Mathématiques générales A
Examen du vendredi 16 janvier 2015

CORRIGE

Théorie

Question 1.

(1.1) Définir ce que l'on entend par primitive d'une fonction sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
(1.2) Enoncer le théorème des accroissements finis (TAF) dans $]0, +\infty[$.
(1.3) En utilisant le point 1.2, démontrer que si une fonction dérivable dans l'intervalle $]0, +\infty[$ a une dérivée nulle en tout point, alors cette fonction est constante dans l'intervalle.
(1.4) Déduire de ce qui précède que si deux fonctions sont primitives d'une même fonction dans $]0, +\infty[$, alors ces deux primitives sont égales à une constante additive près dans l'intervalle.

Pour une réponse « type », voir notes de cours.

Question 2.

(2.1) On donne une fonction continue sur l'intervalle $]0, 1]$. Quand dit-on que celle-ci est intégrable sur cet intervalle ?
(2.2) Utiliser la définition donnée au point précédent pour établir la condition nécessaire et suffisante sur r sous laquelle la fonction $x \mapsto x^r$ est intégrable sur $]0, 1]$.

Pour une réponse « type », voir notes de cours.

Exercices

1. **(a) Sachant que l'inconnue réelle x appartient à l'intervalle $[\pi, 2\pi]$, résoudre l'équation suivante**

$$\sin(3x)\cos(2x) + \sin^2(x) = \frac{1}{2}.$$

Solution. L'équation est définie pour $x \in \mathbb{R}$ et, puisque $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$, elle est équivalente à

$$\begin{aligned}
2\sin(3x)\cos(2x) + 2\sin^2(x) - 1 = 0 &\Leftrightarrow 2\sin(3x)\cos(2x) - \cos(2x) = 0\\
&\Leftrightarrow \cos(2x)(2\sin(3x) - 1) = 0\\
&\Leftrightarrow \cos(2x) = 0 \quad \text{ou} \quad \sin(3x) = \frac{1}{2}\\
&\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \ \text{ ou } \ 3x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \text{ ou } \ 3x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})\\
&\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \ \text{ ou } \ x = \frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} \ \text{ ou } \ x = \frac{5\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} \ (k \in \mathbb{Z})
\end{aligned}$$

Dès lors, les solutions dans l'intervalle $[\pi, 2\pi]$ sont $\frac{5\pi}{4}, \ \frac{7\pi}{4}, \ \frac{25\pi}{18}, \ \frac{29\pi}{18}$.

(b) Après avoir justifié si elles sont définies, simplifier au maximum les expressions suivantes

$$(*) \quad \ln\left(\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right), \qquad (**) \ \arccos\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$$

Solution. (*) La fonction arcsin est définie sur $[-1, 1]$ et $\arcsin(\frac{-1}{2}) = -\frac{\pi}{6}$; cependant, comme la fonction ln est définie sur $]0, +\infty[$, l'expression donnée n'est pas définie.

(**) La fonction cos est définie sur $\mathbb{R}$ et son ensemble image est $[-1,1]$; d'autre part, puisque la fonction arcos est définie sur $[-1,1]$, l'expression donnée est définie.
On a $\text{arcos}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) = \text{ arcos}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \frac{3\pi}{4}$ car $\text{im(arcos)} = [0,\pi]$.

(c) Déterminer la partie imaginaire et le module du nombre complexe

$$z = \frac{2-3i}{(1+i)^2}.$$

Solution. Puisque $(1+i)^2 = 1 + i^2 + 2i = 2i$, on a

$$z = \frac{2-3i}{(1+i)^2} = \frac{2-3i}{2i} = \frac{(2-3i)(-i)}{2i\ .\ (-i)} = \frac{-2i-3}{2} = \frac{-3}{2} - i.$$

La partie imaginaire de z vaut donc -1.
Son module vaut $\sqrt{(\frac{-3}{2})^2 + (-1)^2} = \sqrt{\frac{9}{4}+1} = \sqrt{\frac{13}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2}$.

2. **Si elles existent, déterminer les limites suivantes**

$$(*)\ \lim_{x\to 0^+} x(1-\ln(x)), \qquad (**)\ \lim_{x\to -\infty} \frac{|1-3x|}{\sqrt{9x^2-1}}.$$

Solution. (*) La fonction $x \mapsto x(1-\ln(x))$ est définie sur $]0,+\infty[$. Puisque tout intervalle ouvert comprenant 0 rencontre $]0,+\infty[$, le calcul de la limite en 0^+ peut donc être envisagé.
Pour lever l'indétermination $0^+ \ .\ (+\infty)$, on utilise le théorème de l'Hospital dont les hypothèses sont vérifiées, en considérant la fonction sous la forme $x \mapsto \dfrac{1-\ln(x)}{\frac{1}{x}}$.
En effet, si $V =]0,\varepsilon[$ ($\varepsilon > 0$ et assez petit), on a
1) $f : x \mapsto 1-\ln(x)$ et $g : x \mapsto \frac{1}{x}$ sont dérivables dans V
2) $Dg(x) = -\frac{1}{x^2} \neq 0$ dans V
3) $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ (et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (1-\ln(x)) = +\infty$)
4) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{Df(x)}{Dg(x)} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{-1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$
Dès lors, la limite cherchée vaut 0^+.

(**) La fonction $x \mapsto \dfrac{|1-3x|}{\sqrt{9x^2-1}}$ est définie sur $]-\infty,-\frac{1}{3}[\cup]\frac{1}{3},+\infty[$, ensemble non minoré ; le calcul de la limite en $-\infty$ peut donc être envisagé. Cela étant, on a

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{|1-3x|}{\sqrt{9x^2-1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1-3x}{|x|\sqrt{9-\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(\frac{1}{x}-3\right)}{-x\sqrt{9-\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{x}-3}{-\sqrt{9-\frac{1}{x^2}}} = \frac{-3}{-3} = 1.$$

3. **Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier votre réponse au maximum**

$$(*)\ \int_{-\pi/4}^{0} \text{tg}(x)\ dx, \qquad (**)\ \int_{1}^{+\infty} \frac{x+1}{x^3+x}\ dx.$$

Solution. (*) La fonction $x \mapsto \text{tg}(x)$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$;
elle est donc intégrable sur l'intervalle fermé borné $[-\frac{\pi}{4}, 0]$. Cela étant, comme $\text{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ et que $D\cos(x) = -\sin(x)$, on a

$$\int_{-\pi/4}^{0} \text{tg}(x)\ dx = \int_{-\pi/4}^{0} \frac{-D\cos(x)}{\cos(x)}\ dx = -\left[\ln(\cos(x))\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{0} = -\left[\ln(\cos(0)) - \ln(\cos(-\pi/4))\right]$$

$$= -\left(\ln(1) - \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{2}\ln(2).$$

(**) La fonction $x \mapsto \frac{x+1}{x^3+x}$ est continue sur $\mathbb{R}_0$ donc sur $[1, +\infty[$, ensemble non borné. Pour vérifier l'intégrabilité de la fonction en $+\infty$, on peut utiliser le critère en θ de la manière suivante : calculons la limite

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(x^2\left|\frac{x+1}{x^3+x}\right|\right) &= \lim_{x\to+\infty}\left(x^2\frac{x+1}{x^3+x}\right)\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^3}\\ &= 1.\end{aligned}$$

Comme cette limite existe et est finie avec $\theta = 2 > 1$, par le critère d'intégration en θ, f est intégrable en $+\infty$ donc finalement sur $[1, +\infty[$.
Décomposons la fraction donnée en une somme de fractions simples ; on a

$$\frac{x+1}{x^3+x} = \frac{x+1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1)+(Bx+C)x}{x(x^2+1)},\ x \in \mathbb{R}_0$$

ce qui donne $A = 1$ et $B = -1$ et $C = 1$.
Comme

$$\int\left(\frac{1}{x} - \frac{x-1}{x^2+1}\right)\,dx \simeq \int\frac{1}{x}\,dx\ - \int\frac{x-1}{x^2+1}\,dx \simeq \int\frac{1}{x}\,dx\ - \frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}\,dx + \int\frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$\simeq\ \ln(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \operatorname{arctg}(x) \simeq\ \ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) + \operatorname{arctg}(x), x \in]0, +\infty[,$$

on a

$$\int_1^{+\infty}\frac{x+1}{x^3+x}\,dx = \left[\ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) + \operatorname{arctg}(x)\right]_1^{x\to+\infty}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) + \operatorname{arctg}(x)\right) - \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \operatorname{arctg}(1)$$

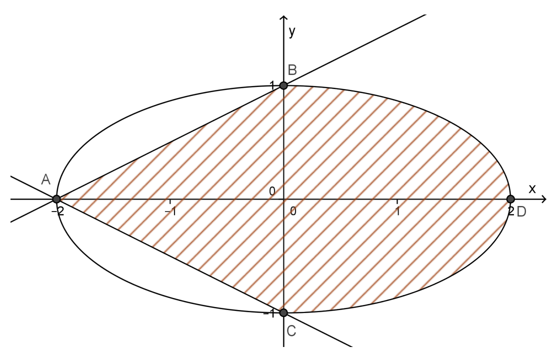
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)\right) + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\ln(2) - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln(2),$$

l'application du théorème de la limite d'une fonction composée donnant

$$\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = 0 \text{ car } \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{|x|} = 1 \text{ et } \lim_{y\to1}\ln(y) = 0.$$

Remarque : puisque la fonction est positive sur l'intervalle d'intégration, on pouvait également prouver l'intégrabilité en utilisant la définition.

4. **Décrire analytiquement l'ensemble fermé suivant en commençant par l'ensemble de variation des ordonnées puis, à ordonnée fixée, l'ensemble de variation des abscisses.**



Solution.
Les points A, B, C et D ont respectivement pour coordonnées $(-2, 0), (0, 1), (0, -1)$ et $(2, 0)$. Les droites qui délimitent l'ensemble ont pour équation $AB \equiv x - 2y + 2 = 0$, $AC \equiv x + 2y + 2 = 0$, et l'ellipse a pour équation $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ ou encore $x^2 + 4y^2 = 4$.
Dès lors, l'ensemble fermé hachuré est décrit analytiquement par

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\in[-1,0],\ x\in[-2y-2, 2\sqrt{1-y^2}]\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\in[0,1],\ x\in[2y-2, 2\sqrt{1-y^2}]\}.$$

5. **(a) La fonction $f : t\mapsto \frac{3}{1+2e^{-t}}$ est-elle solution de l'équation différentielle**

$$Df(t) = \left(1-\frac{f(t)}{3}\right) f(t)?$$

Justifier votre réponse.

Solution. La fonction donnée est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. En appliquant les théorèmes de dérivation, on obtient

$$D\left(\frac{3}{1+2e^{-t}}\right) = \frac{-3(-2e^{-t})}{(1+2e^{-t})^2} = \frac{6e^{-t}}{(1+2e^{-t})^2}.$$

Comme

$$\left(1-\frac{f(t)}{3}\right) f(t) = \left(1-\frac{3}{3(1+2e^{-t})}\right)\frac{3}{1+2e^{-t}} = \frac{1+2e^{-t}-1}{1+2e^{-t}}\cdot\frac{3}{1+2e^{-t}} = \frac{6e^{-t}}{(1+2e^{-t})^2}\ ,$$

la fonction f est bien solution de l'équation différentielle donnée.

(b) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$D^2f(x) - 4f(x) = 1+e^{2x}.$$

Solution. L'équation donnée est une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 2 non homogène.
L'équation homogène associée est $D^2f(x)-4f(x)=0$; le polynôme caractéristique est $z\mapsto z^2-4$ dont les zéros sont -2 et 2. Il s'ensuit que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$c_1\,e^{-2x} + c_2\,e^{2x},\ x\in\mathbb{R}$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

Cherchons une solution particulière sur $\mathbb{R}$ puisque le second membre $g : x\mapsto 1+e^{2x}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Comme g est une somme de deux fonctions, cherchons tout d'abord une solution particulière de $D^2f(x)-4f(x)=1$. On voit immédiatement que la fonction $\frac{-1}{4}$ convient.

Cherchons à présent une solution particulière de $D^2f(x)-4f(x)=e^{2x}$ (*).
Le second membre de cette équation est l'exponentielle polynôme $1.e^{2x}$, produit d'un polynôme de degré 0 et d'une exponentielle dont le coefficient 2 de l'argument est solution simple de l'équation caractéristique. Une solution particulière est donc du type $f_P(x) = Ax\,e^{2x},\ x\in\mathbb{R}$ où A est une constante à déterminer.
Comme $Df_P(x) = A(1+2x)e^{2x}$ et $D^2f_P(x) = 4A(1+x)e^{2x}$, en remplaçant dans (*), on a

$$4A(1+x)e^{2x} - 4Axe^{2x} = e^{2x} \Leftrightarrow 4A(1+x)-4Ax = 1 \Leftrightarrow A = \frac{1}{4}.$$

Ainsi, $f_P(x) = \frac{1}{4}x\,e^{2x},\ x\in\mathbb{R}$ et les solutions de l'équation donnée sont les fonctions

$$c_1\,e^{-2x} + \left(c_2+\frac{1}{4}x\right)e^{2x} - \frac{1}{4},\ x\in\mathbb{R}$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

6. **Rédiger une résolution du problème suivant en justifiant le raisonnement.**
Un tonneau contient 250 litres de vin et pèse alors 250 kg. On remplace une certaine quantité de vin par de l'eau et il pèse alors 257,20 kg. Combien de litres d'eau a-t-on ajoutés si le tonneau vide pèse 24 kg ?

Solution. Soit x le nombre de litres d'eau ajoutés. Il reste donc $(250-x)$ litres de vin. Comme 250 litres de vin pèsent $(250-24)$ kg $=226$ kg, un litre de vin pèse $\frac{226}{250}$ kg. Nous savons aussi qu'un litre d'eau pèse 1kg. En ajoutant le poids du tonneau à celui du vin et de l'eau, on a l'équation

$$\frac{226}{250}(250-x)+x+24=257,2 \Leftrightarrow 226\ .\ 250-226x+250x+250\ .\ 24=250\ .\ 257,2$$

$$\Leftrightarrow 24x=250(257,2-250) \Leftrightarrow x=\frac{250\ .\ 7,2}{24} \Leftrightarrow x=250\ .\ 0,3 \Leftrightarrow x=75.$$

On a donc ajouté 75 l d'eau.

Exercices BIS

1. **Résoudre l'inéquation suivante (x est l'inconnue réelle)**

$$x\ |2-x|\ \leq\ x^3.$$

Solution. Si $x\in]-\infty,2]$, $|2-x|=2-x$ et l'inéquation s'écrit

$$x(2-x)\leq x^3 \Leftrightarrow x(2-x-x^2)\leq 0 \Leftrightarrow x(x+2)(1-x)\leq 0 \Leftrightarrow (-2\leq x\leq 0 \text{ ou } 1\leq x\leq 2).$$

Si $x\in[2,+\infty[$, $|2-x|=x-2$ et l'inéquation s'écrit

$$x(x-2)\leq x^3 \Leftrightarrow x(x-2-x^2)\leq 0,$$

inégalité vraie pour tout réel dans $[2,+\infty[$.

Dès lors, l'ensemble des solutions est $S=[-2,0]\cup[1,+\infty[$.

2. **Si x désigne un réel de l'intervalle $\left]3\pi,\frac{7\pi}{2}\right[$ et si $\mathrm{cotg}(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}$, que valent les nombres**

$$\mathrm{tg}(x),\ \sin(x),\ \cos(x)?$$

Solution. Pour tout réel $x\neq k\frac{\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$, on a $\mathrm{tg}(x)=1/\mathrm{cotg}(x)$. Dès lors, $\mathrm{tg}(x)=\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.
Comme $\mathrm{cotg}^2(x)+1=\dfrac{1}{\sin^2(x)}$, on obtient $\dfrac{3}{4}+1=\dfrac{1}{\sin^2(x)}\Leftrightarrow \sin^2(x)=\dfrac{4}{7}$.
Ensuite, comme $\sin(x)<0$ puisque $x\in\left]3\pi,\frac{7\pi}{2}\right[$, on a $\sin(x)=-\dfrac{2}{\sqrt{7}}=-\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$.
Enfin, comme $\cos(x)=\mathrm{cotg}(x)\sin(x)$, on a $\cos(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(-\dfrac{2\sqrt{7}}{7}\right)=-\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.