\cos(x^2),\ x\in\mathbb{R}\clubsuit \quad 2x\cos^2(x),\ x\in\mathbb{R}\square \quad x^2\cos(x),\ x\in\mathbb{R}\square$ aucune des réponses précédentes n'est correcte$\square$

1. La limite $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{x^3-1}{1+x}\right)$ est égale à
   $-\infty\Box \quad -\pi/2\Box \quad \pi/2\clubsuit \quad +\infty\Box$ aucune des réponses précédentes n'est correcte$\Box$

2. Si f est une fonction définie sur $]0,+\infty[$ vérifiant $\ln x > f(x),\ x>0$, alors la limite $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ est égale à
   $-\infty\clubsuit \quad 0\Box \quad 1\Box \quad +\infty\Box$ aucune des réponses précédentes n'est correcte$\Box$

3. Le domaine de dérivabilité de la fonction $x \mapsto \ln(|x-1|)$ est
   $]-\infty,0[\Box \quad]0,+\infty[\Box \quad]-1,1[\setminus\{0\}\Box \quad \mathbb{R}_0\Box$ aucune des réponses précédentes n'est correcte$\clubsuit$

4. On donne la fonction f par $f(x)=\arcsin(\cos x)$. Si $x \in]0,\pi[$ alors la dérivée de f s'écrit explicitement
   $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ \Box \quad \dfrac{1}{\sin x}\ \Box \quad \dfrac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}}\ \Box \quad -1\ \clubsuit$ aucune des réponses précédentes n'est correcte$\Box$

5. La fonction $\ln(2x),\ x>0$, est une primitive de
   $\dfrac{1}{x},\ x>0\clubsuit \quad \dfrac{1}{2x},\ x>0\Box \quad \dfrac{2}{x},\ x>0\Box \quad \dfrac{1}{x}+2,\ x>0\Box$ aucune des réponses précédentes n'est correcte$\Box$

---

1. La limite $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\ln(x^2-1)}{\ln\left(\operatorname{tg}(\frac{\pi x}{6})\right)}$ est égale à
   $-\infty\Box \quad -2\Box \quad 2\clubsuit \quad +\infty\Box$ aucune des réponses précédentes n'est correcte$\Box$

2. Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant $e^{-x} > f(x),\ x\in\mathbb{R}$, alors la limite $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ est égale à
   $-\infty\Box \quad 0\Box \quad 1\Box \quad +\infty\Box$ aucune des réponses précédentes n'est correcte$\clubsuit$

3. Le domaine de dérivabilité de la fonction $x \mapsto \ln(2-\sin x)$ est
   $]-\infty,2[\Box \quad]0,\pi[\Box \quad]-\sqrt{2},\sqrt{2}[\setminus\{0\}\Box \quad \mathbb{R}\clubsuit$ aucune des réponses précédentes n'est correcte$\Box$

4. On donne la fonction f par $f(x)=\operatorname{arctg}(\operatorname{cotg} x)$. Dans le domaine de dérivabilité de f, la dérivée est donnée explicitement par
   $\dfrac{\cos x}{1+\sin^2 x}\ \Box \quad \dfrac{1}{1+x^2}\ \Box \quad \dfrac{-1}{\sin^2(\operatorname{cotg} x)}\ \Box \quad -1\ \clubsuit$ aucune des réponses précédentes n'est correcte$\Box$

5. La fonction $\ln(x^2),\ x>0$, est une primitive de
   $\dfrac{1}{x},\ x>0\Box \quad \dfrac{1}{2x},\ x>0\Box \quad \dfrac{2}{x},\ x>0\clubsuit \quad \dfrac{1}{x}+2,\ x>0\Box$ aucune des réponses précédentes n'est correcte$\Box$

Mathématiques générales **Correction de l' "Ecrit 1", 07 janvier 2008**

QCM

<u>Première version</u>

1. La fonction $\sin^2(2\pi x)$ est périodique de période
$\frac{1}{2\pi}\square$ $\frac{1}{2}\clubsuit$ $\pi\square$ $2\pi\square$ aucune des réponses précédentes n'est correcte $\square$

2. La partie imaginaire du conjugué du complexe $\frac{1}{i}$ est
$-1\square$ $0\square$ $1\clubsuit$ $-i\square$ $i\square$ aucune des réponses proposées n'est correcte$\square$

3. L'ensemble des solutions réelles de l'inéquation $|x-1| \geq |x+1|$ est
$]-\infty,-1]\square$ $[-1,1]\square$ $[1,+\infty[\square$ $]-\infty,0]\clubsuit$ $[0,+\infty\square$ $\mathbb{R}\square$ aucune des réponses précédentes n'est correcte $\square$

4. La dérivée de la fonction $f(x) = -\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right),\ x \in \mathbb{R}_0$, est donnée par
$\dfrac{x}{1+x^2}\square$ $-\dfrac{x}{1+x^2}\square$ $\dfrac{1}{1+x^2}\clubsuit$ $-\dfrac{1}{1+x^2}\square$ aucune des réponses précédentes n'est correcte $\square$

<u>Seconde version</u>

1. La fonction $x \mapsto x|x|$ est
croissante sur $\mathbb{R}\clubsuit$ décroissante sur $\mathbb{R}\square$ d'image égale à l'intervalle $[0,+\infty[\square$ non injective sur $\mathbb{R}\square$ aucune des réponses précédentes n'est correcte $\square$

2. Le conjugué de la partie imaginaire du complexe $\frac{1}{i}$ est
$-1\clubsuit$ $0\square$ $1\square$ $-i\square$ $i\square$ aucune des réponses proposées n'est correcte$\square$

3. L'ensemble des solutions réelles de l'inéquation $(1-x)^2 \leq x-1$ est
$]-\infty,1]\square$ $[-1,1]\square$ $[1,+\infty[\square$ $]-\infty,0]\square$ $[0,+\infty\square$ $\mathbb{R}\square$ aucune des réponses précédentes n'est correcte $\clubsuit$

4. La dérivée de la fonction $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right),\ x \in \mathbb{R}_0$, est donnée par
$\dfrac{x}{1+x^2}\square$ $-\dfrac{x}{1+x^2}\square$ $\dfrac{1}{1+x^2}\square$ $-\dfrac{1}{1+x^2}\clubsuit$ aucune des réponses précédentes n'est correcte $\square$

Autres questions (1er bachelier en biologie, géologie, philosophie)

Question 1) Si elles existent, déterminer les limites suivantes

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\ln(t^2)}{\ln(\sqrt{t})}, \quad \lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}.$$

Solution. Pour tout $t > 0$, on a $\ln(t^2) = 2\ln t$ et $\ln(\sqrt{t}) = \frac{1}{2}\ln t$. Il s'ensuit que

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\ln(t^2)}{\ln(\sqrt{t})} = \lim_{t\to+\infty} 4 = 4.$$

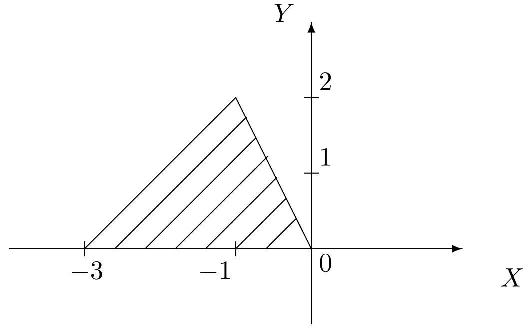
La fonction $x \mapsto e^{1/x}$ est définie dans le complémentaire de l'origine; la question posée a donc bien un sens et on a directement

$$\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to-\infty} e^y = 0.$$

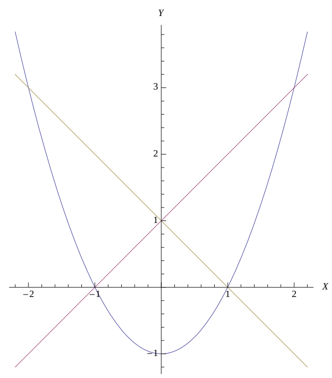
Question 2) (i) Dans un repère orthonormé du plan, représenter graphiquement l'ensemble suivant (en le hachurant)

$$\left\{(x,y) : x,y \in \mathbb{R},\ x^2-1 \leq y \ \ \textbf{et} \ \ y-1 \leq x \leq 1-y\right\}.$$

(ii) Décrire analytiquement l'ensemble suivant (les bords sont compris dans l'ensemble)



Solution. (i) L'équation $y = x^2 - 1$ est celle d'une parable (en fait la parabole d'éqaution $y = x^2$ translatée d'une unité vers “les y négatifs”). Les équations $y - 1 = x$ et $x = 1 - y$ sont celles des droites parallèles respectivement à la première et à la seconde bissectrice des axes et passant respectivement par le point de coordonnées $(-1, 0)$ et $(1, 0)$. La représentation graphique est la suivante, la partie à hachurer étant constituée des points “au-dessus” de la parabole et “en dessous” des deux droites (partie bornée fermée contenant l'origine)



(ii) Cet exercice a été résolu au cours d'une des premières répétitions (septembre-octobre).

Question 3) Primitiver les fonctions f_1, f_2, f_3 suivantes, en spécifiant chaque fois l'intervalle sur lequel vous travaillez.

$$f_1 : x \mapsto \frac{1}{x(x+1)}, \quad f_2 : x \mapsto \sin^2 x, \quad f_3 : x \mapsto xe^{-2x}.$$

Solution. La fonction f_1 est continue dans $\mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$; elle est donc primitivable dans $]-\infty, -1[,\ ]-1, 0[,\ ]0, +\infty[$. Il s'agit d'une fraction rationnelle propre; decomposons-la en fractions simples:

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1},\ x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}.$$

La primitivation est alors immédiate et donne

$$\int \frac{1}{x(x+1)} dx \ \simeq \ \begin{cases} \ln(-x) - \ln(-x-1) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) & \text{si } x \in]-\infty, -1[\\ \ln(-x) - \ln(x+1) = \ln\left(\frac{-x}{x+1}\right) & \text{si } x \in]-1, 0[\\ \ln(x) - \ln(x+1) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) & \text{si } x \in]0, +\infty[\end{cases}$$

La fonction f_2 est continue sur $\mathbb{R}$, donc y est primitivable. Une linéarisation donne

$$f_2(x) = \sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2},\ x \in \mathbb{R}$$

donc, par primitivation immédiate

$$\int \sin^2 x\ dx \ \simeq \ \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4},\ x \in \mathbb{R}.$$

La fonction f_3 est continue sur $\mathbb{R}$, donc y est primitivable. Vu sa forme (exponentielle polynôme), une primitivation par parties donne

$$\int xe^{-2x} dx = -\frac{1}{2} \int xDe^{-2x} dx = -\frac{x}{2} e^{-2x} + \frac{1}{2} \int e^{-2x} dx \simeq -\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right) e^{-2x},\ x \in \mathbb{R}.$$

Question 4) Déterminer l'approximation polynomiale aux ordres $1, 2$ en 0 de la fonction $x \mapsto \sqrt{1-2x^2}$

Dans le même repère orthonormé et en justifiant celles-ci, déterminer les représentations graphiques de f et de ses approximations à l'ordre 1, 2; utiliser différentes couleurs pour les différents graphiques.

Solution. La fonction donnée (notée f) est indéfiniment continûment dérivable dans $\{x \in \mathbb{R} \,:\, x^2 < 1/2\} =]\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}[$; comme 0 appartient à cet intervalle, les approximations demandées sont données par

$$P_1(x) = f(0) + xDf(0), \quad P_2(x) = f(0) + xDf(0) + \frac{x^2}{2}D^2f(0).$$

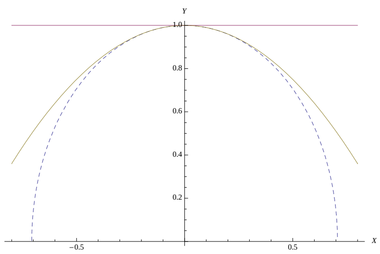
Comme

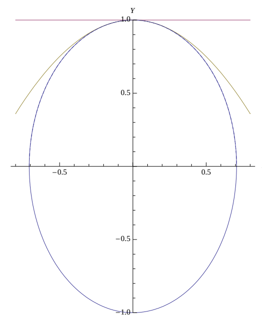
$$Df(x) = -2x(1-2x^2)^{-1/2}, \quad D^2f(x) = -2(1-2x^2)^{-1/2} - 4x^2(1-2x^2)^{-3/2}$$

on obtient immédiatement $f(0) = 1,\ Df(0) = 0,\ D^2f(0) = -2$ donc

$$P_1(x) = f(0) = 1, \quad P_2f(0) = 1 - x^2.$$

Ci-dessous, la représentation graphique de P_1 est la droite horizontale d'équation $y = 1$, la représentation graphique de P_2 est la parabole d'équation $y = 1 - x^2$ et la représentation graphique de f (en pointillés) est la partie de l'ellipse d'équation $2x^2 + y^2 = 1$ dont les points ont une ordonnée positive





Question 5) Soient f et g des fonctions dérivables dans $\mathbb{R}$. Démontrer que leur produit est une fonction dérivable en 0 et déterminer l'expression de la dérivée en 0.

Solution. Pour tout réel non nul h, on a successivement

$$\begin{aligned}
\frac{(fg)(0+h)-(fg)(0)}{h} &= \frac{f(h)g(h)-f(0)g(0)}{h} \\
&= \frac{f(h)\Big(g(h)-g(0)\Big) \ + \ f(h)g(0)-f(0)g(0)}{h} \\
&= \frac{f(h)\Big(g(h)-g(0)\Big) \ + \ \Big(f(h)-f(0)\Big)g(0)}{h} \\
&= f(h)\frac{g(h)-g(0)}{h} \ + \ \frac{f(h)-f(0)}{h}g(0).
\end{aligned}$$

Cela étant, comme f et g sont dérivables en 0, on a

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(h)-g(0)}{h} = Dg(0), \quad \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = Df(0).$$

De plus, la fonction f étant dérivable en 0, elle est aussi continue en 0 donc

$$\lim_{h\to 0} f(h) = f(0).$$

Il s'ensuit que le quotient $\frac{(fg)(0+h)-(fg)(0)}{h}$ s'écrit comme une somme de produits de fonctions de h dont chacune admet une limite finie; la limite est donc la somme des produits des limites et dès lors

$$\begin{aligned}
D(fg)(0) &= \lim_{h\to 0}\frac{(fg)(0+h)-(fg)(0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\left(f(h)\frac{g(h)-g(0)}{h} \ + \ \frac{f(h)-f(0)}{h}g(0)\right) \\
&= \lim_{h\to 0} f(h) \ \lim_{h\to 0}\frac{g(h)-g(0)}{h} + g(0)\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} \\
&= f(0)Dg(0) + g(0)Dg(0).
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Autres questions}}$ (1er bachelier en chimie, géographie, informatique)

Pour les questions 2,3,4,5,7: voir l'examen des biologistes et des géologues.

Question 1) Déterminer les complexes z qui vérifient l'équation $z^2 + z + 1 = 0$.

Solution. Comme $\Delta = 1 - 4 = -3$, les complexes qui vérifient l'équation ci-dessus sont

$$\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Si on remarque que $z^3 - 1 = (z-1)(z^2 + z + 1)$, on peut aussi conclure immédiatement: les complexes qui annulent le polynôme donné sont les deux racines cubiques complexes de 1, à savoir $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

Question 6)

6.1) Montrer que le domaine de définition de la fonction $x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ est $\mathbb{R}$.

6.2) Si $r \in \mathbb{R}$, on définit le réel y par $y = \ln\left(r + \sqrt{1+r^2}\right)$. Montrer que l'on a la relation

$$e^y - e^{-y} = 2r.$$

Solution. Le domaine de la fonction donnée est l'ensemble des réels x tels que $x + \sqrt{1+x^2} > 0$. Comme $\sqrt{1+x^2} > |x| \geq -x$ quel que soit le réel x, le domaine est donc bien $\mathbb{R}$.

On a

$$e^{-y} = \frac{1}{r + \sqrt{1+r^2}} = \frac{r - \sqrt{1+r^2}}{r^2 - (1+r^2)} = -r + \sqrt{1+r^2}$$

donc

$$e^y - e^{-y} = r + \sqrt{1+r^2} + r - \sqrt{1+r^2} = 2r$$

Mathématiques générales **Correction de l'interrogation du 29 février 2008**

1ère année de bachelier en informatique

Question 1) Déterminer toutes les solutions de l'équation

$$D^2f(x) - 4f(x) = e^{2x}.$$

Solution. L'équation homogène $D^2f - 4f = 0$ a $z \mapsto z^2 - 4$ comme polynôme caractéristique. Les solutions de cette équation sont donc les fonctions

$$ce^{2x} + c'e^{-2x},\ x \in \mathbb{R}$$

où c, c' sont des constantes arbitraires.

Cela étant, vu l'expression du second membre, une solution particulière a la forme

$$f_0(x) = Axe^{2x}$$

où A doit être déterminé. On a $D^2f_0(x) = 4Ae^{2x} + 4Axe^{2x}$ donc

$$D^2f_0(x) - 4f_0(x) = e^{2x} \ \Leftrightarrow\ 4Ae^{2x} = e^{2x} \ \Leftrightarrow\ A = \frac{1}{4}.$$

Il s'ensuit que les solutions de l'équations de départ sont les fonctions

$$ce^{2x} + c'e^{-2x} + \frac{x}{4}e^{2x},\ x \in \mathbb{R}$$

où c, c' sont des constantes arbitraires.

Question 2) Si possible, déterminer la valeur des intégrales suivantes, en justifiant vos démarches et calculs.

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+1}dx, \quad \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x-3}dx, \quad \int_0^{\pi/3} \sin^2 x dx.$$

Solution. On a $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$ donc la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2+2x+1}$ est continue sur $[0, +\infty[$, positive et une primitive est donnée par $x \mapsto -\frac{1}{x+1}$. Il s'ensuit que

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+1}dx = \lim_{t\to+\infty} \int_0^t \frac{1}{x^2+2x+1}dx = -\left(\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t+1}\right) + 1 = 1$$

ce qui fournit l'intégrabilité et la valeur de l'intégrale car f est positif sur l'intervalle considéré.

On a $x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3)$ donc la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2+2x+-3}$ est continue sur $[2, +\infty[$, positive et vérifie

$$\frac{1}{x^2+2x-3} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+3}\right) = \frac{1}{4}D\ln\left(\frac{x-1}{x+3}\right),\ x \geq 2.$$

Il s'ensuit que

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x-3}dx = \lim_{t\to+\infty} \int_2^t \frac{1}{x^2+2x-3}dx = \frac{1}{4}\lim_{t\to+\infty} \ln\left(\frac{t-1}{t+3}\right) - \frac{1}{4}\ln\left(\frac{2-1}{2+3}\right) = \frac{\ln 5}{4}$$

ce qui fournit l'intégrabilité et la valeur de l'intégrale car f est positif sur l'intervalle considéré.

La fonction $x \mapsto \sin^2 x$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc est intégrable sur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$. Cela étant, on a

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$

donc

$$\int_0^{\pi/3} \sin^2 x dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} (1-\cos(2x))dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{\sin(2x)}{2}\right]_0^{\pi/3} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sin(\frac{2\pi}{3})}{2}\right) = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

Question 3) On donne une fonction f, continûment dérivable sur $]-1, 8[\times]-\infty, 0[$ et on définit

$$F(t) = f\left(t^2 - 1, t - t^2\right).$$

- Déterminer le plus grand ensemble où la fonction F est dérivable.
- Sachant que

$$D_x f(3,-2) = 3, \quad D_y f(3,-2) = 1$$

déterminer la valeur de la dérivée de F en $t = 2$.

Solution. La fonction F est dérivable sur

$$\{t \in \mathbb{R} : \ -1 < t^2 - 1 < 8 \text{ et } t - t^2 < 0\}.$$

On a

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -1 & < & t^2 - 1 \\ t^2 - 1 & < & 8 \\ t(1-t) & < & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} t \neq 0 \\ -3 < t < 3 \\ t \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[\end{array} \right. \Leftrightarrow t \in]-3, 0[\cup]1, 3[.$$

Dès lors F est dérivable sur $]-3, 0[\cup]1, 3[$.

On a $D(t^2-1) = 2t,\ D(t-t^2) = 1-2t$ donc

$$DF(t) = 2t(D_x f)_{(t^2-1, t-t^2)} + (1-2t)(D_y f)_{(t^2-1, t-t^2)}.$$

Pour $t = 2$, on a $t^2 - 1 = 2^2 - 1 = 3,\ t - t^2 = 2 - 2^2 = -2$; dès lors

$$DF(2) = 4 D_x f(3,-2) + (-3) D_y f(3,-2) = 12 - 3 = 9.$$

Question 4) a) On considère l'intervalle $I = [-1, 2]$. L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse? Justifier votre réponse.

La largeur d'un découpage de I est toujours augmentée
quand on diminue le nombre de points qui servent à le définir.

b) L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse? Justifier votre réponse.

Pour diminuer la largeur d'un découpage de I, il est suffisant d'augmenter le nombre de points du découpage.

c) On donne les réels $x_0 = -1, x_1 = -\frac{3}{4}, x_2 = -\frac{1}{4}, x_3 = \frac{1}{3}, x_4 = \frac{3}{2}, x_5 = 2$. Que vaut la largeur du découpage de I déterminé par ces réels?

d) On donne f explicitement par

$$f(x,y) = 3x^3 + xy, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

En appliquant la définition des dérivées, montrer que la dérivée partielle par rapport à la première variable de cette fonction au point $(-1, 1)$ est égale à 10.

Solution. a) L'affirmation est fausse. Par exemple, les quatre réels $x_0 = -1, x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = 0, x_3 = 2$ définissent un découpage dont la largeur est 2 et les trois réels $x_0 = -1, x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 2$ définissent un découpage dont la largeur est $\frac{3}{2}$.

b) L'affirmation est fausse, comme le montre l'exemple du point précédent: le découpage de l'intervalle $[-1, 2]$ avec quatre réels a une plus grande largeur que celui avec trois réels.

c) On a $x_1 - x_0 = \frac{1}{4},\ x_2 - x_1 = \frac{1}{2},\ x_3 - x_2 = \frac{7}{12},\ x_4 - x_3 = \frac{7}{6},\ x_5 - x_4 = \frac{1}{2}$. La largeur du découpage est le plus grand de ces nombres, c'est-à-dire $\frac{7}{6}$.

d) On a

$$\begin{array}{rcl} f(-1+h, 1) - f(-1, 1) & = & \big(3(-1+h)^3 + (-1+h)1\big) - (-3-1) \\ & = & 3(-1 + 3h - 3h^2 + h^3) - 1 + h + 4 \\ & = & 10h - 9h^2 + 3h^3 \end{array}$$

donc

$$D_x f(-1, 1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-1+h, 1) - f(-1, 1)}{h} = \lim_{h \to 0} (10 - 9h + 3h^2) = 10.$$

Mathématiques générales **Correction de l'interrogation du 03 mars 2008**

1ère année de bachelier en biologie et en géographie

Question 1) a) Déterminer toutes les solutions de l'équation $4D^2f = f + 1$.
b) On définit la fonction f par $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$, $x \in \mathbb{R}$. Montrer que cette fonction vérifie l'équation différentielle $Df = f(1-f)$.

Solution. a) L'équation homogène est $4D^2f - f = 0$ et son polynôme caractéristique est $z \mapsto 4z^2 - 1$, de zéros $\frac{-1}{2}$ et $\frac{1}{2}$. Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions

$$ce^{x/2} + c'e^{-x/2},\ x \in \mathbb{R}$$

où c, c' sont des constantes arbitraires. On voit aussi directement que la fonction constante égale à -1 vérifie cette équation. Il s'ensuit que les solutions de l'équation de départ sont les fonctions

$$-1 + ce^{x/2} + c'e^{-x/2},\ x \in \mathbb{R}$$

où c, c' sont des constantes arbitraires.

b) La fonction donnée est dérivable dans $\mathbb{R}$. Cela étant, d'une part on a

$$Df(x) = \frac{-1}{(1+e^{-x})^2} De^{-x} = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2},\ x \in \mathbb{R}$$

et d'autre part

$$1 - f(x) = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}},\ x \in \mathbb{R}.$$

Il s'ensuit que

$$f(x)\ (1 - f(x)) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} = Df(x),\ x \in \mathbb{R}.$$

Question 2) Calculer les intégrales suivantes (en simplifiant la réponse au maximum)

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{9+x^2}\ dx, \qquad \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 x\ dx$$

Solution. La fonction $x \mapsto \frac{1}{9+x^2}$ est continue dans $\mathbb{R}$ et on a même $\frac{1}{9+x^2} = \frac{1}{3} D \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{3}\right)$, $x \in \mathbb{R}$. Cela étant, pour tout $t > 0$, on a

$$\int_0^t \frac{1}{9+x^2} dx = \frac{1}{3} \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{3}\right) \quad \text{donc} \quad \lim_{t\to+\infty} \int_0^t \frac{1}{9+x^2} dx = \frac{1}{3} \lim_{t\to+\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{3}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

Comme la fonction $x \mapsto \frac{1}{9+x^2}$ est à valeurs positives, ce qui précède donne son intégrabilité et la valeur de son intégrale sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

La fonction cos étant continue sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto \cos^2 x$ est intégrable sur tout intervalle fermé borné. Cela étant, on a directement

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 x\ dx = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (1 + \cos(2x))\ dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{4}\Big[\sin(2x)\Big]_{\pi/6}^{\pi/3} = \frac{\pi}{12} + \frac{1}{4}\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{\pi}{12}$$

Question 3) a) On donne

$$g(x, y) = \ln(xy).$$

- Déterminer le plus grand ensemble où la fonction g est continûment dérivable. Représenter cet ensemble en le hachurant.
- Montrer que dans l'ensemble déterminé au point précédent, la fonction $(x, y) \mapsto xD_xg + yD_yg$ est constante. Que vaut cette constante?

b) - Déterminer dans quel ensemble la fonction de deux variables suivante (notée f) est continûment dérivable

$$f(x, y) = \ln(1 - xy)$$

et représenter graphiquement ce domaine (en le hachurant).
- Déterminer l'expression explicite de la fonction F définie par

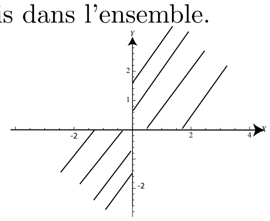
$$F(t) = f(1-t, 1+t).$$

- Déterminer le domaine de définition et de dérivabilité de F, de même que l'expression explicite de sa dérivée.

Solution. a) Comme le logarithme est continûment dérivable dans $]0, +\infty[$, et comme $(x, y) \mapsto xy$ est continûment dérivable dans $\mathbb{R}^2$, la fonction g est continûment dérivable dans

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 < xy\right\}$$

ce qui est la description analytique de l'ensemble des points du plan situés dans le premier quadrant ou dans le troisième, les points des axes n'étant pas repris dans l'ensemble.



On a

$$D_x g(x, y) = D_x \ln(xy) = \frac{1}{x}, \quad D_y g(x, y) = D_y \ln(xy) = \frac{1}{y}$$

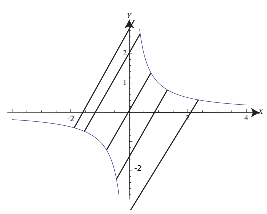
donc

$$xD_x g + yD_y g = 2.$$

b) Comme le logarithme est continûment dérivable dans $]0, +\infty[$, et comme $(x, y) \mapsto 1 - xy$ est continûment dérivable dans $\mathbb{R}^2$, la fonction f est continûment dérivable dans

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 < 1 - xy\right\}$$

ce qui est la description analytique de la partie du plan située "entre les branches" de l'hyperbole équilatère d'équation cartésienne $1 = xy$, les points de ces courbes n'étant pas compris dans l'ensemble.



On a ensuite $F(t) = \ln(1-(1-t)(1+t)) = \ln\left(1-(1-t^2)\right) = \ln t^2 = 2\ln(|t|)$. Cette fonction est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_0$ et on a

$$DF(t) = \frac{2}{t}, \quad t \in \mathbb{R}_0.$$

Question 4) a) On donne les réels $x_0 = -1, x_1 = -\frac{1}{3}, x_2 = -\frac{1}{4}, x_3 = \frac{1}{4}, x_4 = \frac{7}{4}, x_5 = 2$. Que vaut la largeur du découpage de l'intervalle $[-1, 2]$ déterminé par ces réels?
b) On donne une fonction f de deux variables réelles, continûment dérivable dans $\mathbb{R}^2$ et on définit

$$F(t) = f\left(2e^t + 1, e^{-t}\right).$$

On suppose que $D_x f(3, 1) = 2$ et $D_y f(3, 1) = 1$. Déterminer la valeur de la dérivée de F en $t = 0$.

Solution. a) On a $x_1 - x_0 = \frac{2}{3},\ x_2 - x_1 = \frac{1}{12},\ x_3 - x_2 = \frac{1}{2},\ x_4 - x_3 = \frac{3}{2},\ x_5 - x_4 = \frac{1}{4}$. La largeur du découpage est le plus grand de ces réels, c'est-à-dire $\frac{3}{2}$.

b) Les fonctions $f_1 : t \mapsto 2e^t + 1, \quad f_2 : t \mapsto e^{-t}$ sont indéfiniment continûment dérivables dans $\mathbb{R}$ et sont telles que

$$Df_1(t) = 2e^t, \quad Df_2(t) = -e^{-t}.$$

Il s'ensuit que F est dérivable dans $\mathbb{R}$ et que

$$DF(t) = (D_x f)_{(f_1(t), f_2(t))} Df_1(t) \ + \ (D_y f)_{(f_1(t), f_2(t))} Df_2(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

donc

$$DF(0) = 2(D_x f)_{(3,1)} + (-1)(D_y f)_{(3,1)} = 4 - 1 = 3.$$

Mathématiques générales **Correction de l'interrogation du 5 mars 2008**

1ere année de bachelier en géologie

Question 1) a) Déterminer toutes les solutions de l'équation $4D^2f(x) = 1$. Déterminer ensuite celle qui s'annule en 1 et dont la dérivée en 1 vaut -1.

b) On donne $f : x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$. Justifier le fait que cette fonction est dérivable dans $]1, +\infty[$. Déterminer ensuite l'expression de la dérivée et en déduire que l'on a $D\left(\sqrt{x^2-1}\ Df(x)\right) = 0,\ \forall x > 1$.

Solution. a) Il s'agit d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants fort simple. L'équation homogène $4D^2f = 0$ a pour solutions les polynômes du premier degré $x \mapsto cx + c'$ (c, c' constantes arbitraires) et on voit immédiatement qu'une solution particulière est $x \mapsto \frac{x^2}{8}$. Les solutions sont donc les fonctions f de type

$$f(x) = cx + c' + \frac{x^2}{8},\ x \in \mathbb{R}$$

où c, c' sont des constantes arbitraires.

On peut bien sûr aussi procéder par deux primitivations directes.

Cherchons les constantes c, c' telles que $0 = f(1) = c + c' + \frac{1}{8}$ et $-1 = Df(1) = c + \frac{1}{4}$. On trouve $c = -5/4$ et $c' = 9/8$. La fonction cherchée est donc donnée par

$$f(x) = -\frac{5x}{4} + \frac{9}{8} + \frac{x^2}{8},\ x \in \mathbb{R}.$$

b) La fonction $x \mapsto \sqrt{x^2-1}$ est dérivable dans $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ et ln est dérivable dans $]0, +\infty[$. Comme $x + \sqrt{x^2-1}$ est un nombre strictement positif si x est strictement supérieur à 1, la fonction donnée est bien dérivable dans $]1, +\infty[$. Cela étant, on a directement

$$Df(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x + \sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad \text{donc} \quad D\left(\sqrt{x^2-1}\ Df(x)\right) = D1 = 0, \forall x > 1.$$

Question 2) Calculer $\int_0^{+\infty} xe^{-x}\ dx$, $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1}{\cos^2 x} dx$ et simplifier la réponse au maximum.

Solution. La fonction $x \mapsto xe^{-x}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et, pour tout $t > 0$, on a

$$\int_0^t xe^{-x}\ dx = -\int_0^t xDe^{-x}\ dx = -te^{-t} + \int_0^t e^{-x}\ dx = -te^{-t} - e^{-t} + 1.$$

Dès lors

$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^t xe^{-x}\ dx = \lim_{t\to+\infty} (-te^{-t} - e^{-t} + 1) = 1$$

ce qui donne l'intégrabilité de la fonction $x \mapsto xe^{-x}$ sur $[0, +\infty[$ car celle-ci est à valeurs positives et également la valeur de son intégrale

$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^t xe^{-x}\ dx = \int_0^{+\infty} xe^{-x}\ dx = 1$$

La fonction $x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x}$ est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$; elle est donc intégrable sur tout intervalle fermé borné inclus dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ (ce qui est le cas de l'intervalle considéré ici). De plus, cette fonction est la dérivée de la fonction tangente (en tout réel différent de $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}_0$). Par variation de primitive, on obtient

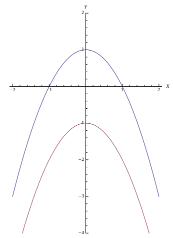
$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Question 3) On donne $g(x, y) = \arcsin\left(x^2 + y\right)$.
- Où la fonction g est-elle continûment dérivable? (Ensemble le plus grand possible)
- Représenter cet ensemble.
- Déterminer la valeur des dérivées partielles de cette fonction en $(0, 0)$.
- On définit F par $F(t) = g(\cos t, \sin^2 t)$. Quel est le domaine de définition de F? Quel est le domaine de continuité de F? Déterminer son expression explicite, en simplifiant au maximum.

Solution. Comme la fonction arcsin est dérivable dans $]-1,1[$ et comme la fonction de deux variables $(x,y) \mapsto x^2+y$ est dérivable dans $\mathbb{R}^2$, la fonction g est dérivable dans

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ -1 < x^2+y < 1\}.$$

Les équations cartésiennes $x^2+y=-1$ et $x^2+y=1$ sont celles de deux paraboles d'axe Y (cf représentation graphique); l'ensemble où g est dérivable est donc la partie du plan située "entre" les deux paraboles, les points des paraboles ne faisant pas partie de l'ensemble.



Dès lors

$$D_x g(x,y) = \frac{2x}{\sqrt{1-(x^2+y)^2}}, \quad D_y g(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-(x^2+y)^2}} \quad \text{donc} \quad D_x g(0,0)=0, \quad D_y g(0,0)=1.$$

La fonction arcsin est définie et continue dans $[-1,1]$ et, pour tout réel t, on a $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$; il s'ensuit que F est défini et continu dans $\mathbb{R}$ et que, l'on a explicitement

$$F(t) = \arcsin\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}.$$

Question 4) a) On donne une fonction f, continue sur l'intervalle $[-2,2]$, à valeurs réelles et telle que $f(-2)=f(0)=1,\ f(-1)=-2,\ f(1)=0, f(2)=3$. On considère alors le découpage suivant de l'intervalle $[-2,2]$: $x_0=-2, x_1=-\frac{3}{2}, x_2=-1, x_3=0, x_4=2$ et on pose $r_1=-2,\ r_2=-1,\ r_3=-1,\ r_4=2$. Déterminer la largeur du découpage, la valeur de la somme

$$S = \sum_{j=1}^{4} f(r_j)\ (x_j - x_{j-1})$$

et en donner une interprétation graphique.

b) Soit f une fonction dérivable dans $\mathbb{R}$, à valeurs strictement positives et telle que $f(2)=2,\ Df(2)=-1$. On pose $F(x,y)=\ln\left(f(x^2+y)\right)$. Où la fonction F est-elle dérivable? Déterminer la valeur de ses dérivées partielles au point $(1,1)$.

Solution. a) On a $x_4-x_3=2,\ x_3-x_2=1,\ x_2-x_1=\frac{1}{2},\ x_1-x_0=\frac{1}{2}$. La largeur du découpage est le plus grand de ces réels, c'est-à-dire 2.

En remplaçant simplement $f(r_1),\ f(r_2),\ f(r_3),\ f(r_4),\ x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ qui figurent dans S par les valeurs numériques données, on obtient

$$S = f(-2)\ \frac{1}{2}\ +\ f(-1)\ \frac{1}{2}\ +\ f(-1)\ 1\ +\ f(2)\ 2 = 1.\frac{1}{2} + (-2).\frac{1}{2} + (-2).1 + 3.2 = \frac{7}{2}.$$

Une interprétation graphique consiste à fixer un repère orthonormé et, dans celui-ci,
- tracer le graphique d'une fonction continue sur $[-2,2]$ passant par les points de coordonnées $(-2,1),\ (-1,-2),\ (0,1),\ (1,0),\ (2,3)$
- dessiner les quatre rectangles de côtés de longueurs égales à $x_j - x_{j-1}$ et $|f(r_j)|$ pour $j=1,2,3,4$, c'est-à-dire $\frac{1}{2}$ et 1, $\frac{1}{2}$ et 2, 1 et 2, 3 et 2 en se servant de ce qui a déjà été tracé (i.e. bien placer les sommets dont l'ordonnée est $f(r_j)$: soit au-dessus de l'axe des X quand $f(r_j)$ est positif et le contraire quand $f(r_j)$ est négatif; les sommets des rectangles ont pour coordonnées $(x_{j-1},0),\ (x_j,0),\ (x_j,f(r_j)),\ (x_{j-1},f(r_j)))$
- hachurer la surface que recouvrent ces rectangles; S représente alors la somme des aires des rectangles situés "au-dessus" de l'axe des X moins celle des aires des rectangles situés "sous " l'axe des X.

b) Comme la fonction de deux variables $(x,y) \mapsto x^2+y$ est dérivable dans $\mathbb{R}^2$, comme f est à valeurs strictement positives et comme le logarithme est dérivable dans $]0,+\infty[$, la fonction F est dérivable dans $\mathbb{R}^2$. On a alors

$$D_x F(x,y) = \frac{D_x\left(f(x^2+y)\right)}{f(x^2+y)} = \frac{(Df)_{(x^2+y)}.2x}{f(x^2+y)}, \quad D_y F(x,y) = \frac{D_y\left(f(x^2+y)\right)}{f(x^2+y)} = \frac{(Df)_{(x^2+y)}.1}{f(x^2+y)}$$

donc

$$D_x F(1,1) = \frac{Df(2).2}{f(2)} = \frac{-2}{2} = -1, \quad D_y F(1,1) = \frac{Df(2).1}{f(2)} = -\frac{1}{2}$$

Mathématiques générales **Correction de l'interrogation du 06 mars 2008**

1ere année de bachelier en chimie

Question 1) Déterminer toutes les solutions de l'équation $Df(x) - 4f(x) = x + 1$. Déterminer ensuite celle qui s'annule en $x = 1$.

Solution. L'équation à résoudre est une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 1. L'équation homogène est $Df - 4f = 0$, laquelle a pour solutions les fonctions

$$ce^{4x},\ x \in \mathbb{R}$$

où c est une constante quelconque.

Cela étant, vu la forme du second membre, on sait qu'une solution particulière a la forme $g(x) = Ax + B$ où A, B sont des constantes à déterminer. On a successivement

$$Dg(x) - 4g(x) = A - 4Ax - 4B = -4Ax + (A - 4B) = x + 1 \Leftrightarrow A = -\frac{1}{4} \text{ et } A - 4B = 1 \Leftrightarrow A = -\frac{1}{4} \text{ et } B = -\frac{5}{16}.$$

Les solutions de l'équation de départ sont donc les fonctions

$$ce^{4x} - \frac{x}{4} - \frac{5}{16},\ x \in \mathbb{R}$$

où c est une constante arbitraire.

Parmi toutes ces fonctions, cherchons à présent celle qui s'annule en 1, i.e. cherchons c tel que $ce^4 - \frac{1}{4} - \frac{5}{16} = 0$. On obtient immédiatement $c = \frac{9}{16}e^{-4}$ et il s'ensuit que la fonction cherchée est

$$\frac{9}{16}e^{4(x-1)} - \frac{x}{4} - \frac{5}{16},\ x \in \mathbb{R}$$

Question 2) Déterminer les intégrales suivantes $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+3x+2}dx$, $\int_{-1}^0 \sqrt{1-2x}\,dx$ en simplifiant la réponse au maximum.

Solution. On a $x^2 + 3x + 2 = (x + 1)\ (x + 2)$; ainsi la fonction $f\ :\ x \mapsto \frac{1}{x^2+3x+2}$ est continue sur $[0, +\infty[$, à valeurs positives et on a directement, quel que soit le réel strictement positif t,

$$\int_0^t f(x)\ dx = \int_0^t \frac{1}{x^2 + 3x + 2}dx = \int_0^t \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) dx = \int_0^t D\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) dx = \ln\left(\frac{t+1}{t+2}\right) + \ln 2$$

Comme

$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^t f(x)\ dx = \ln 2$$

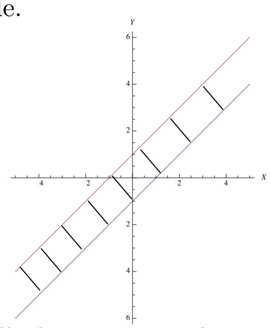
on en déduit que f est intégrable sur $[0, +\infty[$ et que son intégrale est égale à $\ln 2$.

La fonction $g\ :\ x \mapsto \sqrt{1-2x}$ est continue sur $]-\infty, \frac{1}{2}]$; elle est donc intégrable sur tout intervalle fermé borné inclus dans $]-\infty, \frac{1}{2}]$, ce qui est le cas de l'intervalle considéré ici. Cela étant, on a aussi $g(x) = -\frac{1}{3}D(1-2x)^{3/2}$ sur $]-\infty, 1/2[$; une intégration directe par variation de primitive donne alors

$$\int_{-1}^0 g(x)\ dx = -\frac{1}{3}\left(1 - 3^{3/2}\right) = \sqrt{3} - \frac{1}{3}.$$

Question 3) a) On donne $g(x, y) = \arcsin(x-y)$. Où la fonction g est-elle continûment dérivable (ensemble le plus grand possible)? Représenter cet ensemble en le hachurant.
b) On définit alors la fonction F par $F(t) = g\left(\cos^2 t, \sin^2 t\right)$.
- Donner une expression explicite de F.
- Déterminer son domaine de dérivabilité.
- Déterminer l'expression de sa dérivée première en simplifiant celle-ci au maximum.
- Déterminer la valeur de cette dérivée en $\frac{\pi}{4}$.

Solution. a) Comme la fonction arcsin est dérivable dans $]-1, 1[$ et comme la fonction de deux variables $(x, y) \mapsto x - y$ est dérivable dans $\mathbb{R}^2$, la fonction g est dérivable dans $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ :\ -1 < x - y < 1\}$ qui est l'ensemble des points du plan situés "entre" les droites d'équation cartésienne $x-y=-1$ et $x-y=1$, les points de ces droites n'étant pas compris dans l'ensemble.



b) Si $t \in \mathbb{R}$, on a $\cos^2 t - \sin^2 t = \cos(2t)$; dès lors F est explicitement donné par $F(t) = \arcsin(\cos(2t))$.

Cela étant, la fonction F est dérivable dans $\{t \in \mathbb{R} \ : \ -1 < \cos(2t) < 1\}$ ce qui est en fait l'ensemble de tous les réels à l'exception de ceux qui donnent 1 comme valeur absolue de $\cos(2t)$, c'est-à-dire

$$\mathbb{R} \setminus \left(\{k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\} \ \cup \ \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z} \right\} \right) = \mathbb{R} \setminus \left\{ k\frac{\pi}{2} \ : \ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Dans ce domaine, on a

$$DF(t) = (D_x \arcsin x)_{x=\cos(2t)} \ D_t \cos(2t) = \frac{-2\sin(2t)}{\sqrt{1-\cos^2(2t)}} = -2\frac{\sin(2t)}{|\sin(2t)|}$$

donc, lorsque $t \in]0, \pi[$,

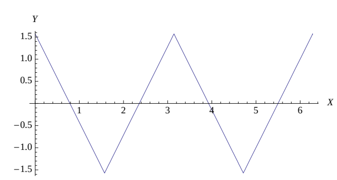
$$DF(t) = \begin{cases} -2 & \text{si } 0 < t < \frac{\pi}{2} \\ 2 & \text{si } \frac{\pi}{2} < t < \pi \end{cases}$$

et de même dans les autres intervalles translatés d'un multiple entier de π (la fonction étant périodique de période π, on peut se contenter de l'étudier dans l'intervalle $]0, \pi[$).

On peut aussi remarquer que $\cos(2t) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2t\right) = -\sin\left(\frac{3\pi}{2} - 2t\right)$ donc

$$F(t) = \arcsin(\cos(2t)) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - 2t & \text{si } 0 < t < \frac{\pi}{2} \\ -\left(\frac{3\pi}{2} - 2t\right) = 2t - \frac{3\pi}{2} & \text{si } \frac{\pi}{2} < t < \pi \end{cases}$$

Voici le graphique de cette fonction (sur $[0, 2\pi]$)



Question 4) a) L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse? Justifier la réponse.

Si on augmente le nombre de points d'un découpage d'un intervalle,
on augmente toujours la largeur du découpage.

b) Donner un exemple d'une suite de découpages de l'intervalle $[0,1]$ telle que la suite de réels constituée par leurs largeurs respectives soit une suite qui converge vers 0.

c) On donne une fonction f, continue sur l'intervalle $[0,1]$, à valeurs réelles et telle que $f(0) = f(1) = 1, \ f\left(\frac{1}{4}\right) = -1, \ f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2}$. On considère alors le découpage suivant de l'intervalle $[0,1]$: $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{2}{3}, x_3 = 1$, et on pose $r_1 = \frac{1}{4}, \ r_2 = \frac{2}{3}, \ r_3 = 1$. Déterminer la valeur de la somme

$$S = \sum_{j=1}^{3} f(r_j) \ (x_j - x_{j-1})$$

et en donner une interprétation graphique.

Solution. a) L'affirmation est fausse. Par exemple, considérons l'intervalle $[0,3]$. Les trois réels $0, \frac{3}{2}, 3$ forment un découpage de largeur égale à $\frac{3}{2}$ et les quatre réels $0,1,2,3$ définissent un découpage dont la largeur est seulement 1.

b) Par exemple, le premier découpage est constitué des deux réels $0, 1$; sa largeur est 1. Le second découpage est constitué des trois réels $0, \frac{1}{2}, 1$; sa largeur est $\frac{1}{2}$. A l'étape m, on considère le découpage σ_m formé des réels $0, \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \ldots, \frac{m-1}{m}, 1$; sa largeur est égale à $\frac{1}{m}$.

Comme la suite $\frac{1}{m}$, $m \in \mathbb{N}_0$, est une suite qui converge vers 0, on a bien construit une suite de découpages comme demandé dans l'énoncé.

c) En remplaçant simplement $f(r_1),\ f(r_2),\ f(r_3),\ x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3$ qui figurent dans S par les valeurs numériques données, on obtient

$$S = f(\frac{1}{4})\ \frac{1}{2}\ +\ f(\frac{2}{3})\ \frac{1}{6}\ +\ f(1)\ \frac{1}{3} = (-1).\frac{1}{2} + \frac{1}{2}.\frac{1}{6} + 1.\frac{1}{3} = -\frac{1}{12}.$$

Une interprétation graphique consiste à fixer un repère orthonormé et, dans celui-ci,

- tracer le graphique d'une fonction continue sur $[0, 1]$ passant par les points de coordonnées $(0, 1)$, $(\frac{1}{4}, -1)$, $(\frac{2}{3}, \frac{1}{2})$, $(1, 1)$
- dessiner les trois rectangles de côtés de longueurs égales à $x_j - x_{j-1}$ et $|f(r_j)|$ pour $j = 1, 2, 3$, en se servant de ce qui a déjà été tracé (i.e. bien placer les sommets dont l'ordonnée est $f(r_j)$: soit au-dessus de l'axe des X quand $f(r_j)$ est positif et le contraire quand $f(r_j)$ est négatif; les sommets des rectangles ont pour coordonnées $(x_{j-1}, 0),\ (x_j, 0),\ (x_j, f(r_j)),\ (x_{j-1}, f(r_j)))$
- hachurer la surface que recouvrent ces rectangles; S représente alors la somme des aires des deux rectangles situés "au-dessus" de l'axe des X moins celle de l'aire du rectangle situé "sous" l'axe des X.

Mathématiques générales **Correction du QCM - "Ecrit 1+2", 26 mai 2008**;

NOTE: les exercices proposés dans cet examen sont du type de ceux faits ou suggérés au cours, aux répétitions, aux séances de TD; certains sont même EXACTEMENT des exercices résolus auparavant ou ayant fait partie d'une interrogation.

QCM1

1. La fonction $x \mapsto \cos(2\pi x) + \sin(\pi x)$ est périodique de période
   1☐ 2♣ π☐ 2π☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte ☐
2. L'inverse du complexe $\frac{1+i}{2}$ est
   $\frac{1-i}{2}$☐ $\frac{-1+i}{2}$☐ $1+i$☐ $1-i$♣ aucune des réponses proposées n'est correcte☐
3. L'ensemble des solutions réelles de l'inéquation $\Big||x|-1\Big| > |x^2-1|$ est
   $\{0\}$☐ $\{-1,0,1\}$☐ $]-\infty,-1[$☐ $]-1,1[$☐ $]-1,0[$☐ $]0,1[$☐ $]1,+\infty[$☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte ♣
4. La dérivée de la fonction $f(x) = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$, $x \in \mathbb{R}$, est donnée par
   $\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$☐ $\dfrac{x}{x+\sqrt{1+x^2}}$☐ $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$♣ $\dfrac{1}{1+x^2}$☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte ☐

QCM2

1. Une matrice de dimension deux possède toujours au moins deux vecteurs propres
   Vrai♣ Faux☐
2. La fonction $x \mapsto e^{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$ vérifie l'équation différentielle
   $D^2f(x) = f(x)$☐ $D^2f(x) = Df(x) + f(x)$☐ $D^2f(x) = Df(x) + e^x f(x)$☐ $D^2f(x) = Df(x) + e^{2x} f(x)$♣ aucune des propositions précédentes n'est correcte☐
3. Si A désigne une partie fermée et bornée du plan, l'intégrale $\int\int_A e^x dxdy$ représente
   une fonction de la variable y ☐ une fonction des deux variables x, y ☐ une aire ☐ un volume ♣ aucune des propositions précédentes n'est correcte☐
4. Si f désigne une fonction de deux variables réelles continûment dérivable dans $\mathbb{R}^2$ telle que $D_x f(4,2) = 1$ et $D_y f(4,2) = 2$ alors la fonction $F : x \mapsto f(2x, x)$ a une dérivée qui, en 2, est égale à
   0☐ 2☐ 3☐ 4♣ aucune des propositions précédentes n'est correcte ☐

Seconde version ds QCM

$\boxed{\text{QCM1}}$

1. La fonction $x \mapsto \arcsin(\pi x)$ est périodique de période
   1$\square$ 2$\square$ $\pi\square$ $2\pi\square$ aucune des réponses précédentes n'est correcte $\clubsuit$
2. Le conjugué du complexe $\frac{1+i}{2}$ est
   $\frac{1-i}{2i}\square$ $\frac{-1+i}{2i}\square$ $\frac{1+i}{2i}\clubsuit$ $-\frac{1+i}{2i}\square$ aucune des réponses proposées n'est correcte$\square$
3. L'ensemble des solutions réelles de l'inéquation $\left||x|-1\right| \geq |x^2-1|$ est
   $\{0\}\square$ $\{-1,0,1\}\clubsuit$ $[-1,1]\square$ $[1,+\infty[\square$ $]-\infty,0]\square$ $[0,+\infty\square$ $\mathbb{R}\square$ aucune des réponses précédentes n'est correcte $\square$
4. La dérivée de la fonction $x \mapsto e^{e^x},\ x \in \mathbb{R}$ est donnée par
   $e^x\square$ $e^{e^x}\square$ $(e^x)^2\square$ $e^x e^{e^x}\clubsuit$ aucune des réponses précédentes n'est correcte $\square$

$\boxed{\text{QCM2}}$

1. Une matrice de dimension deux possède toujours au plus deux vecteurs propres
   Vrai$\square$ Faux$\clubsuit$
2. La fonction $x \mapsto \ln(x+\sqrt{1+x^2}),\ x \in \mathbb{R}$ vérifie l'équation différentielle
   $D^2f(x)+Df(x)=0\square$ $D^2f(x)+xDf(x)=0\square$ $D^2f(x)+x\left(Df(x)\right)^2=0\square$ $D^2f(x)+x\left(Df(x)\right)^3=0\clubsuit$
   aucune des propositions précédentes n'est correcte$\square$
3. Si A désigne une partie fermée et bornée du plan, l'intégrale $\int\int_A e^y dxdy$
   est toujours égale à $\int_A e^y dy\square$ représente une fonction de la variable x $\square$ représente une fonction des deux variables x, y $\square$ est la valeur d'un volume $\clubsuit$ aucune des propositions précédentes n'est correcte$\square$
4. Si f désigne une fonction de deux variables réelles continûment dérivable dans $\mathbb{R}^2$ telle que $D_xf(4,2)=-2$ et $D_yf(4,2)=2$ alors la fonction $F: x \mapsto f(2x,x)$ a une dérivée qui, en 2, est égale à
   0$\square$ 2$\square$ 3$\square$ 4$\square$ aucune des propositions précédentes n'est correcte $\clubsuit$

Mathématiques générales **Correction de l'"Ecrit 1", 26 mai 2008**

1er bachelier en biologie, chimie, géographie, géologie, informatique, philosophie

---

NOTE: les exercices proposés dans cet examen sont du type de ceux faits ou suggérés au cours, aux répétitions, aux séances de TD; certains sont même EXACTEMENT des exercices résolus auparavant ou ayant fait partie d'une interrogation.

Question 1) a) Déterminer tous les réels x qui vérifient l'inégalité

$$\frac{1}{x^3} \geq \frac{1}{x}.$$

b) Déterminer tous les réels x de l'intervalle $[0, 2\pi]$ qui vérifient l'égalité

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}.$$

c) Déterminer les complexes x qui vérifient l'équation $x^2 + x + 1 = 0$.
d) Déterminer le module, la partie réelle et la partie imaginaire du complexe $(1+i)^2$.

Solution. a) [*Voir exercices des répétitions-Liste type 1.*] On a

$$\frac{1}{x^3} \geq \frac{1}{x} \;\Leftrightarrow\; \frac{1-x^2}{x^3} \geq 0$$

Le numérateur est positif (resp. négatif) si et seulement si $x \in [-1, 1]$ (resp. $x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$) et le dénominateur a le signe de x; il s'ensuit que le quotient est positif si et seulement si $x \in]-\infty, -1] \cup]0, 1]$. Les réels qui vérifient l'inégalité de départ sont donc ceux de l'ensemble $]-\infty, -1] \cup]0, 1]$.

b) On a

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \;\Leftrightarrow\; x = \frac{\pi}{4} \text{ ou } x = \frac{7\pi}{4} \text{ ou } x = \frac{3\pi}{4} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{4}$$

c) [*Voir exercices des répétitions-Liste type 2.*] On a $\Delta = 1 - 4 = 3i^2 = (\sqrt{3}\, i)^2$; il s'ensuit que les complexes qui vérifient l'équation donnée sont

$$\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}, \quad -\frac{1+\sqrt{3}i}{2}.$$

d) On a $(1+i)^2 = 2i$ donc

$$\left|(1+i)^2\right| = 2, \quad \Re(1+i)^2 = 0, \quad \Im(1+i)^2 = 2.$$

Question 2) Déterminer la valeur des limites suivantes, si elles existent (en justifiant votre réponse)

$$\lim_{t\to 0^+} \ln\left(\frac{1}{t}\right), \quad \lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}, \quad \lim_{x\to 0^+} \arcsin(x+1)$$

Solution. La fonction ln est définie sur $]0, +\infty[$; on peut donc envisager la première limite; cela étant, les propriétés du logarithme permettent d'obtenir directement

$$\lim_{t\to 0^+} \ln\left(\frac{1}{t}\right) = -\lim_{t\to 0+} \ln t = +\infty.$$

La fonction $x \mapsto \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}_0$, ensemble non minoré; on peut donc envisager la deuxième limite; cela étant, on a directement

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{|x|\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}{x} = -\lim_{x\to -\infty} \sqrt{\frac{1}{x^2}+1} = -1.$$

La fonction arcsin étant définie sur $[-1,1]$, la fonction $x \mapsto \arcsin(1+x)$ est définie sur $[-2,0]$ et envisager la limite à droite de 0 des valeurs de cette fonction n'a donc pas de sens.

Question 3) Déterminer les approximations polynomiales en 0 à l'ordre 1 et à l'ordre 2 de la fonction $x \mapsto \cos^2 x$. Représenter la fonction et ses approximations dans un même repère orthonormé, en prenant comme domaine de définition l'intervalle $[-\pi,\pi]$ et en utilisant différentes couleurs pour les différents graphiques.

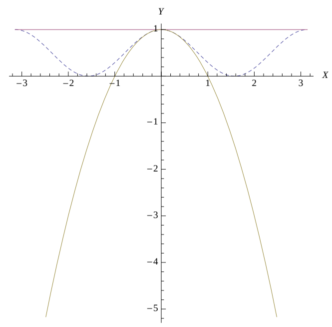
Solution. [*Voir exercices des répétitions-liste type 5.*] La fonction $f : x \mapsto \cos^2 x$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$f(0) = 1, \quad Df(x) = -2\cos x \sin x = -\sin(2x), \quad D^2 f(x) = -2\cos(2x).$$

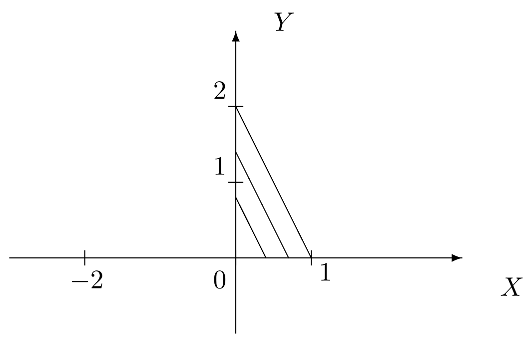
Il s'ensuit que les approximations P_1, P_2 demandées sont

$$P_1(x) = f(0) + xDf(0) = 1, \quad P_2(x) = P_1(x) + \frac{x^2}{2} D^2 f(0) = 1 - x^2.$$

On a la représentation suivante (la fonction donnée est en pointillés)



Question 4) a) Décrire analytiquement l'ensemble hachuré suivant (les bords sont compris dans l'ensemble)



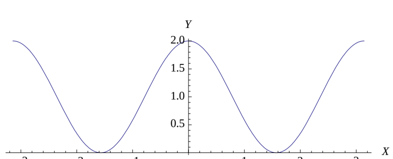
b) En le hachurant, représenter géométriquement l'ensemble dont une représentation analytique est

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \in [-\pi,\pi], \ 0 \leq y \leq 1 + \cos(2x)\}.$$

Solution. a) La droite joignant les points de coordonnées $(1,0)$ et $(0,2)$ a pour équation cartésienne $y = -2x+2$; l'ensemble hachuré se décrit par

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \in [0,1], \ 0 \leq y \leq -2x+2\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,2], 0 \leq x \leq \frac{2-y}{2}\right\}.$$

b) On a la représentation suivante pour le graphique de la courbe d'équation $y = 1 + \cos(2x), \ x \in [-\pi,\pi]$; l'ensemble à hachurer est la partie du plan située "sous" cette courbe et "au-dessus" de l'axe X, c'est-à-dire l'ensemble des points du plan dont l'abscisse x appartient à $[-\pi,\pi]$ et dont l'ordonnée est positive et est inférieure ou égale à $1 + \cos(2x)$.



Mathématiques générales Correction de l'"Ecrit 2", 26 mai 2008

1er bachelier en biologie, géologie

NOTE: les exercices proposés dans cet examen sont du type de ceux faits ou suggérés au cours, aux répétitions, aux séances de TD; certains sont même EXACTEMENT des exercices résolus auparavant ou ayant fait partie d'une interrogation.

Question 1) a) Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle

$$D^2 f(x) - f(x) = 1 + e^x.$$

b) Montrer que la fonction $N \ : \ t \mapsto \frac{2}{1+e^{-2t}}$ **vérifie l'équation différentielle**

$$DN = (2-N)N.$$

Solution. a) L'équation homogène est $D^2 f - f = 0$ et l'équation caractéristique correspondante est explicitement $z^2 - 1 = 0$; les solutions de cette équation étant les réels $-1, 1$, les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$f(x) = ce^x + c'e^{-x}, \ x \in \mathbb{R}$$

où c, c' sont des constantes arbitraires.

Cherchons une solution particulière de l'équation

$$D^2 f(x) - f(x) = e^x.$$

Vu la forme du second membre, on sait qu'une solution particulière est donnée par $f_0(x) = Axe^x$ où A est une constante à déterminer. On a $D^2 f_0(x) = 2Ae^x + Axe^x$ donc

$$D^2 f_0(x) - f_0(x) = e^x \ \Leftrightarrow \ 2Ae^x = e^x \ \Leftrightarrow \ A = \frac{1}{2}.$$

Une solution particulière de $D^2 f - f = 1$ est la fonction constante -1.

Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation de départ est l'ensemble des fonctions

$$ce^x + c'e^{-x} + \frac{x}{2}e^x - 1, \ x \in \mathbb{R}$$

où c, c' sont des constantes arbitraires.

b) [*Voir l'interro de mars des biologistes et des géologues.*] Vu son expression, la fonction N est indéfiniment continûment dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a d'une part

$$DN(t) = 2 \ \frac{2e^{-2t}}{(1+e^{-2t})^2}, \ t \in \mathbb{R}$$

et d'autre part

$$(2 - N(t)) \ N(t) = 4\frac{e^{-2t}}{(1+e^{-2t})^2}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Comme annoncé, quel que soit t on a ainsi

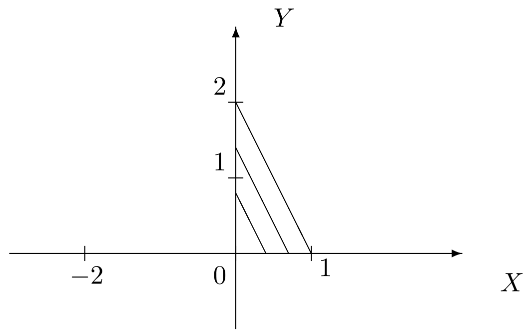
$$DN(t) = (2 - N(t))N(t)$$

Question 2) a) Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier la réponse au maximum

$$\int_{-1}^{0} \sqrt{1-2x} \ dx, \quad \int_0^1 \frac{x-1}{x+1}dx, \quad \int_0^{+\infty} e^{-3x}dx.$$

b) Déterminer la valeur de l'intégrale suivante sur l'ensemble borné fermé hachuré ci-dessous et simplifier la réponse au maximum

$$\int\int_A e^{x+y}dxdy$$



Solution. a) [*Voir l'interro de mars des chimistes.*] Une fonction continue sur un ensemble fermé borné y est toujours intégrable; dès lors, les deux premières intégrales existent (ce sont des réels). De plus, dans ces deux cas, une primitivation immédiate donne d'une part

$$\int_{-1}^{0} \sqrt{1-2x}dx = -\frac{1}{3}\left[(1-2x)^{3/2}\right]_{-1}^{0} = -\frac{1}{3}\left(1-3^{3/2}\right) = \sqrt{3}-\frac{1}{3}$$

et d'autre part, en utilisant en outre

$$\frac{x-1}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1},\ x \neq -1$$

on a également

$$\int_{0}^{1} \frac{x-1}{x+1}dx = 1 - 2\left[\ln(x+1)\right]_0^1 = 1 - 2\ln 2.$$

Pour la troisième intégrale, comme il s'agit de l'intégration d'une fonction continue positive sur l'ensemble non borné $[0, +\infty[$, l'intégrabilité et la valeur de l'intégrale s'obtiennent directement en procédant par exemple de la manière suivante

$$\int_0^t e^{-3x}dx = -\frac{1}{3}\left[e^{-3x}\right]_0^t = \frac{1}{3} - \frac{e^{-3t}}{3}, \quad t > 0$$

$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^t e^{-3x}dx = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{3}-\frac{e^{-3t}}{3}\right) = \frac{1}{3} = \int_0^{+\infty} e^{-3x}dx.$$

b) L'intégrale a bien un sens car il s'agit de l'intégrale d'une fonction continue sur un ensemble borné fermé (notons-le A). Cela étant, l'ensemble hachuré A se décrit comme suit (voir correction de la partie 1 de l'examen)

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ : \ x\in[0,1],\ 0\le y\le -2x+2\}$$

et en intégrant d'abord par rapport à y, on obtient directement

$$\begin{aligned}
\int\int_A e^{x+y}dxdy &= \int_0^1 \left(\int_0^{-2x+2} e^{x+y}dy\right) dx \\
&= \int_0^1 e^x \left(\int_0^{-2x+2} e^{y}dy\right) dx \\
&= \int_0^1 e^x \left(\left[e^y\right]_{y=0}^{y=-2x+2}\right) dx \\
&= \int_0^1 e^x\left(e^{-2x+2}-1\right)dx \\
&= \int_0^1 e^{2-x}dx - \left[e^x\right]_0^1 \\
&= -\left[e^{2-x}\right]_0^1 - (e-1) \\
&= -e+e^2-e+1 = e^2-2e+1 = (e-1)^2
\end{aligned}$$

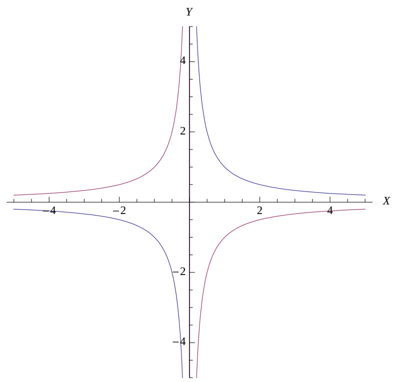
Question 3) On donne la fonction $f:\ (x,y)\mapsto \arcsin(yx)$.
a) Déterminer son domaine de définition; le représenter dans un repère orthonormé.
b) Déterminer son domaine de dérivabilité et montrer que dans celui-ci, on a

$$xD_xf = yD_yf.$$

Solution. a) Comme le domaine de définition de la fonction arcsin est $[-1, 1]$, le domaine de définition de la fonction donnée est

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ -1 \leq xy \leq 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |xy| \leq 1\}.$$

Il s'agit de l'ensemble des points du plan situé "entre les branches" des hyperboles équilatères d'équations cartésiennes $xy = 1$ et $xy = -1$, les points de l'hyperbole étant compris dans l'ensemble



b) Vu les propriétés de la fonction arcsin, la fonction est dérivable dans

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ -1 < xy < 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |xy| < 1\}$$

et, dans cet ensemble, on a

$$D_x f(x, y) = (D \arcsin)(xy) \ D_x(xy) = \frac{y}{\sqrt{1 - x^2y^2}}, \quad D_y f(x, y) = (D \arcsin)(xy) \ D_y(xy) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2y^2}}$$

donc

$$xD_x f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{1 - x^2y^2}} = yD_y f(x, y).$$

Question 4) a) Déterminer les valeurs du complexe x pour lesquelles la matrice suivante n'est pas inversible

$$\begin{pmatrix} x & 2x - 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}.$$

b) Pour les valeurs de x qui ne sont pas parmi celles trouvées ci-dessus, déterminer l'inverse de la matrice et vérifier votre réponse.
c) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solution. a) Comme une matrice est inversible si et seulement si son déterminant n'est pas nul, calculons celui-ci. On a directement

$$det \begin{pmatrix} x & 2x - 1 \\ 1 & x \end{pmatrix} = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2.$$

Dès lors la matrice n'est pas inversible lorsque $x = 1$, et seulement dans ce cas.

b) Dans le cas de non annulation du déterminant d'une matrice A, la matrice inverse est donnée par $\frac{1}{det(A)}\widetilde{\mathcal{A}}$, où $\mathcal{A}$ désigne la matrice des cofacteurs de A. Dans notre cas, on a

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 - 2x & x \end{pmatrix}$$

donc, lorsque $x \neq 1$

$$\frac{1}{\det A}\widetilde{\mathcal{A}} = \frac{1}{(x - 1)^2} \begin{pmatrix} x & 1 - 2x \\ -1 & x \end{pmatrix}.$$

Pour s'assurer que la réponse est correcte, il suffit de vérifier que, lorsqu'on effectue le produit de la matrice de départ par celle-ci (à gauche ou à droite), on trouve la matrice identité:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(x-1)^2}\left(\begin{array}{cc} x & 1-2x \\ -1 & x \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} x & 2x-1 \\ 1 & x \end{array}\right) &= \frac{1}{(x-1)^2}\left(\begin{array}{cc} x^2+1-2x & x(2x-1)+x(1-2x) \\ -x+x & -2x+1+x^2 \end{array}\right) \\
&= \frac{1}{(x-1)^2}\left(\begin{array}{cc} (x-1)^2 & 0 \\ 0 & (x-1)^2 \end{array}\right) \\
&= \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right).
\end{aligned}$$

c) Les valeurs propres de la matrice sont les zéros du polynôme caractéristique

$$\det\left(\begin{array}{cc} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{array}\right) = (1-\lambda)^2 - 1 = -\lambda(2-\lambda)$$

donc ce sont les réels 0 et 2.

Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 0 sont les vecteurs non nuls $\left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right)$ tels que

$$\left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right) = 0$$

c'est-à-dire les vecteurs

$$\left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right) = c\left(\begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array}\right), \ c \in \mathbb{C}_0.$$

Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 2 sont les vecteurs non nuls $\left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right)$ tels que

$$\left(\begin{array}{cc} 1-2 & 1 \\ 1 & 1-2 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right) = 0$$

c'est-à-dire les vecteurs

$$\left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right) = c\left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array}\right), \ c \in \mathbb{C}_0.$$

Mathématiques générales "Ecrit 2", 26 mai 2008

1er bachelier en chimie, géographie, informatique

NOTE: les exercices proposés dans cet examen sont du type de ceux faits ou suggérés au cours, aux répétitions, aux séances de TD; certains sont même EXACTEMENT des exercices résolus auparavant ou ayant fait partie d'une interrogation.

Pour une correction des questions 1, 2a), 2b), 3), 4a), 4b), 4c), nous renvoyons à la correction de l'Ecrit 2 des autres sections.

Question 3c), informaticiens. Déterminer la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos(2x)\ dx.$$

En déduire la valeur de $\int_{\mathbb{R}} e^{2ix}e^{-|x|}dx$.

Solution. La fonction donnée est continue sur $[0,+\infty[$ et, en valeur absolue, elle est majorée par e^{-x}; comme $x\mapsto e^{-x}$ est une fonction intégrable sur $[0,+\infty[$, la fonction de départ l'est aussi. Cela étant, pour calculer l'intégrale demandée, on peut procéder par parties (car il s'agit d'intégrer le produit d'une fonction trigonométrique et d'une exponentielle) ou plus directement

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\ \cos(2x)\ dx = \Re\left(\int_0^{+\infty} e^{-x+2ix}dx\right) = \Re\frac{1}{1-2i} = \Re\frac{1+2i}{5} = \frac{1}{5}.$$

En utilisant le fait que la fonction sin est impaire, que la fonction cos est paire et que la fonction valeur absolue est paire, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} e^{2ix}e^{-|x|}dx = 2\int_0^{+\infty}\cos(2x)e^{-x}dx = \frac{2}{5}.$$

Question 3c), chimistes et géographes. Déterminer la valeur des intégrales suivantes, si elles existent

$$\int_0^{+\infty} xe^{-3x}\ dx, \qquad \int_{\mathbb{R}} e^{-3x}dx.$$

Solution. La première intégrale est l'intégrale d'une fonction continue positive sur $[0,+\infty[$; l'intégrabilité et la valeur de l'intégrale peuvent ainsi s'obtenir comme suit: on a

$$\int_0^t xe^{-3x}dx = -\frac{1}{3}\int_0^t xDe^{-3x}dx = -\frac{te^{-3t}}{3} + \frac{1}{3}\int_0^t e^{-3x}dx = -\frac{te^{-3t}}{3} - \frac{1}{9}\left(e^{-3t}-1\right)$$

pour tout $t>0$ et par suite

$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^t xe^{-3x}dx = \frac{1}{9} = \int_0^{+\infty} xe^{-3x}dx.$$

La seconde intégrale n'existe pas car la fonction $x\mapsto e^{-3x}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$. De fait, on a

$$\lim_{t\to-\infty}\int_t^0 \left|e^{-3x}\right| dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^0 e^{-3x}dx = -\frac{1}{3}\lim_{t\to-\infty}(1-e^{-3t}) = +\infty.$$

Question 4 d) Soient des réels a,b. Montrer que les valeurs propres de la matrice suivante sont toujours réelles

$$\begin{pmatrix} 1 & a+ib \\ a-ib & 1 \end{pmatrix}.$$

Solution. Les valeurs propres sont les zéros du polynôme (en λ)

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & a+ib \\ a-ib & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2-(a^2+b^2) = \left(1-\lambda-\sqrt{a^2+b^2}\right)\ \left(1-\lambda+\sqrt{a^2+b^2}\right)$$

à savoir les réels

$$1+\sqrt{a^2+b^2}, \quad 1-\sqrt{a^2+b^2}.$$