Université de Liège

1, 2, 3... Sciences

Année académique 2014-2015

Mathématiques générales A : corrigé du test 2

Version 28 octobre 2014

Corrigé du test 2 du 03-11-2014

1. **Déterminer le domaine de définition de la fonction f donnée explicitement ci-dessous. Expliciter clairement de quelles fonctions élémentaires la fonction f est la composée et écrire la composition.**

$$f : x \mapsto \operatorname{arcos}\left(\sqrt{x^2-1}\right)$$

Solution. Le domaine de définition de f est $\operatorname{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 \geq 0,\ -1 \leq \sqrt{x^2-1} \leq 1\}$. La première condition est équivalente à $x \leq -1$ ou $x \geq 1$. L'inégalité $-1 \leq \sqrt{x^2-1}$ est toujours vérifiée et $\sqrt{x^2-1} \leq 1 \Leftrightarrow x^2 - 2 \leq 0 \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$.
Dès lors, $\operatorname{dom}(f) = [-\sqrt{2}, -1] \cup [1, \sqrt{2}]$.

Voici les fonctions élémentaires qui, composées, donnent la fonction f :
$g : x \mapsto x^2 - 1$, $h : y \mapsto \sqrt{y}$ et $i : z \mapsto \operatorname{arcos}(z)$.
La composition se représente de la façon suivante :

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "g"] \arrow[rrr, bend right, "f = i \circ h \circ g"'] & x^2 - 1 = y \arrow[r, "h"] & \sqrt{y} = z \arrow[r, "i"] & \operatorname{arcos}(z) = \operatorname{arcos}(\sqrt{x^2-1})
\end{tikzcd}$$

2. **Définir la notation suivante : $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 5$.**

Solution.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \text{ tel que } \left.\begin{array}{l} |x+1| \leq \eta \\ x \in \operatorname{dom}(f) \end{array}\right\} \Rightarrow |f(x) - 5| \leq \varepsilon$$

Corrigé du test 2 du 6-11-2014

1. **Déterminer le domaine de définition de la fonction f donnée explicitement ci-dessous. Expliciter clairement de quelles fonctions élémentaires la fonction f est la composée et écrire la composition.**

$$f : x \mapsto \ln\left(|x+2| - 1\right)$$

Solution. Le domaine de définition de f est $\mathrm{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : |x+2| - 1 > 0\}$.
La condition est équivalente à $|x+2| > 1$. Cette inégalité se traduit par $(x+2 < -1 \Leftrightarrow x < -3)$ ou $(x+2 > 1 \Leftrightarrow x > -1)$.
Dès lors, $\mathrm{dom}(f) =]-\infty, -3[\,\cup\,]-1, +\infty[$.

Voici les fonctions élémentaires qui, composées, donnent la fonction f :
$g : x \mapsto |x+2|$, $h : y \mapsto y - 1$ et $i : z \mapsto \ln(z)$.
La composition se représente de la façon suivante :

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, bend left, "g"] \arrow[rrr, bend right, "f = i \circ h \circ g"'] & {|x+2| = y} \arrow[r, bend left, "h"] & {y - 1 = z} \arrow[r, bend left, "i"] & {\ln(z) = \ln(|x+2| - 1)}
\end{tikzcd}$$

2. **Définir la notation suivante :** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -4$ **.**

Solution.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N > 0 \text{ tel que } \left.\begin{array}{l} x \geq N \\ x \in \mathrm{dom}(f) \end{array}\right\} \Rightarrow |f(x) + 4| \leq \varepsilon$$

Corrigé du test 2 du 7-11-2014

1. **Déterminer le domaine de définition de la fonction f donnée explicitement ci-dessous. Expliciter clairement de quelles fonctions élémentaires la fonction f est la composée et écrire la composition.**

$$f : x \mapsto \sqrt{\ln(x+1)}$$

Solution. Le domaine de définition de f est $\operatorname{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : x+1 > 0,\ \ln(x+1) \geq 0\}$.
La première condition est équivalente à $x > -1$ et la deuxième à $x + 1 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$.
Dès lors, $\operatorname{dom}(f) = [0, +\infty[$.

Voici les fonctions élémentaires qui, composées, donnent la fonction f :
$g : x \mapsto x+1$, $h : y \mapsto \ln(y)$ et $i : z \mapsto \sqrt{z}$.
La composition se représente de la façon suivante :

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "g"] \arrow[rrr, bend right, "f = i \circ h \circ g"'] & x+1=y \arrow[r, bend left, "h"] & \ln(y)=z \arrow[r, bend left, "i"] & \sqrt{z} = \sqrt{\ln(x+1)} \end{tikzcd}$$

2. **Définir la notation suivante :** $\lim_{x \to -2} f(x) = +\infty$ **.**

Solution.

$$\forall R > 0,\ \exists \eta > 0 \text{ tel que } \left.\begin{array}{l} |x+2| \leq \eta \\ x \in \operatorname{dom}(f) \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \geq R$$