1, 2, 3... Sciences

Année académique 2014-2015

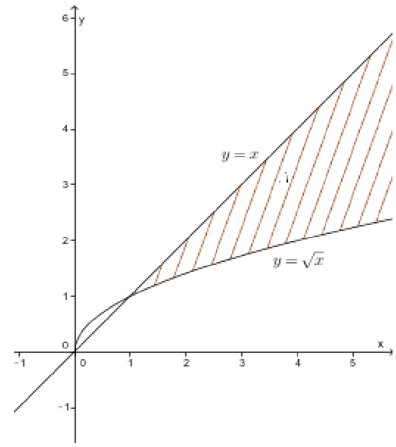
Mathématiques générales B : corrigé du test 2

Version 26 février 2015

Test 2 du 3-3-2015

1. **On donne la partie du plan hachurée ci-contre (ensemble fermé, non borné), notée A, et la fonction $f : (x, y) \mapsto \dfrac{y}{x^4}$. Si c'est possible, calculer**

$$I = \int\int_A f(x, y)\ dx\ dy.$$



Solution. L'ensemble d'intégration A est l'ensemble $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [1, +\infty[\ et\ y \in [\sqrt{x}, x]\}$.

Etudions l'intégrabilité de f sur A sachant que $|f(x, y)| = f(x, y),\ \forall (x, y) \in A$.
Pour x fixé dans $[1, +\infty[$, la fonction $h : y \mapsto \dfrac{y}{x^4}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur le fermé borné $[\sqrt{x}, x]$.
Elle est donc intégrable sur cet ensemble et on a

$$\int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{y}{x^4}\ dy = \frac{1}{x^4}\ .\ \left[\frac{y^2}{2}\right]_{\sqrt{x}}^{x} = \frac{1}{2x^4}\left(x^2 - x\right) = \frac{x-1}{2x^3}.$$

La fonction $g : x \mapsto \dfrac{x-1}{2x^3}$ est continue sur $\mathbb{R}_0$ donc sur $[1, +\infty[$. Vérifions l'intégrabilité de g en $+\infty$. Par le critere en θ , avec $\theta = 2$, on a

$$\lim_{x\to+\infty} x^2.\frac{x-1}{2x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 - x^2}{2x^3} = \frac{1}{2}.$$

Comme cette limite existe et est finie avec $\theta > 1$, la fonction est intégrable en $+\infty$; dès lors, elle est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Ainsi, f est intégrable sur A et comme f est une fonction positive sur A, on obtient

$$I = \int\int_A \frac{y}{x^4}\ dx\ dy = \int_1^{+\infty}\left(\int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{y}{x^4}\ dy\right) dx = \int_1^{+\infty} \frac{x-1}{2x^3}\ dx = \int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2x^3}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{x} + \frac{1}{2x^2}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-1}{x} + \frac{1}{2x^2}\right) + 1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(0 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

2. **Soit** $F(x, y, z) = g(u(x, y, z), v(x, y, z))$ **où**

$$u(-1, 0, 1) = 2 \quad (D_x u)(-1, 0, 1) = 1 \quad (D_y u)(-1, 0, 1) = -2 \quad (D_z u)(-1, 0, 1) = 3$$

$$v(-1, 0, 1) = -3 \quad (D_x v)(-1, 0, 1) = -4 \quad (D_y v)(-1, 0, 1) = 5 \quad (D_z v)(-1, 0, 1) = \frac{1}{2}$$

$$(D_u g)(2, -3) = \frac{1}{3} \quad \textbf{et} \quad (D_v g)(2, -3) = 1$$

En supposant F **dérivable en ce point, que vaut** $(D_z F)(-1, 0, 1)$ **?**

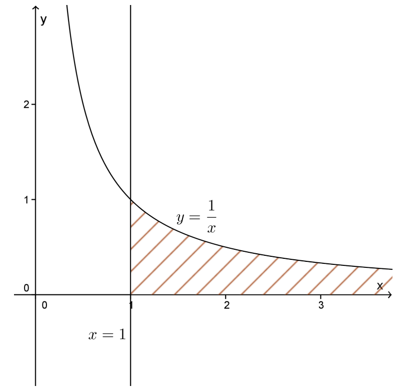
Solution. Comme $u(-1, 0, 1) = 2$ et $v(-1, 0, 1) = -3$, on a

$$D_z F(-1, 0, 1) = (D_u g)(2, -3)(D_z u)(-1, 0, 1) + (D_v g)(2, -3)(D_z v)(-1, 0, 1) = \frac{1}{3}.3 + 1.\frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Test 2 du 5-3-2015 et 6-3-2015

1. **On donne la partie du plan hachurée ci-contre (ensemble fermé, non borné), notée A, et la fonction $f : (x, y) \mapsto 2xy^2$. Si c'est possible, calculer**

$$I = \int\int_A f(x, y)\ dx\ dy.$$



Solution. L'ensemble d'intégration A est l'ensemble $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [1, +\infty[\ et\ y \in \left[0, \frac{1}{x}\right]\right\}$.

Etudions l'intégrabilité de f sur A sachant que $|f(x, y)| = f(x, y),\ \forall (x, y) \in A$.
Pour x fixé dans $[1, +\infty[$, la fonction $h : y \mapsto 2xy^2$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur le fermé borné $[0, \frac{1}{x}]$.
Elle est donc intégrable sur cet ensemble et on a

$$\int_0^{\frac{1}{x}} 2xy^2\ dy = 2x\ .\ \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{x}} = \frac{2x}{3}\left(\frac{1}{x^3} - 0\right) = \frac{2}{3x^2}.$$

La fonction $g : x \mapsto \dfrac{2}{3x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_0$ donc sur $[1, +\infty[$. Vérifions l'intégrabilité de g en $+\infty$.
Par le critere en θ , avec $\theta = 2$, on a

$$\lim_{x \to +\infty} x^2.\frac{2}{3x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{3x^2} = \frac{2}{3}.$$

Comme cette limite existe et est finie avec $\theta > 1$, la fonction est intégrable en $+\infty$; dès lors, elle est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Ainsi, f est intégrable sur A et comme f est une fonction positive sur A, on obtient

$$I = \int\int_A 2xy^2\ dx\ dy = \int_1^{+\infty}\left(\int_0^{\frac{1}{x}} 2xy^2\ dy\right) dx = \int_1^{+\infty} \frac{2}{3x^2}\, dx$$

$$= \left[\frac{-2}{3x}\right]_1^{+\infty} = \frac{-2}{3}\left(\lim_{x \to +\infty}\left(\frac{1}{x}\right) - 1\right) = \frac{2}{3}.$$

2. **Soit** $F(x, y) = g(u(x, y), v(x, y))$ **où**

$$u(0, 1) = -2 \quad (D_x u)(0, 1) = -1 \quad (D_y u)(0, 1) = 2$$

$$v(0, 1) = 3 \quad (D_x v)(0, 1) = 4 \quad (D_y v)(0, 1) = -5$$

$$(D_u g)(-2, 3) = \frac{2}{3} \quad \textbf{et} \quad (D_v g)(-2, 3) = -1$$

En supposant F **dérivable en ce point, que vaut** $(D_y F)(0, 1)$ **?**

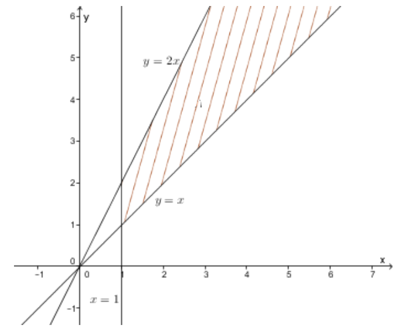
Solution. Comme $u(0, 1) = -2$ et $v(0, 1) = 3$, on a

$$D_y F(0, 1) = (D_u g)(-2, 3)(D_y u)(0, 1) + (D_v g)(-2, 3)(D_y v)(0, 1) = \frac{2}{3}.2 + (-1).(-5) = \frac{4}{3} + 5 = \frac{19}{3}.$$

Test 2 du 6-3-2015

1. **On donne la partie du plan hachurée ci-contre (ensemble fermé, non borné), notée A, et la fonction $f : (x, y) \mapsto e^{-x^2}$. Si c'est possible, calculer**

$$I = \int\int_A f(x, y)\ dx\ dy.$$



Solution. L'ensemble d'intégration A est l'ensemble $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [1, +\infty[\ et\ y \in [x, 2x]\}$.

Etudions l'intégrabilité de f sur A sachant que $|f(x, y)| = f(x, y),\ \forall (x, y) \in A$.
Pour x fixé dans $[1, +\infty[$, la fonction $h : y \mapsto e^{-x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur le fermé borné $[x, 2x]$. Elle est donc intégrable sur cet ensemble et on a

$$\int_x^{2x} e^{-x^2}\ dy = e^{-x^2}.\ [y]_x^{2x} = e^{-x^2}.(2x - x) = xe^{-x^2}.$$

La fonction $g : x \mapsto xe^{-x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[1, +\infty[$. Vérifions l'intégrabilité de g en $+\infty$. Par le critere en θ , avec $\theta = 3$, on a

$$\lim_{x\to+\infty} x^3.|xe^{-x^2}| = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{e^{x^2}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^2}{e^t} = 0,$$

car l'exponentielle l'emporte sur toute puissance antagoniste.
Comme cette limite existe et est finie avec $\theta > 1$, la fonction est intégrable en $+\infty$; dès lors, elle est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Ainsi, f est intégrable sur A et comme cette fonction est positive sur A, on obtient

$$\int\int_A e^{-x^2}\ dx\ dy = \int_1^{+\infty} \left(\int_x^{2x} e^{-x^2}\ dy\right)\ dx = \int_1^{+\infty} xe^{-x^2}\ dx$$

$$= \frac{-1}{2}\left[e^{-x^2}\right]_1^{+\infty} = \frac{-1}{2}\left(\lim_{x\to+\infty}(e^{-x^2}) - e^{-1}\right) = \frac{-1}{2}(0 - e^{-1}) = \frac{1}{2e}.$$

2. **Soit** $F(x, y) = g(u(x, y), v(x, y), w(x, y))$ **où**

$$u(-1, 0) = 2 \quad (D_x u)(-1, 0) = -3 \quad (D_y u)(-1, 0) = \frac{1}{2}$$

$$v(-1, 0) = -1 \quad (D_x v)(-1, 0) = \frac{-3}{2} \quad (D_y v)(-1, 0) = 2$$

$$w(-1, 0) = 3 \quad (D_x w)(-1, 0) = 4 \quad (D_y w)(-1, 0) = 5$$

$$(D_u g)(2, -1, 3) = \frac{1}{3} \quad (D_v g)(2, -1, 3) = \frac{1}{2} \quad \textbf{et } (D_w g)(2, -1, 3) = \frac{3}{2}$$

En supposant F **dérivable en ce point, que vaut** $(D_x F)(-1, 0)$ **?**

Solution. Comme $u(-1, 0) = 2$, $v(-1, 0) = -1$ et $w(-1, 0) = 3$, on a

$$D_x F(-1, 0) = (D_u g)(2, -1, 3)(D_x u)(-1, 0) + (D_v g)(2, -1, 3)(D_x v)(-1, 0) + (D_w g)(2, -1, 3)(D_x w)(-1, 0)$$

$$= \frac{1}{3}.(-3) + \frac{1}{2}.\left(\frac{-3}{2}\right) + \frac{3}{2}.4 = -1 - \frac{3}{4} + 6 = \frac{17}{4}.$$