1, 2, 3... Sciences

Année académique 2014-2015

Mathématiques générales B : corrigé du test 1

Version 16 février 2015

Test 1 du 18-2-2015

1. **En appliquant la définition de la dérivabilité, dire si la fonction f donnée explicitement par**

$$f(x,y) = x - |3 - y^2|$$

est dérivable par rapport à sa deuxième variable au point $(3,2)$.
Si oui, donner la valeur de cette dérivée partielle en ce point.

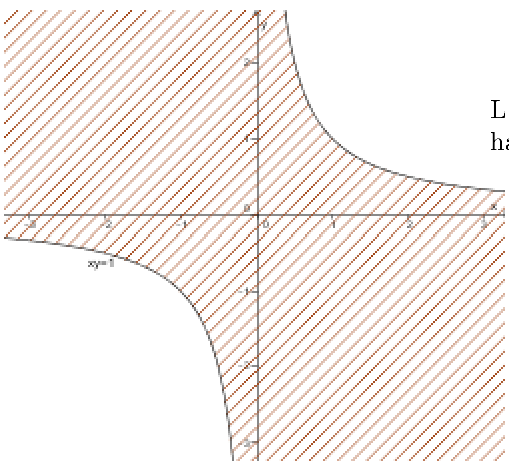
Solution. Comme f est défini sur $\mathbb{R}^2$, que $f(3,y) = 3 - |3 - y^2|$, que $f(3,2) = 3 - |3-4| = 2$ et que $|3 - y^2| = -3 + y^2$ si $y \in \mathbb{R} \setminus \,]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[$, on a

$$\lim_{y \to 2} \frac{f(3,y) - f(3,2)}{y-2} = \lim_{y \to 2} \frac{3 - |3 - y^2| - 2}{y-2} = \lim_{y \to 2} \frac{3 + 3 - y^2 - 2}{y-2} = -\lim_{y \to 2} \frac{(2-y)(2+y)}{y-2} = -4.$$

Puisque la limite existe et est finie, la fonction f est dérivable par rapport à sa deuxième variable au point $(3,2)$ et sa dérivée vaut -4.

2. **On donne la fonction f explicitement par $f(x,y) = \ln(1 - xy)$. Déterminer ses domaines de définition et de dérivabilité et les représenter dans un repère orthonormé.**

Solution. Le domaine de définition de f est l'ensemble $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 - xy > 0\right\}$. Le domaine de dérivabilité de f est aussi cet ensemble.



L'ensemble A est l'ensemble des points de la partie hachurée, les points de l'hyperbole étant exclus.

Test 1 du 19-2-2015

1. **En appliquant la définition des dérivées, dire si la fonction donnée explicitement par**

$$f(x,y) = \frac{y^2 - 3xy}{x - y}$$

est dérivable par rapport à sa première variable au point $(1,3)$**.**
Si oui, donner la valeur de cette dérivée partielle en ce point.

Solution. Comme f est défini sur $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y\right\}$, que $f(x,3) = \dfrac{9-9x}{x-3}$ et $f(1,3) = \dfrac{9-9}{1-3} = 0$, on a

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x,3) - f(1,3)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{9-9x}{x-3}}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{-9(x-1)}{(x-3)(x-1)} = \frac{-9}{-2} = \frac{9}{2}.$$

Puisque la limite existe et est finie, la fonction f est dérivable par rapport à sa première variable au point $(1,3)$ et sa dérivée vaut $\frac{9}{2}$.

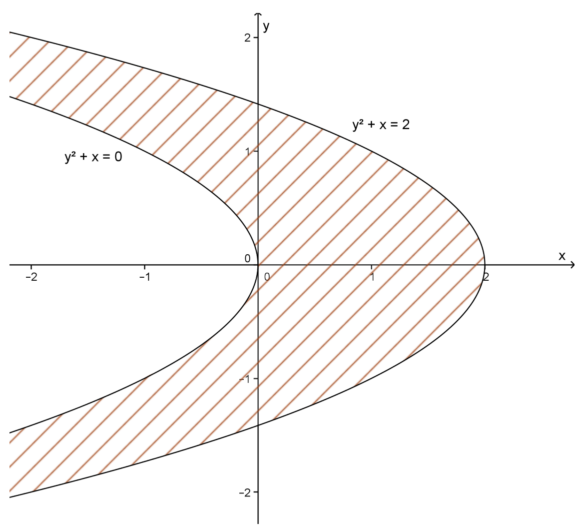
2. **On donne la fonction** f **explicitement par** $f(x,y) = \arccos(x + y^2 - 1)$**. Déterminer ses domaines de définition et de dérivabilité et les représenter dans un repère orthonormé.**

Solution. Le domaine de définition de f est l'ensemble

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x + y^2 - 1 \leq 1\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x + y^2 \leq 2\right\}.$$

Le domaine de dérivabilité de f est l'ensemble

$$B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x + y^2 - 1 < 1\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x + y^2 < 2\right\}.$$



L'ensemble A est l'ensemble des points situés entre les paraboles (partie hachurée), ceux des paraboles étant compris dans A. L'ensemble B est l'ensemble des points situés entre les paraboles, ceux des paraboles étant exclus de B.

Test 1 du 20-2-2015

1. **En appliquant la définition de la dérivabilité, dire si la fonction f donnée explicitement par**

$$f : (x, y) \mapsto f(x, y) = \frac{2x^2y}{x + y}$$

est dérivable par rapport à sa première variable au point $(-1, 2)$.
Si oui, donner la valeur de cette dérivée partielle en ce point.

Solution. Comme f est défini sur $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq -y\}$, que $f(x, 2) = \dfrac{4x^2}{x + 2}$ et $f(-1, 2) = \dfrac{4}{-1 + 2} = 4$, on a

$$\lim_{x\to-1} \frac{f(x, 2) - f(-1, 2)}{x + 1} = \lim_{x\to-1} \frac{\frac{4x^2}{x+2} - 4}{x + 1} = \lim_{x\to-1} \frac{4(x^2 - x - 2)}{(x + 2)(x + 1)}$$
$$= \lim_{x\to-1} \frac{4(x + 1)(x - 2)}{(x + 2)(x + 1)} = \lim_{x\to-1} \frac{4(x - 2)}{x + 2} = -12.$$

Puisque la limite existe et est finie, la fonction f est dérivable par rapport à sa première variable au point $(-1, 2)$ et sa dérivée vaut -12.

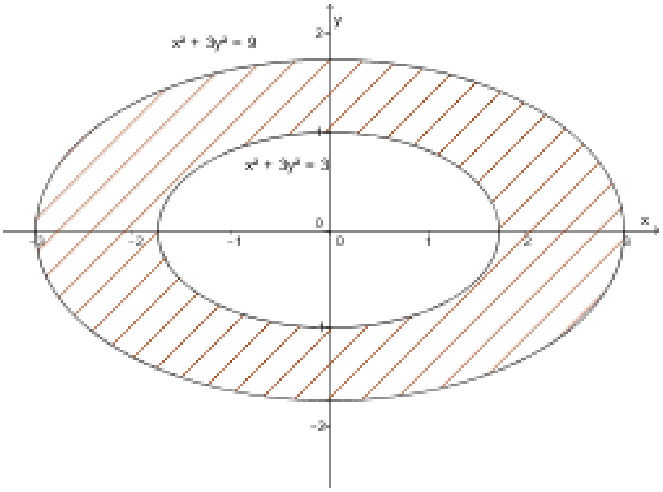
2. **On donne la fonction f explicitement par $f(x, y) = \arcsin\left(\dfrac{x^2}{3} + y^2 - 2\right)$. Déterminer ses domaines de définition et de dérivabilité et les représenter dans un repère orthonormé.**

Solution. Le domaine de définition de g est l'ensemble

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; -1 \leq \frac{x^2}{3} + y^2 - 2 \leq 1\right\} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; 1 \leq \frac{x^2}{3} + y^2 \leq 3\right\}.$$

Le domaine de dérivabilité de g est l'ensemble

$$B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; -1 < \frac{x^2}{3} + y^2 - 2 < 1\right\} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; 1 < \frac{x^2}{3} + y^2 < 3\right\}.$$



L'ensemble A est l'ensemble des points situés entre les ellipses (partie hachurée), ceux des ellipses étant compris dans A.
L'ensemble B est l'ensemble des points situés entre les ellipses, ceux des ellipses étant exclus de B.