1, 2, 3... Sciences

Année académique 2014-2015

Exercices de mathématiques
Mathématiques générales (partim B)

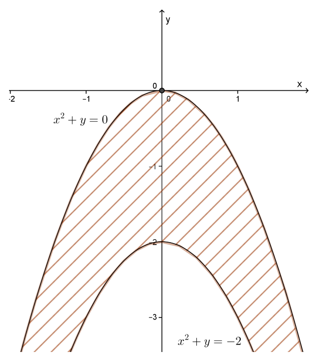
Révisions en vue de l'interrogation du 20 avril 2015 : correction

Version 1er avril 2015

Répétition : correction des exercices de révision

1. **On donne la fonction f par**
$$f : (x, y) \mapsto f(x, y) = \arcos(x^2 + y + 1)$$
   (a) **Déterminer le domaine d'infinie dérivabilité de cette fonction et le représenter dans un repère orthonormé.**

   La fonction f est infiniment dérivable sur $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x^2 + y + 1 < 1\}$. Les points de l'ensemble sont représentés par la partie hachurée du plan, les points des paraboles étant exclus.



   (b) **Calculer la dérivée de f par rapport à sa première variable.**

   La dérivée de f par rapport à sa première variable est donnée par
$$(D_x f)(x, y) = \frac{-2x}{\sqrt{1 - (x^2 + y + 1)^2}}.$$

   (c) **Déterminer l'expression explicite de $F(t) = f(2t, 5t^2 - 1)$, le domaine de dérivabilité de cette fonction et l'expression explicite de sa dérivée en tout point du domaine.**

   La fonction F est la fonction $t \mapsto F(t) = \arcos(9t^2)$, son domaine de dérivabilité est l'ensemble $\left]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right[$ et sa dérivée est donnée par $DF(t) = \dfrac{-18t}{\sqrt{1 - 81t^4}}$.

   (d) **Si F est dérivable en $1/9$, que vaut sa dérivée en ce point ? Simplifier votre réponse au maximum.**

   La dérivée de F en $1/9$ vaut $\dfrac{-9\sqrt{5}}{10}$.

2. **On donne la fonction f continûment dérivable sur $]-\infty, 1[\times]0, 3[$ et à valeurs strictement positives.**

   (a) **Déterminer le domaine de dérivabilité de $g : x \mapsto \ln(f(\ln(2 - x), \sqrt{x}))$.**

   La fonction g est dérivable sur $]0, 2[$.

   (b) **Calculer la dérivée de g en fonction de f et de ses dérivées partielles.**

   La dérivée de g est donnée par
$$Dg(x) = \frac{1}{f(\ln(2 - x), \sqrt{x})} \left[(D_u f)(\ln(2 - x), \sqrt{x}).\frac{1}{x - 2} + (D_v f)(\ln(2 - x), \sqrt{x}).\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right]$$
   si u et v sont respectivement la première et la deuxième variable de f.

(c) **Si g est dérivable en $3/2$, que vaut sa dérivée en ce point ?**

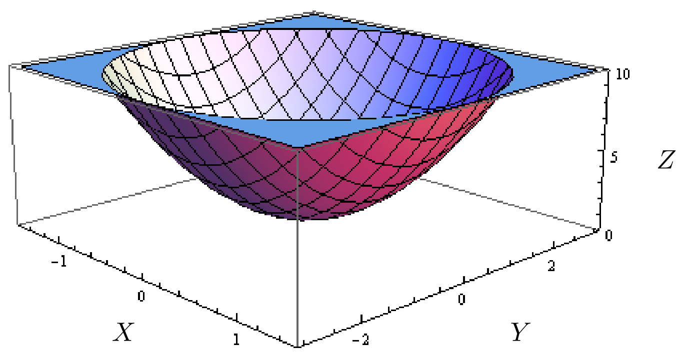
La fonction g est dérivable en $3/2$ car $3/2 \in]0,2[$ et

$$(Dg)\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{f(\ln(\frac{1}{2}), \frac{\sqrt{6}}{2})}\left[(D_u f)\left(\ln(1/2), \frac{\sqrt{6}}{2}\right).(-2) + (D_v f)\left(\ln(1/2), \frac{\sqrt{6}}{2}\right).\frac{\sqrt{6}}{6}\right].$$

3. **(a) Esquisser la représentation graphique de la surface quadrique d'équation**

$$4x^2 + y^2 - z + 1 = 0.$$

Voici la représentation de cette surface.



(b) Quel est le nom de cette quadrique ?

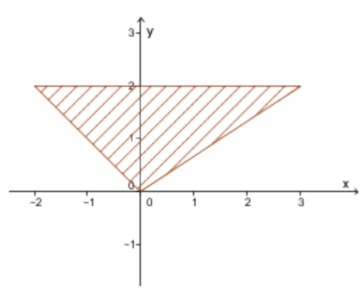
Cette quadrique est un paraboloïde elliptique.

(c) Calculer le volume du corps borné par les plans de coordonnées, le plan d'équation $2x + y = 1$ et la surface donnée ci-dessus.

La fonction $f : (x,y) \mapsto 4x^2 + y^2 + 1$ est intégrable sur $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, \frac{1}{2}],\ y \in [0, 1-2x]\}$ car elle est continue sur cet ensemble fermé borné et le volume demandé vaut $1/3$ (de l'unité de volume).

4. **On donne l'ensemble fermé hachuré A suivant. Déterminer**

$$\iint_A y\, e^{y-2x} dx\, dy.$$



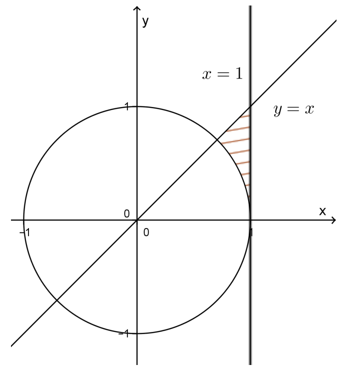
La fonction $f : (x,y) \mapsto ye^{y-2x}$ est continue sur le fermé borné $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R} : y \in [0,2], x \in \left[-y, \frac{3y}{2}\right]\right\}$; elle est donc intégrable sur cet ensemble et on a

$$\iint_A ye^{y-2x} dx\, dy = \frac{5e^6}{18} + \frac{5}{8e^4} - \frac{5}{72}.$$

5. **Calculer, si possible l'intégrale suivante**

$$\iint_A \frac{x^2+y^2}{xy}\,dx\,dy,$$

où A est l'ensemble fermé hachuré ci-dessous.



La fonction $f:(x,y)\mapsto \dfrac{x^2+y^2}{xy}$ est continue sur $\mathbb{R}_0\times\mathbb{R}_0$ donc sur $A\setminus\{(1,0)\}$ borné non fermé.

Comme la fonction

$$(r,\theta)\mapsto f(r\cos(\theta),r\sin(\theta))\,r=\frac{r}{\cos(\theta)\sin(\theta)}$$

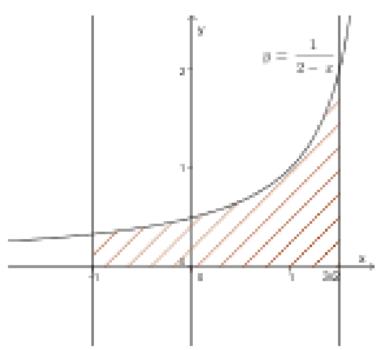
est intégrable sur $A'=\{(r,\theta):\theta\in]0,\pi/4]\,\text{et}\,1\le r\le 1/\cos(\theta)\}$, la fonction f est intégrable sur A par le théorème d'intégration par changement de variables avec le changement de variables polaires. Dès lors, on a

$$\iint_A \frac{x^2+y^2}{xy}\,dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_1^{\frac{1}{\cos(\theta)}}\frac{r}{\cos(\theta)\sin(\theta)}\,dr\right)d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin(\theta)}{\cos^3(\theta)}\,d\theta=\frac{1}{4}.$$

6. **La fonction f étant supposée intégrable, permuter l'ordre d'intégration après avoir représenté l'ensemble d'intégration si**

$$I=\int_{-1}^{\frac{3}{2}}\left(\int_0^{\frac{1}{2-x}} f(x,y)\;dy\right)\;dx.$$

Voici la représentation graphique de l'ensemble d'intégration



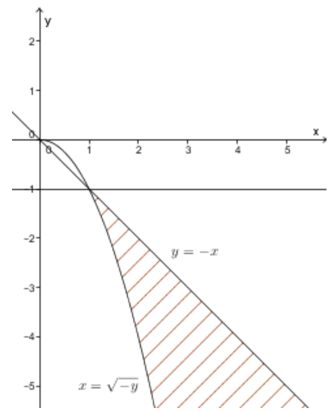
En permutant l'ordre d'intégration, comme f est intégrable, on obtient

$$I=\int_0^{\frac{1}{3}}\left(\int_{-1}^{\frac{3}{2}} f(x,y)\,dx\right)\,dy+\int_{\frac{1}{3}}^{2}\left(\int_{\frac{2y-1}{y}}^{\frac{3}{2}} f(x,y)\,dx\right)\,dy.$$

7. **Soient** $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq -1\,,\ \sqrt{-y} \leqslant x \leqslant -y\}$ **et** $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < x < 0\}$**. Calculer, si possible, les intégrales suivantes et représenter leurs ensembles d'intégration.**

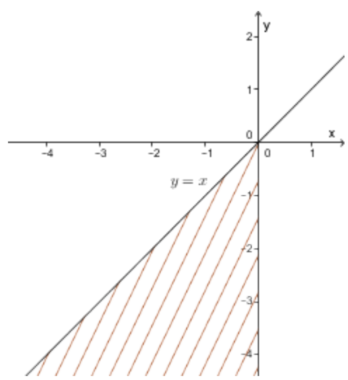
a) $\displaystyle\iint_A \frac{x^2 y}{(4x^2+y^2)^2}\, dx\, dy$ b) $\displaystyle\iint_B \sin(x-y)\, e^y\, dx\, dy$ c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\int_x^{2x} \frac{xe^{-y}}{y}\, dy \right) dx.$

a) La fonction $f : (x,y) \mapsto \frac{x^2 y}{(4x^2+y^2)^2}$ est continue et négative sur l'ensemble d'intégration A (ensemble hachuré ci-dessous) mais elle n'y est pas intégrable.



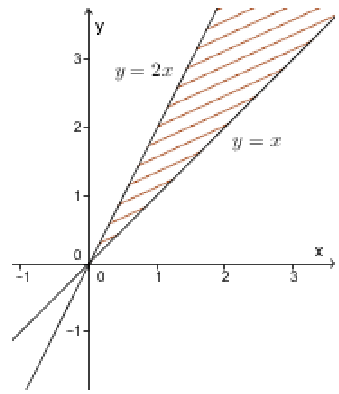
b) La fonction $f : (x,y) \mapsto \sin(x-y)\, e^y$ est continue sur l'ensemble d'intégration B (ensemble hachuré ci-dessous) non borné fermé. En majorant $|\sin(x-y)|$ par 1 et en appliquant le critère de comparaison, on prouve que f est intégrable sur B. Dès lors, en effectuant l'intégrale, on obtient

$$\iint_B \sin(x-y)\, e^y\ dx\ dy = \int_{-\infty}^0 \left(\int_y^0 \sin(x-y)\, e^y\ dx \right) dy = \frac{1}{2}.$$



c) La fonction $f : (x,y) \mapsto \frac{xe^{-y}}{y}$ est continue et positive sur l'ensemble d'intégration C (ensemble hachuré ci-dessous) dont on exclut $(0,0)$. On peut vérifier facilement l'intégrablilité de f après permutation de l'ordre d'intégration. Dès lors, les intégrales dans un ordre ou dans l'autre sont égales et on a

$$\int_0^{+\infty} \left(\int_x^{2x} \frac{xe^{-y}}{y}\ dy \right)\ dx = \int_0^{+\infty} \left(\int_{\frac{y}{2}}^{y} \frac{xe^{-y}}{y}\ dx \right)\ dy = \frac{3}{8}.$$



8. **La matrice** $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$ **est-elle diagonalisable ? Pourquoi ?**
   Si oui, en déterminer une forme diagonale Δ ainsi qu'une matrice inversible S qui y conduit.
   La matrice M possède 3 valeurs propres simples $i,\ 1$ et -1 ; M est donc diagonalisable.
   On a, par exemple, $\Delta = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ avec $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

9. **Soient les matrices A et B données par**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{i} \\ 0 & i^3 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B^* = \begin{pmatrix} (1-i)^2 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & i^6 \end{pmatrix}.$$

   Si possible, effectuer les opérations suivantes et simplifier la réponse au maximum :

   1) $A + \widetilde{B}$ **2)** $C = AB$ **3)** C^{-1} **4)** $\det(A)$.

   Les matrices étant carrées et de même dimension, on peut calculer $A + \widetilde{B}$ et $C = AB$. On a

$$A + \widetilde{B} = \begin{pmatrix} 2i & i & -i \\ 0 & -2i & 0 \\ i & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Comme $\det(C) = -2i \neq 0$, la matrice C^{-1} existe et on a

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Enfin, on a $\det(A) = i$.