
Université
de Liège



1, 2, 3...Sciences

Année académique 2014-2015

EXERCICES DE MATHÉMATIQUES
RÉVISIONS EN VUE DE L'EXAMEN DU 16/01/2015 : CORRECTION

Exercices divers

1. Résoudre les équations et inéquations suivantes (pour (c) et (d), on suppose que $x \in [\pi, 3\pi]$)

(a) $3x|x - 2| = x - 2$

(b) $\frac{|1-x|}{x^2-1} \geq x - 1$

(c) $\cos(3x) - \sin(x) = 0$

(d) $\sin(2x) \leq \sin(x)$

Solution. Les ensembles S de solutions sont les suivants :

(a) $S = \{-1/3, 2\}$ (b) $S =]-\infty, -1[\cup \{0\} \cup]1, \sqrt{2}]$

(c) $S = \left\{ \frac{9\pi}{8}, \frac{13\pi}{8}, \frac{7\pi}{4}, \frac{17\pi}{8}, \frac{21\pi}{8}, \frac{11\pi}{4} \right\}$ (d) $S = \{\pi\} \cup \left[\frac{5\pi}{3}, 2\pi \right] \cup \left[\frac{7\pi}{3}, 3\pi \right]$

2. Si elles sont définies, simplifier au maximum les expressions suivantes :

(a) $\cos(\ln(e^{-2\pi/3})) + \sin(\operatorname{tg}(3\pi/4))$

(b) $\arcsin(1 - \cos(7\pi/6)) + \arccos(\cos(4\pi/3))$

Solution. La première expression est définie et vaut $-\frac{1}{2} - \sin(1)$; la deuxième n'est pas définie.

3. Dans un repère orthonormé, on donne les points A, B, C dont les coordonnées sont $A(-1, 0, 3)$, $B(1, 2, -1)$ et $C(4, 1, 2)$. Calculer

(a) $3\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$

(b) les composantes de $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BC}$

(c) les composantes de la projection orthogonale de \overrightarrow{AC} sur \overrightarrow{BC} .

Solution. Le produit scalaire vaut -24 et le produit vectoriel est le vecteur de composantes $(2, -18, -8)$.

La projection orthogonale de \overrightarrow{AC} sur \overrightarrow{BC} est le vecteur de composantes $\left(\frac{33}{19}, -\frac{11}{19}, \frac{33}{19} \right)$

4. Si elles existent, déterminer les limites suivantes

(a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\ln(2x+3)}{x+1}$

(b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|1+x|}{\sqrt{1-x^2}}$

(c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} \left(\frac{x^3-1}{-2x} \right)$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\exp(-3x)-1}{2x}$

(e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\ln(-5x-1) - \ln|ex|)$

(f) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 4x^2 + x + 6}{x^2 - 1}$

Solution. Les limites peuvent toutes être envisagées sauf la limite (b). Elles valent respectivement 2 , π^- , $-\frac{3}{2}$, $\ln(5) - 1$ et -6 .

5. Démontrer par récurrence que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{ax}}{x^n} = +\infty$ avec $a > 0$ et $n \in \mathbb{N}$.

En déduire que $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^n e^{ax}) = 0$.

On résume ces 2 propriétés en disant que “à l’infini, la fonction exponentielle domine toute puissance antagoniste de x ”.

6. Où la fonction $x \mapsto \arccos(\sqrt{1-x^2})$ est-elle définie ? dérivable ? En déterminer la dérivée première.

Solution. La fonction est définie sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $] -1, 0[\cup]0, 1[$; sa dérivée première est la fonction

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si } x \in] -1, 0[\\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si } x \in]0, 1[\end{cases}$$

7. Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier la réponse au maximum.

(a) $\int_{-2}^{-1} \frac{\ln(-3x)}{x} dx$

(b) $\int_{-\infty}^0 x e^{3x} dx$

(c) $\int_{-\infty}^1 \frac{1}{2-x} dx$

(d) $\int_{-4}^4 \sqrt{x^2} dx$

(e) $\int_4^5 \frac{2}{x(x^2-6x+9)} dx$

Solution. Toutes les fonctions sont intégrables sur l’intervalle considéré sauf la fonction $x \mapsto \frac{1}{2-x}$ qui n’est pas intégrable en $-\infty$. Les intégrales valent respectivement

(a) $-\frac{1}{2} \ln 18 \cdot \ln 2$

(b) $-\frac{1}{9}$

(d) 16

(e) $\frac{2}{9}(\ln 5 - 3 \ln 2) + \frac{1}{3}$

8. Résoudre les équations suivantes dans \mathbb{C} .

(a) $x^2 + 2 = -ix$

(b) $27 + x^3 = 0$

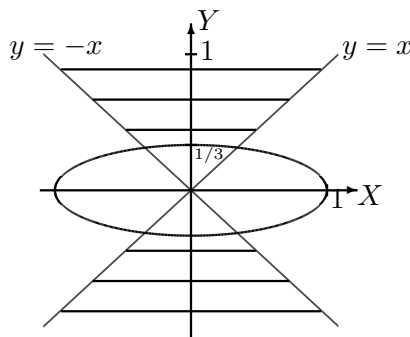
Solution. Les ensembles S de solutions sont les suivants :

(a) $S = \{-2i, i\}$

(b) $S = \{-3, \frac{3(1-i\sqrt{3})}{2}, \frac{3(1+i\sqrt{3})}{2}\}$

9. Représenter dans un repère orthonormé l’ensemble dont une description analytique est la suivante

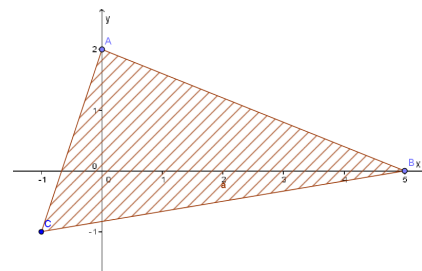
$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 \geq x^2 \geq 1 - 9y^2\}.$$



Les points de l’ensemble sont ceux de la partie hachurée.
Les points des bords sont compris dans l’ensemble.

10. Décrire analytiquement l'ensemble fermé hachuré suivant

- (1) en commençant par l'ensemble de variation des abscisses puis, à abscisse fixée, l'ensemble de variation des ordonnées
- (2) idem mais en commençant par l'ensemble de variation des ordonnées.



Solution.

a) Les trois sommets de ce triangle sont les points A, B, C de coordonnées respectives $(0, 2)$, $(5, 0)$ et $(-1, -1)$. Les droites qui délimitent le triangle ont pour équation $AB \equiv 2x + 5y - 10 = 0$, $AC \equiv 3x - y + 2 = 0$, $BC \equiv x - 6y - 5 = 0$.
Dès lors, l'ensemble fermé hachuré est décrit analytiquement par

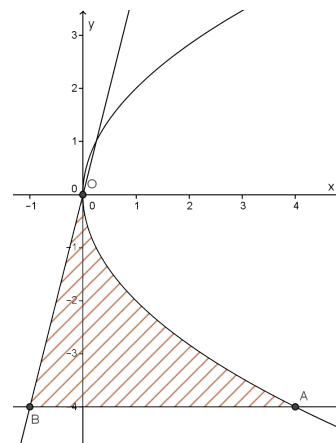
$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 0], y \in \left[\frac{x-5}{6}, 3x+2 \right] \right\} \cup \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 5], y \in \left[\frac{x-5}{6}, \frac{-2x+10}{5} \right] \right\}.$$

b) L'ensemble fermé hachuré est également décrit analytiquement par

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1, 0], x \in \left[\frac{y-2}{3}, 6y+5 \right] \right\} \cup \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, 2], x \in \left[\frac{y-2}{3}, \frac{-5y+10}{2} \right] \right\}.$$

11. Décrire analytiquement l'ensemble fermé hachuré suivant

- (1) en commençant par l'ensemble de variation des abscisses puis, à abscisse fixée, l'ensemble de variation des ordonnées
- (2) idem mais en commençant par l'ensemble de variation des ordonnées.



Solution.

a) Les trois points A, B, O sont respectivement de coordonnées $(4, -4)$, $(-1, -4)$ et $(0, 0)$. Les droites qui délimitent l'ensemble ont pour équation $AB \equiv y = -4$, $BO \equiv 4x - y = 0$. La parabole a pour équation $y^2 = 4x$; dès lors, la courbe délimitant l'ensemble a pour équation $y = -2\sqrt{x}$.

L'ensemble fermé hachuré est donc décrit analytiquement par

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 0], y \in [-4, 4x]\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 4], y \in [-4, -2\sqrt{x}]\}.$$

b) L'ensemble fermé hachuré est également décrit analytiquement par

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-4, 0], x \in \left[\frac{y}{4}, \frac{y^2}{4} \right] \right\}.$$

12. Déterminer l'ensemble des solutions dse équations différentielles suivantes (f est la fonction inconnue)

$$a) D^2f(x) + f(x) = e^{ix} \quad b) 9D^2f(x) + 6Df(x) + f(x) = \sin\left(\frac{x}{3}\right)$$

Solution. a) L'équation donnée est une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 2 non homogène.

L'équation homogène associée est $D^2f(x) + f(x) = 0$; le polynôme caractéristique est $z \mapsto z^2 + 1$ et ses zéros sont i et $-i$. Il s'ensuit que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$c_1e^{ix} + c_2e^{-ix}, \quad x \in \mathbb{R}$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

Le second membre, fonction continue sur \mathbb{R} , est une exponentielle $e^{\alpha x}$ avec $\alpha = i$, solution simple de l'équation caractéristique. Une solution particulière est donc du type $f_P(x) = Ax e^{ix}$, $x \in \mathbb{R}$ où A est une constante à déterminer. Comme

$$Df_P(x) = A(1 + ix)e^{ix} \text{ et } D^2f_P(x) = A(2i - x)e^{ix},$$

en remplaçant dans l'équation, on a

$$A(2i - x)e^{ix} + Ax e^{ix} = e^{ix}$$

et, en simplifiant, on obtient $A = -i/2$.

Ainsi, $f_P(x) = \frac{-i}{2}x e^{ix}$, $x \in \mathbb{R}$ et les solutions de l'équation donnée sont les fonctions

$$c_2e^{-ix} + \left(c_1 - \frac{i}{2}x\right) e^{ix}, \quad x \in \mathbb{R}$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

b) Les solutions de l'équation donnée sont les fonctions

$$(c_1x + c_2)e^{-\frac{x}{3}} - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{x}{3}\right), \quad x \in \mathbb{R}$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

Problèmes élémentaires

1. La distance de freinage (en mètres) d'une voiture roulant à v km/h sur sol sec est donnée par

(a) $\left(\frac{v}{10}\right)^2 + \frac{v}{2}$ si cette voiture est équipée de freins normaux

(b) v si cette voiture est équipée de freins ABS spéciaux.

Déterminer les vitesses pour lesquelles la voiture équipée de freins ABS est plus performante quant à la distance de freinage.

Solution. La voiture équipée de freins ABS est plus performante pour des vitesses strictement supérieures à 50 km/h.

2. Lors d'une interrogation, un étudiant doit répondre à 100 questions d'un QCM. Pour toute réponse correcte, il obtient 1 point et pour toute réponse incorrecte, on lui retire 0,25 point. Sachant qu'il obtient 53,75 points comme cote finale et qu'il est obligé de répondre à toutes les questions, quel est le nombre de réponses correctes fournies ?

Solution. L'étudiant a fourni 63 réponses correctes.

Maths en sciences

1. La pression de la vapeur d'eau saturée dépend de la température suivant une loi de la forme $p = aT^2 + bT + c$ (a, b, c étant réels). Nous disposons des valeurs suivantes :

T (C)	0	10	20
p (Torr)	4.6	9.2	17.5

Calculer les coefficients a, b et c .

Solution. Les coefficients a, b et c valent respectivement 0,0185, 0,275 et 4,6.

2. Il a été prouvé expérimentalement que le radium se désintègre au cours du temps en obéissant à la formule $m(t) = m_0 e^{-0,000436t}$, où m_0 représente la masse initiale du radium et $m(t)$ sa masse après t années. Calculer la "période de désintégration" du radium, c'est-à-dire le laps de temps pendant lequel se désintègre la moitié de la masse initiale (N.B. : $\ln 2 \approx 0,7$).

Solution. Comme $\ln 2 \approx 0,7$, la période de désintégration du radium vaut $\frac{\ln(2) \cdot 10^4}{4,36} \approx 1606$ années.

3. Un point matériel se déplace à la vitesse $v = 2t + 4$ cm/s. Calculer la distance parcourue après les 10 premières secondes si le temps t est exprimé en secondes.

Solution. Après les 10 premières secondes, le point a parcouru 140 cm.

4. En physique, le travail exercé par une force F pour déplacer un point matériel d'un point P_1 , situé à une distance d_1 de son point d'application, à un point P_2 , situé à une distance d_2 de son point d'application, est donné par l'intégrale suivante :

$$W = \int_{d_1}^{d_2} F(x) dx.$$

Fort de ce constat, soient deux charges électrique $e_1 = 1$ et $e_2 = e$, distantes entre elles de x . La loi de Coulomb affirme que la charge e agit sur la charge unité avec une force de valeur absolue égale à $\frac{e}{x^2}$. Calculer le travail W de cette force lorsque la charge unité se déplace d'un point P_1 situé à la distance r de cette charge e jusqu'à un autre point P_2 où l'éloignement devient égal à R . En déduire le potentiel de la charge e au point P_1 (sachant que le potentiel est égal à la limite du travail W lorsque R tend vers $+\infty$).

Solution. Le travail de la force pour le déplacement considéré de la charge unité vaut $\frac{(R-r)e}{Rr}$.

Le potentiel de la charge e au point P_1 vaut e/r .

5. **Soit un ressort à boudin qui s'allonge de 1 mm pour un effort de traction de 30 N. Calculer le travail qu'il faut développer pour allonger le ressort de 20 mm, sachant que la force de traction est à chaque instant proportionnelle au déplacement.**

Solution. Le travail à développer pour allonger le ressort de 20 mm vaut 6 J.

QCM

- Le carré d'un nombre complexe est toujours
 - un nombre positif
 - un nombre négatif
 - un nombre imaginaire pur
 - ♣ aucune réponse correcte
- La partie réelle du produit de deux nombres complexes est toujours égale
 - au produit des parties réelles de ces nombres
 - à la somme des parties réelles de ces nombres
 - à la somme de la partie réelle de l'un et de la partie imaginaire de l'autre
 - au produit de la partie réelle de l'un et de la partie imaginaire de l'autre
 - ♣ aucune réponse correcte
- La valeur absolue de la somme de deux réels est toujours
 - inférieure ou égale à la différence entre les valeurs absolues de ces réels
 - ♣ inférieure ou égale à la somme des valeurs absolues de ces réels
 - supérieure ou égale à la somme des valeurs absolues de ces réels
 - supérieure ou égale à la moitié du produit de ces réels
 - aucune réponse correcte
- Si f est définie sur \mathbb{R} , le graphique de $F(x) = f(-x)$, $x \in \mathbb{R}$ est
 - le symétrique du graphique de f par rapport à la première bissectrice
 - le symétrique du graphique de f par rapport à l'axe X
 - ♣ le symétrique du graphique de f par rapport à l'axe Y
 - le symétrique du graphique de f par rapport à l'origine
 - aucune réponse correcte
- L'ensemble des solutions de l'inéquation $|x|^3 < |x|^2$ est l'ensemble
 - $[-1, 1[$
 - $\{x \in \mathbb{R} : |x| < 1\}$
 - ♣ $] -1, 1[\setminus \{0\}$
 - $] -\infty, -1[$

- (d) aucune réponse correcte
6. Dans le plan muni d'un repère, une droite a toujours une équation cartésienne du type $y = mx + p$
- (a) vrai
- ♣ faux
7. Le cube d'un réel non nul et de son opposé sont toujours égaux
- (a) vrai
- ♣ faux
8. Etant donné deux vecteurs non nuls, tout autre vecteur du plan peut se décomposer de manière unique comme combinaison linéaire de ceux-ci.
- (a) vrai
- ♣ faux
9. Le produit de deux fonctions croissantes est une fonction croissante
- (a) vrai
- ♣ faux
10. Le domaine de définition de la fonction donnée par $\cos(\cos x)$ est l'intervalle $[-1,1]$
- (a) vrai
- ♣ faux