Université de Liège

1, 2, 3... Sciences

Année académique 2014-2015

Mathématiques générales B : corrigé du test 3

Version 21 mars 2015

Test 3 du 10-3-2015

1. (a) **Qu'appelle-t-on matrice diagonale et matrice diagonalisable ?**
   (b) **On donne les matrices**

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad \Delta=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{2} & 0\\ 0 & 0 & -\sqrt{2}\end{pmatrix},\quad S=\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & \sqrt{2}\\ 0 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

La matrice Δ est-elle obtenue en diagonalisant A à l'aide de la matrice inversible S ? Justifier.
Donner les valeurs propres de A.

Solution. (a) Matrice diagonale et matrice diagonalisable : voir cours respectivement p. 38 définition 2.1.2 et p. 64 définition 2.8.1
(b) Si $\Delta = S^{-1}AS$ alors on doit avoir $S\Delta = AS$. Calculons ces 2 produits ; on a

$$S\Delta=\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & \sqrt{2}\\ 0 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{2} & 0\\ 0 & 0 & -\sqrt{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2\\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

et

$$AS=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & \sqrt{2}\\ 0 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2\\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Vu l'égalité des produits, la matrice Δ est bien obtenue en diagonalisant A à l'aide de S. Dès lors, les valeurs propres de A sont 0, $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$.

Autre raisonnement possible : S diagonalise A et donne Δ si et seulement si les colonnes de S sont vecteurs propres de A avec valeurs propres "correspondantes". Calculons donc

$$A\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}=0\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix} \sqrt{2}\\ 1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2}\\ 1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\\ \sqrt{2}\\ 0\end{pmatrix}=\sqrt{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2}\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$$

et

$$A\begin{pmatrix} \sqrt{2}\\ -1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2}\\ -1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2\\ \sqrt{2}\\ 0\end{pmatrix}=-\sqrt{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2}\\ -1\\ 0\end{pmatrix}.$$

Dès lors, les vecteurs colonnes de S sont bien des vecteurs propres de A de valeurs propres respectivement 0, $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$.

2. **On donne la matrice** $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$**.**

Est-elle inversible ? Pourquoi ? Si oui, calculer $(A^{-1})_{2,3}$.

Solution. La matrice A est inversible si et seulement si son déterminant diffère de zéro. En utilisant la définition, on a $\det(A) = (-1)^{1+1}(-1)(-2-0) = 2 \neq 0$. Dès lors, A est inversible et $(A^{-1})_{2,3} = \left(\frac{1}{\det(A)}\ \tilde{A}\right)_{2,3} = \frac{1}{\det(A)}\ (\mathcal{A})_{3,2}$ où $\mathcal{A}$ est la matrice des cofacteurs des éléments de A.
Ainsi, on a

$$\frac{1}{\det(A)}\ (\mathcal{A})_{3,2} = \frac{1}{2}(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

et l'élément demandé vaut 0.

Test 3 du 13-3-2015

1. **Qu'appelle-t-on approximation polynomiale d'ordre 3 d'une fonction en un point $x_0 = -2$ de son domaine de définition ?**

Solution. Si P est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3, le polynôme $x \mapsto P(x+2)$ est une approximation de la fonction f à l'ordre 3 en -2 si

$$\lim_{x\to -2, x\neq -2} \frac{f(x) - P(x+2)}{(x+2)^3} = 0.$$

2. **On donne les matrices**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice Δ est-elle obtenue en diagonalisant A à l'aide de la matrice inversible S ? Justifier.
Donner les valeurs propres de A.

Solution. Si $\Delta = S^{-1}AS$ alors on doit avoir $S\Delta = AS$. Calculons ces 2 produits ; on a

$$S\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et

$$AS = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vu l'égalité des produits, la matrice Δ est bien obtenue en diagonalisant A à l'aide de S. Dès lors, les valeurs propres de A sont -1 et 2.

Autre raisonnement possible : S diagonalise A et donne Δ si et seulement si les colonnes de S sont vecteurs propres de A avec valeurs propres "correspondantes". Calculons donc

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&-1\\-1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

et

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&-1\\-1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}=(-1)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Dès lors, les vecteurs colonnes de S sont bien des vecteurs propres de A de valeurs propres respectivement $2,\ 2$ et -1.

3. **On donne la matrice** $A=\begin{pmatrix}3&3&0\\2&-2&2\\0&1&-1\end{pmatrix}$**.**

   Est-elle inversible ? Pourquoi ? Si oui, calculer $(A^{-1})_{3,2}$**.**

Solution. La matrice A est inversible si et seulement si son déterminant diffère de zéro. En remplaçant la deuxième colonne par la somme des deuxième et troisième colonnes, on a

$$\det(A)=\begin{vmatrix}3&3&0\\2&0&2\\0&0&-1\end{vmatrix}=(-1)^{3+3}(-1)(0-6)=6\neq 0.$$

Dès lors, A est inversible et $(A^{-1})_{3,2}=\left(\frac{1}{\det(A)}\ \tilde{A}\right)_{3,2}=\frac{1}{\det(A)}\ (\mathcal{A})_{2,3}$ où $\mathcal{A}$ est la matrice des cofacteurs des éléments de A.
Ainsi, on a

$$\frac{1}{\det(A)}\ (\mathcal{A})_{2,3}=\frac{1}{6}\ (-1)^{2+3}\begin{vmatrix}3&3\\0&1\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}$$

et l'élément demandé vaut $-\frac{1}{2}$.

Test 3 du 17-3-2015

1. (a) **Qu'appelle-t-on matrice diagonale et matrice diagonalisable ?**
   (b) **On donne les matrices**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice Δ est-elle obtenue en diagonalisant A à l'aide de la matrice inversible S ? Justifier.
Donner les valeurs propres de A.

Solution. (a) Matrice diagonale et matrice diagonalisable : voir cours respectivement p. 38 définition 2.1.2 et p. 64 définition 2.8.1
(b) Si $\Delta = S^{-1}AS$ alors on doit avoir $S\Delta = AS$. Calculons ces 2 produits ; on a

$$S\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

et

$$AS = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vu l'égalité des produits, la matrice Δ est bien obtenue en diagonalisant A à l'aide de S. Dès lors, les valeurs propres de A sont 1 et 2.

Autre raisonnement possible : S diagonalise A et donne Δ si et seulement si les colonnes de S sont vecteurs propres de A avec valeurs propres "correspondantes". Calculons donc

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dès lors, les vecteurs colonnes de S sont bien des vecteurs propres de A de valeurs propres respectivement 1, 1 et 2.

2. **On donne la matrice** $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$**.**

Est-elle inversible ? Pourquoi ? Si oui, calculer $(A^{-1})_{1,2}$**.**

Solution. La matrice A est inversible si et seulement si son déterminant diffère de zéro. En remplaçant la deuxième colonne par la somme des deuxième et troisième colonnes, on a

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3} \ . \ 1 \ .(-3+1) = -2 \neq 0.$$

Dès lors, A est inversible et $(A^{-1})_{1,2} = \left(\frac{1}{\det(A)}\ \tilde{A}\right)_{1,2} = \frac{1}{\det(A)}\ (\mathcal{A})_{2,1}$ où $\mathcal{A}$ est la matrice des cofacteurs des éléments de A.
Ainsi, on a

$$\frac{1}{\det(A)}\ (\mathcal{A})_{2,1} = \frac{-1}{2}\ (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$$

et l'élément demandé vaut $\frac{1}{2}$.

Test 3 du 20-3-2015

1. (a) **Qu'appelle-t-on valeur propre et vecteur propre d'une matrice carrée ?**
   (b) **On donne les matrices**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice Δ est-elle obtenue en diagonalisant A à l'aide de la matrice inversible S ? Justifier.
Donner les valeurs propres de A.

Solution. (a) Valeur propre et vecteur propre d'une matrice carrée : voir cours p. 56 définition 2.7.2
(b) Si $\Delta = S^{-1}AS$ alors on doit avoir $S\Delta = AS$. Calculons ces 2 produits ; on a

$$S\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

et

$$AS = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Vu l'égalité des produits, la matrice Δ est bien obtenue en diagonalisant A à l'aide de S. Dès lors, les valeurs propres de A sont -1 et 2.

Autre raisonnement possible : S diagonalise A et donne Δ si et seulement si les colonnes de S sont vecteurs propres de A avec valeurs propres "correspondantes". Calculons donc

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&-1\\-1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

et

$$A\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&-1\\-1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

Dès lors, les vecteurs colonnes de S sont bien des vecteurs propres de A de valeurs propres respectivement $-1,\ 2$ et 2.

2. **On donne la matrice** $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\-2&2&-2\\2&-1&0\end{pmatrix}$**.**

Est-elle inversible ? Pourquoi ? Si oui, calculer $(A^{-1})_{2,1}$**.**

Solution. La matrice A est inversible si et seulement si son déterminant diffère de zéro. En appliquant la première loi des mineurs à la troisième colonne, on a

$$\det(A)=(-1)^{2+3}(-2)(-1-4)=-10\neq 0.$$

Dès lors, A est inversible et $(A^{-1})_{2,1}=\left(\frac{1}{\det(A)}\ \tilde{A}\right)_{2,1}=\frac{1}{\det(A)}\ (\mathcal{A})_{1,2}$ où $\mathcal{A}$ est la matrice des cofacteurs des éléments de A.
Ainsi, on a

$$\frac{1}{\det(A)}\ (\mathcal{A})_{1,2}=\frac{-1}{10}\ (-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-2&-2\\2&0\end{vmatrix}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$$

et l'élément demandé vaut $\frac{2}{5}$.