1, 2, 3... Sciences

Année académique 2014-2015

Exercices de mathématiques
Mathématiques générales (partim B)

Répétition 14 Chimie, Géographie, Informatique, Physique : correction

Version 4 mai 2015

Analyse vectorielle

1. **On donne les équations paramétriques suivantes de courbes du plan. Esquisser chacune de ces courbes et en donner une équation cartésienne.**

a) $\begin{cases} x(t) = 1 - 2t \\ y(t) = -3 + 4t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

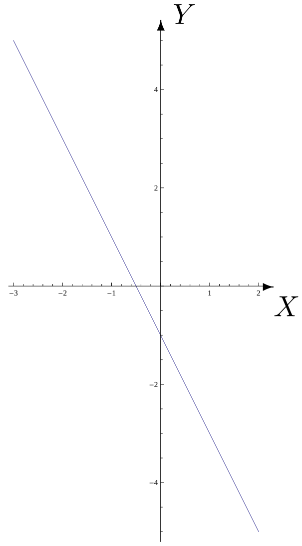
d) $\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \sqrt{1 - t^2} \end{cases}$, $t \in [-1, 1]$

b) $\begin{cases} x(t) = 2\cos(t) \\ y(t) = 2\sin(t) \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

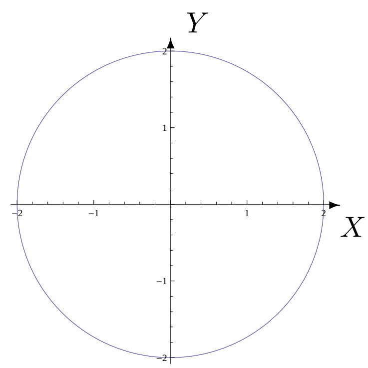
e) $\begin{cases} x(t) = -1 + \frac{3}{2}\sin(t) \\ y(t) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\cos(t) \end{cases}$, $t \in [-\pi, 3\pi]$

c) $\begin{cases} x(t) = 2\cos(t) \\ y(t) = 4\sin(t) \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

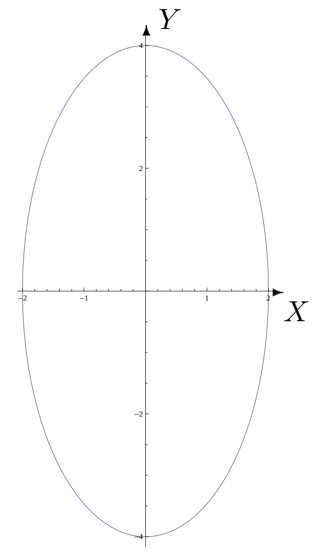
f) $\begin{cases} x(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \\ y(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$



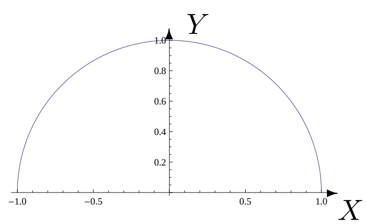
a) $2x + y + 1 = 0$



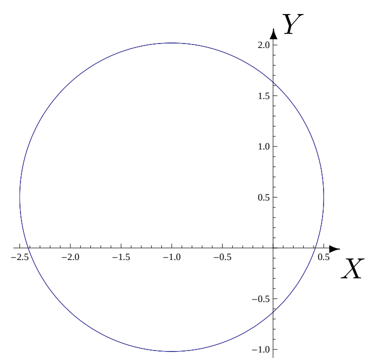
b) $x^2 + y^2 = 4$



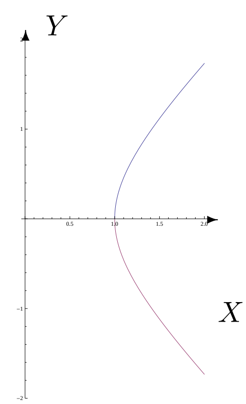
c) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$



d) $y = \sqrt{1 - x^2},\ x \in [-1, 1]$



e) $(x+1)^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{9}{4}$

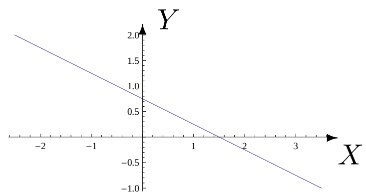


f) $x^2 - y^2 = 1,\ x \in [1, +\infty[$

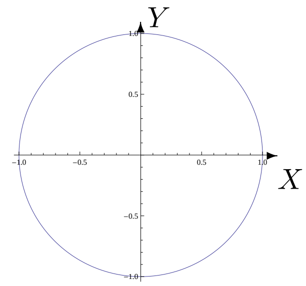
2. **On donne les équations cartésiennes suivantes de courbes du plan. Esquisser chacune de ces courbes et en donner des équations paramétriques.**

a) $2x + 4y - 3 = 0$ c) $x^2 + y^2 - 4y = 0$

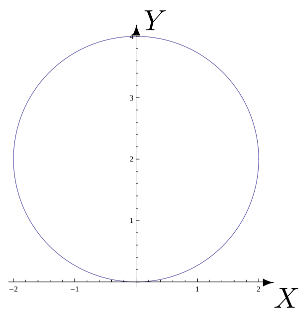
b) $x^2 + y^2 = 1$ d) $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$



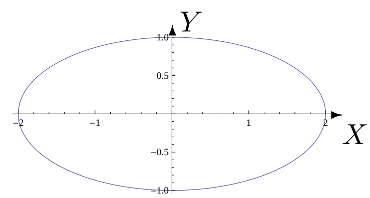
a) $\begin{cases} x = 2t \\ y = -t + \frac{3}{4} \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$



b) $\begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \end{cases}$, $t \in [0, 2\pi]$



c) $\begin{cases} x = 2\cos(t) \\ y = 2\sin(t) + 2 \end{cases}$, $t \in [0, 2\pi]$



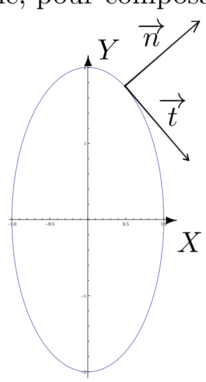
d) $\begin{cases} x = 2\cos(t) \\ y = \sin(t) \end{cases}$, $t \in [0, 2\pi]$

3. a) **Déterminer un vecteur normal ainsi qu'un vecteur tangent à la courbe plane d'équation cartésienne $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ au point de coordonnées $(\frac{1}{2}, \sqrt{3})$. Donner une représentation de la courbe et de ces vecteurs.**

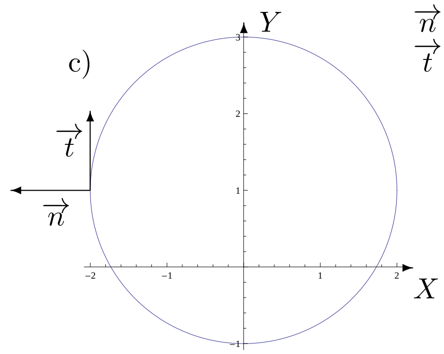
b) **Faire de même pour la courbe plane d'équation cartésienne $x^2+y^2-2y-3 = 0$ au point de coordonnées $(-2, 1)$.**

a) En calculant le gradient de $f : (x, y) \mapsto f(x, y) = x^2 + \frac{y^2}{4} - 1$, on obtient, par exemple, un vecteur normal $\overrightarrow{n}$ de composantes $(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ dans un repère orthonormé. Un vecteur tangent $\overrightarrow{t}$ est obtenu en prenant un vecteur orthogonal au vecteur normal ci-dessus ; il a, par exemple, pour composantes $(\frac{\sqrt{3}}{2}, -1)$.

b)



c)



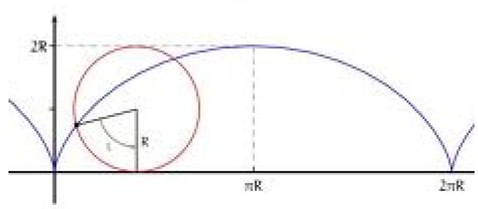
$\overrightarrow{n}$ $(-1, 0)$
$\overrightarrow{t}$ $(0, 1)$

4. **Déterminer la longueur des courbes données ci-dessous.**

a) **L'hélice circulaire située sur un cylindre de rayon R et qui tourne une seule**

fois autour de ce dernier, la hauteur de chacun de ses points étant proportionnelle à l'angle de la portion du tour parcourue.

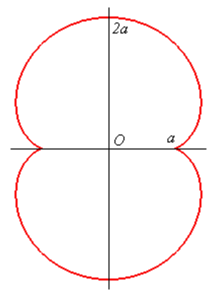
b) **La trajectoire (représentée ci-dessous) décrite par un point fixé sur une roue de rayon $R = 1$ lorsque cette dernière effectue un tour complet (arcade de cycloïde).**



Cycloïde de rayon R

c) **L'épicycloïde à 2 rebroussements (représentée ci-dessous) dont une représentation paramétrique est**

$$(3\cos(t) - \cos(3t), 3\sin(t) - \sin(3t)),\ t \in [0, 2\pi].$$



Epicycloïde à 2 rebroussements, aussi appelée néphroïde

a) Si on considère la représentation paramétrique $(R\cos(t),\ R\sin(t),\ ht)$ $(t \in [0, 2\pi])$, la hauteur de l'hélice valant $2\pi\, h$, la longueur demandée vaut $2\pi\sqrt{R^2 + h^2}$ (unités de longueur).
b) Si on considère la représentation paramétrique $(t - \sin(t),\ 1 - \cos(t))$ $(t \in [0, 2\pi])$, la longueur demandée vaut 8 (unités de longueur).
c) La longueur demandée vaut 24 (unités de longueur).

5. **Calculer les intégrales sur les courbes suivantes.**

a) $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} y^2\, ds$ **où $\mathcal{C}$ est le cercle centré en $(0, 0)$ et de rayon 1.**

b) $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} (x + y)\, ds$ **où $\mathcal{C}$ est le cercle centré en $(2, 1)$ et de rayon 2.**

c) $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} y^2\, ds$ **où $\mathcal{C}$ est l'arcade de cycloïde considérée à l'exercice 4.b).**

Les intégrales valent respectivement π, 12π et $256/15$.

6. **Calculer les intégrales curvilignes suivantes.**

a) $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} y^2\, dx$ **et** $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} y^2\, dy$ **où $\mathcal{C}$ est le cercle centré en $(0, 0)$ et de rayon 1.**

Comparer ensuite ces deux intégrales à celle calculée à l'exercice 5.a).

b) $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} ydx + xdy$ **où** $\mathcal{C}$ **est le cercle centré en** $(0,0)$ **et de rayon** R**.**

c) $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \frac{xdx + ydy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$ **où** $\mathcal{C} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \dfrac{y^2}{9} = 1,\ x,y \geq 0\right\}$.

a) Les deux intégrales valent 0. On constate donc que même si l'intégrand et la courbe sur laquelle on intègre sont les mêmes, les résultats diffèrent.
b) L'intégrale vaut 0.
c) L'intégrale vaut $\sqrt{10} - \sqrt{2}$.

7. **On désigne par** $\overrightarrow{e_x}$ **et** $\overrightarrow{e_y}$ **les vecteurs d'une base orthormée du plan. Une particule qui se déplace dans le plan est soumise à la force**

$$\overrightarrow{F} = (x - ay)\overrightarrow{e_x} + (3y - 2x)\overrightarrow{e_y}.$$

Calculer (en fonction du paramètre a**) le travail exercé par cette force**
a) **si la particule se déplace en ligne droite de l'origine au point de coordonnées** $(2,4)$ **;**
b) **si la particule effectue un tour le long d'un cercle centré à l'origine et de rayon** 2 **(dans le sens trigonométrique).**

a) Le travail exercé par la force (c'est-à-dire l'intégrale curviligne de F le long du segment) vaut $18 - 4a$.
b) Le travail exercé par la force (c'est-à-dire l'intégrale curviligne de F le long du cercle) vaut $4\pi(a-2)$.