1, 2, 3... Sciences

Année académique 2014-2015

Mathématiques générales (partim B)

Correction des listes d'exercices du $2^{\text{ème}}$ quadrimestre : Biologie

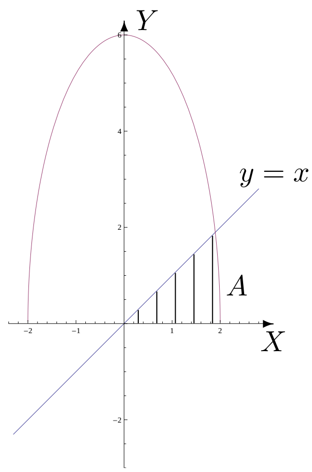
Version 29 janvier 2015

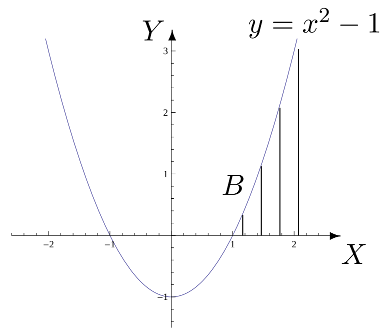
Liste 1 : compléments et Fonctions de plusieurs variables (1)

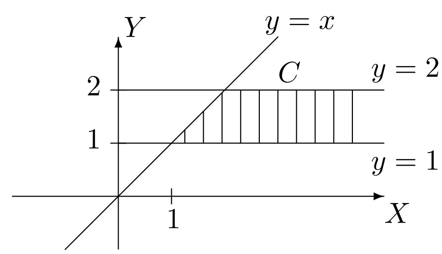
I. Représentation d'ensembles

1. **Dans un repère orthonormé du plan, représenter, en le hachurant, l'ensemble dont une description analytique est la suivante**

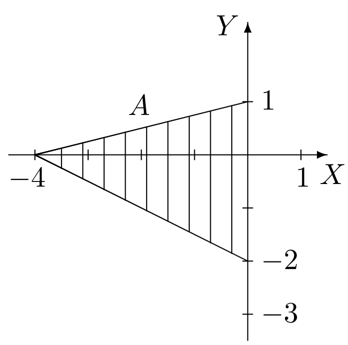
   a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \inf\{x, \sqrt{36 - 9x^2}\}\}$
   b) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ 0 \leq y \leq x^2 - 1\}$
   c) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y,\ y \in [1,2]\}$

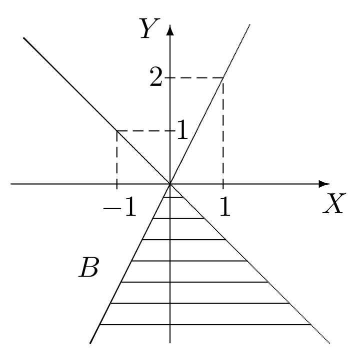


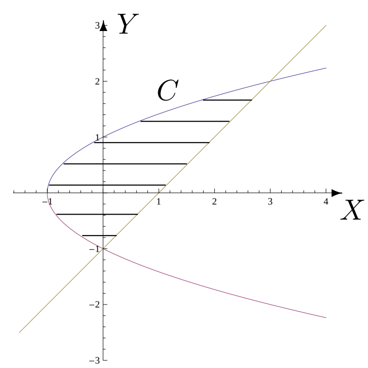




2. **Décrire analytiquement les ensembles hachurés suivants, les points des bords étant compris dans l'ensemble, en donnant d'abord**
   a) l'ensemble de variation des abscisses
   b) l'ensemble de variation des ordonnées.





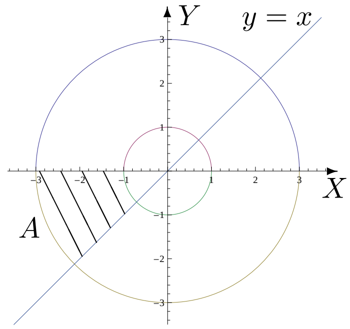


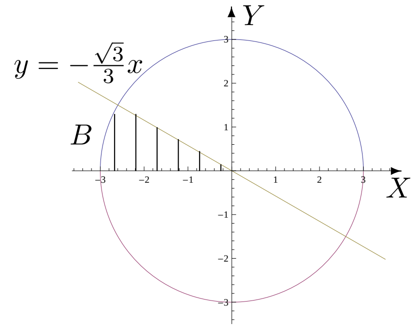
Les descriptions analytiques sont les suivantes
$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-4, 0],\ y \in [-\frac{x}{2} - 2, \frac{x}{4} + 1]\}$
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-2, 0],\ x \in [-2(y+2), 0]\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,1],\ x \in [4(y-1),\ 0]\}$

$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in\ ]-\infty, 0],\ y \in]-\infty, 2x]\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,\ +\infty[,\ y \in]-\infty, -x]\}$
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in]-\infty, 0],\ x \in [\ \frac{y}{2}, -y]\}$

$$\begin{aligned}C &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[-1,0],\ y\in[-\sqrt{x+1},\sqrt{x+1}]\}\\ &\qquad \cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[0,3],\ y\in[x-1,\sqrt{x+1}]\}\\ &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\in[-1,2],\ x\in[y^2-1,y+1]\}\end{aligned}$$
.

3. **En utilisant les coordonnées polaires, décrire analytiquement les ensembles hachurés suivants, les points des bords étant compris dans l'ensemble.**





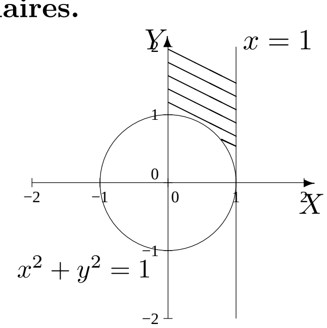
Les ensembles A et B exprimés en coordonnées polaires sont respectivement

$$A' = \left\{(r,\theta) : r\in[1,3],\ \theta\in\left[\pi,\frac{5\pi}{4}\right]\right\} \quad \text{et} \quad B' = \left\{(r,\theta) : r\in]0,3[,\ \theta\in\left]\frac{5\pi}{6},\pi\right[\right\}.$$

4. **Dans un repère orthonormé du plan, représenter, en le hachurant, l'ensemble dont une description analytique est**

$$E = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0<x<1,\ y>0,\ x^2+y^2>1\}.$$

Ensuite, décrire analytiquement cet ensemble en utilisant les coordonnées polaires.



Les points des bords sont exclus de l'ensemble.
L'ensemble E exprimé en coordonnées polaires est

$$E' = \left\{(r,\theta) : \theta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[,\ r\in\left]1,\frac{1}{\cos(\theta)}\right[\right\}.$$

II. Dérivation

1. **En appliquant la définition, montrer que la fonction est dérivable en x_0 et donner la valeur de sa dérivée en ce point si**
   a) $f : x\mapsto |x^2-9|$ et $x_0=2$
   b) $g : x\mapsto \sqrt{x^2-4}$ et $x_0=3$
   Ces deux fonctions sont dérivables en x_0 ; la dérivée de f en 2 vaut -4 et celle de g en 3 vaut $\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

2. **a) On donne la fonction f dérivable sur $]-2,2[$. Quel est le domaine de dérivabilité de la fonction F définie par $F(x) = f(\sqrt{x^2-1})$ ainsi que l'expression de sa dérivée en fonction de celle de f ?**
   Le domaine de dérivabilité de F est $]-\sqrt{5},-1[\,\cup\,]1,\sqrt{5}[$ et sa dérivée vaut
$$DF(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}(Df)(\sqrt{x^2-1}).$$
   b) Même question pour g dérivable sur $]-\frac{\pi}{2},0[$ avec $G(x) = g(\arcsin(3x-1))$.
   Le domaine de dérivabilité de G est $\left]0,\dfrac{1}{3}\right[$ et sa dérivée vaut
$$DG(x) = \frac{3}{\sqrt{-9x^2+6x}}(Dg)(\arcsin(3x-1)).$$

III. Cacul intégral

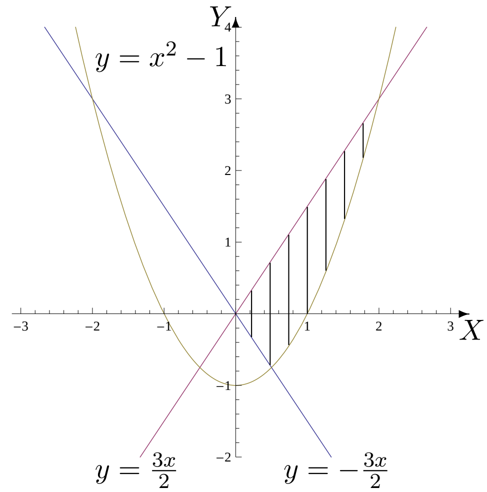
1. a) **a) Si a est un paramètre réel fixé dans $]0,1]$, la fonction $f_1 : x \mapsto a^2\cos(ax)$ est-elle intégrable sur $[0,\frac{\pi}{2}]$? Si oui, que vaut son intégrale ?**
   La fonction est continue sur le fermé borné $[0,\frac{\pi}{2}]$; elle y est donc intégrable et son intégrale vaut $a\sin\left(\frac{a\pi}{2}\right)$.

   b) Si $a > 0$ est un réel fixé, la fonction $f_2 : x \mapsto \frac{a\ e^{a^2}}{a^2+x}$ est-elle intégrable sur $[0,a^2]$? Si oui, que vaut son intégrale ?
   La fonction est continue sur le fermé borné $[0,a^2]$; elle y est donc intégrable et son intégrale vaut $a\ln 2\ .\ e^{a^2}$.

   c) Si $a > 0$ est un réel fixé, la fonction $f_3 : x \mapsto \frac{\sqrt{a}}{x^2-a^2}$ est-elle intégrable sur $[a,+\infty[$? Si oui, que vaut son intégrale ?
   La fonction est continue sur $]a,+\infty[$ et, par application de la définition ou du critère en θ, elle est intégrable en $+\infty$ mais non en a^+. Cette fonction n'est donc pas intégrable sur $[a,+\infty[$.

2. **Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes**
$$a)\int_0^e \ln(x)\ dx \qquad\qquad b)\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^2+4}\ dx$$
   Ces deux fonctions sont intégrables. La première intégrale vaut 0 et la deuxième $\dfrac{\pi}{8}$.

3. **On considère l'ensemble $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -\dfrac{3x}{2}\le y\le\dfrac{3x}{2},\ y\ge x^2-1\right\}$. Donner une représentation graphique de cet ensemble en le hachurant et calculer l'aire de cette région du plan.**
   L'aire de la région hachurée vaut $\dfrac{33}{16}$.



IV. Définitions et représentations graphiques

1. **Déterminer le domaine de définition des fonctions données explicitement ci-dessous et le représenter.**

$$f(x,y)=\ln\left(4y^2-x^2+1\right),\quad g(x,y)=\sqrt{4-|x-2y|},\quad h(x,y)=\text{arcos}\left(\frac{xy}{2}\right).$$

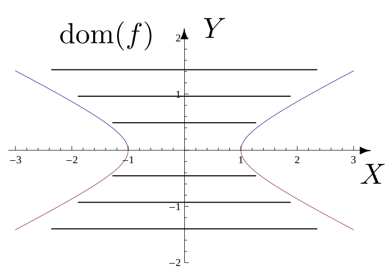
S'il appartient au domaine de définition, donner l'image de $(1,-2,)$ par f, de $(5,3)$ par g et de $(-1,1)$ par h. Dans un repère orthonormé de l'espace, représenter ces points et leur image éventuelle.

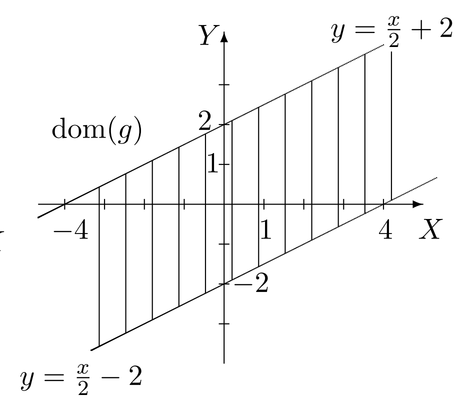
Les domaines de définition sont les suivants :

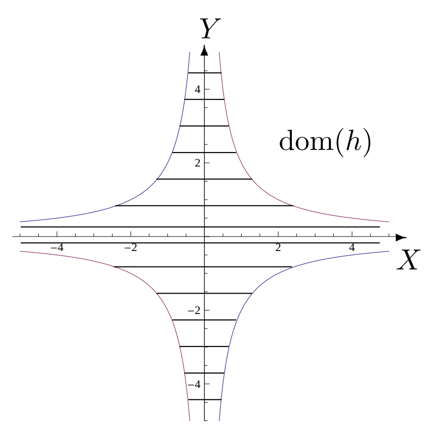
• $\text{dom}(f)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 4y^2-x^2+1>0\}$; sa représentation graphique est la région hachurée, les points de l'hyperbole étant exclus de l'ensemble. Comme $(1,-2)$ appartient à $\text{dom}(f)$, on a $f(1,-2)=4\ln(2)$.

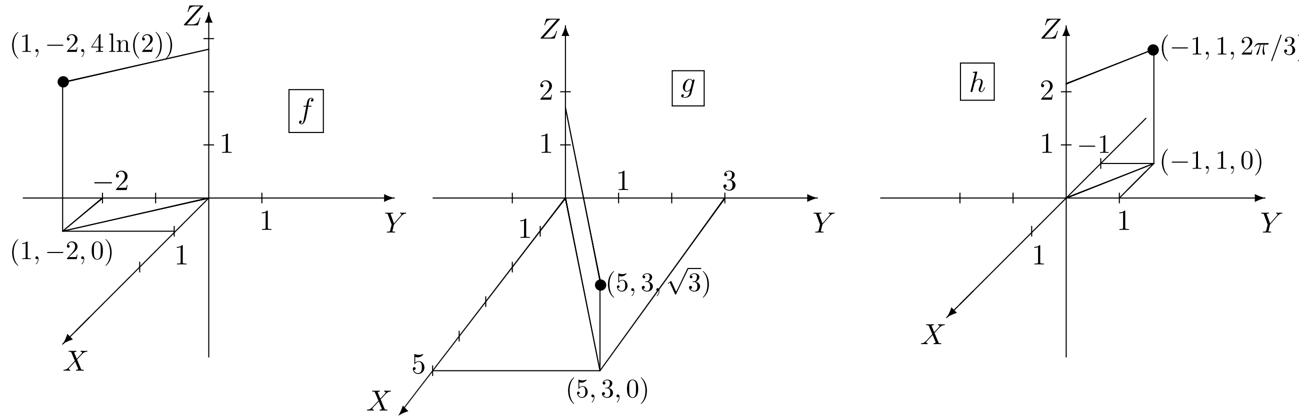
• $\text{dom}(g)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -4\leq x-2y\leq 4\}$; sa représentation graphique est la région hachurée, les points des droites sont compris dans l'ensemble. Comme $(5,3)$ appartient à $\text{dom}(g)$, on a $g(5,3)=\sqrt{3}$.

• $\text{dom}(h)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -2\leq xy\leq 2\}$; sa représentation graphique est la région hachurée, les points des hyperboles sont compris dans l'ensemble. Comme $(-1,1)$ appartient à $\text{dom}(h)$, on a $h(-1,1)=\frac{2\pi}{3}$.

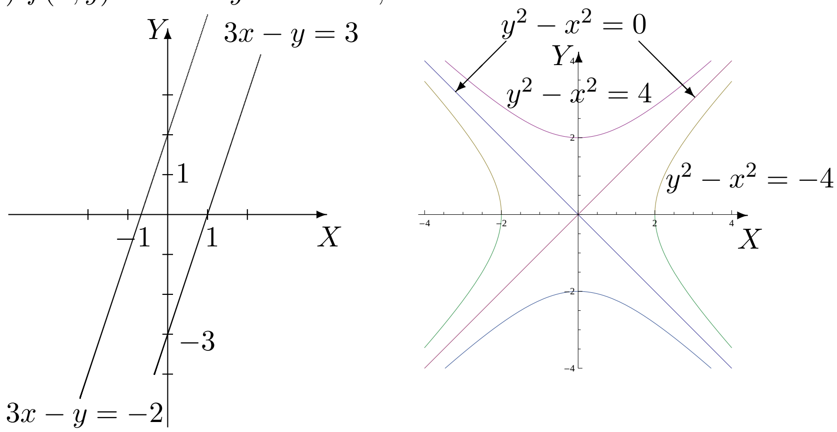




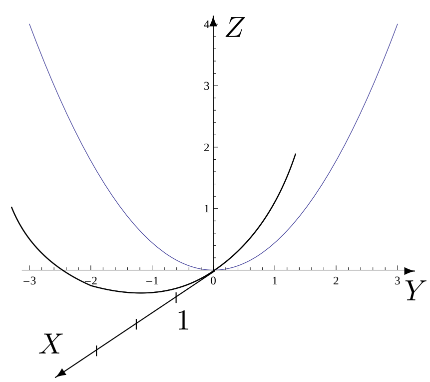




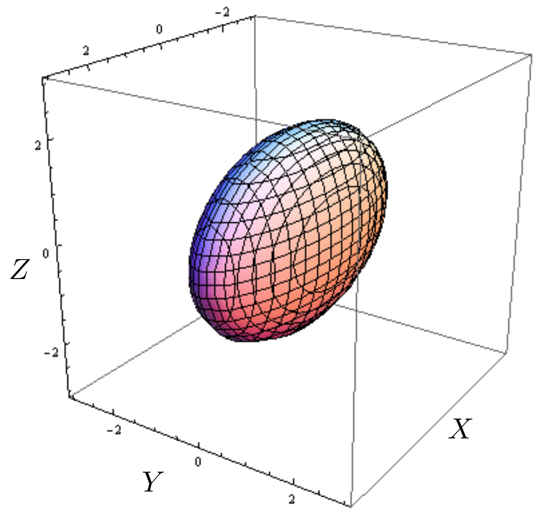
2. **Dans chacun des cas suivants, représenter les courbes de niveau d'équation $f(x,y)=c$ si**
a) $f(x,y)=3x-y$ et $c=-2,\ 3$
b) $f(x,y)=y^2-x^2$ et $c=-4,\ 0,\ 4$
c) $f(x,y)=x^2-2y$ et $c=-2,\ 4$

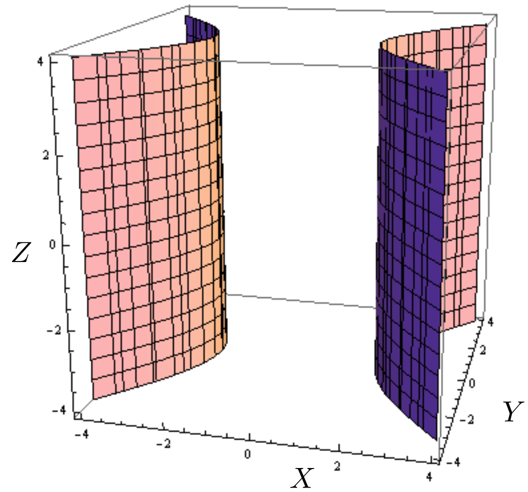


3. **On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé ; on appelle X, Y, Z les trois axes de celui-ci. Représenter la trace de la surface d'équation cartésienne $x^2+4y^2=9z$ dans le plan d'équation $x=0$ puis dans celui d'équation $y=0$. Comment appelle-t-on chacune de ces courbes ? Quelle est la nature de cette quadrique ?**
La trace dans le plan d'équation $x=0$ est une parabole de sommet à l'origine du repère et d'axe de symétrie Z ; celle dans le plan d'équation $y=0$ est aussi une parabole de sommet à l'origine du repère et d'axe de symétrie Z (cf. graphique).
Cette quadrique est un paraboloïde elliptique.



4. **Esquisser les représentations graphiques des surfaces quadriques dont les équations cartésiennes sont** $a)\ \dfrac{x^2}{9} + y^2 + \dfrac{z^2}{4} = 1$ $\qquad b)\ x^2 - y^2 = 4.$





Liste 2 : Fonctions de plusieurs variables (2)

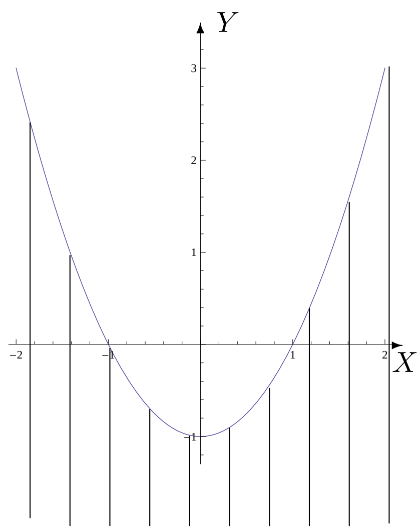
I. Dérivation et gradient

1. **En appliquant la définition des dérivées, montrer que la fonction f donnée explicitement par $f(x,y) = 2x^3 + xy^2,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$ est dérivable par rapport à sa première variable au point $(-1,2)$ et donner la valeur de cette dérivée partielle en ce point.**
La fonction f est dérivable par rapport à sa première variable au point $(-1,2)$ et sa dérivée partielle en ce point vaut 10.

2. **On donne les fonctions f, g et h par**

$$f(x,y) = \ln(x^2 - 1 - y), \quad g(x,y) = \sin(x^3y^2 + 3y) \quad \textbf{et} \quad h(x,y) = y^2\, e^{-\frac{y}{x}}.$$

a) Déterminer leur domaine de définition, de dérivabilité et les représenter dans un repère orthonormé.
b) Déterminer les dérivées partielles de ces fonctions.



Pour la fonction f, les 2 domaines sont égaux à $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 - y > 0\}$.
La représentation graphique de cet ensemble est la région hachurée, les points de la parabole étant exclus de l'ensemble.
Les dérivées partielles sont données par

$$D_xf(x,y) = \frac{2x}{x^2 - 1 - y}$$

et

$$D_yf(x,y) = \frac{-1}{x^2 - 1 - y}.$$

Pour la fonction g, les 2 domaines sont égaux à $\mathbb{R}^2$: ce sont tous les points du plan.
Les dérivées partielles sont données par

$$D_xg(x,y) = 3x^2y^2\cos(x^3y^2 + 3y) \qquad \text{et} \qquad D_yg(x,y) = (2x^3y + 3)\cos(x^3y^2 + 3y).$$

Pour la fonction h, les 2 domaines sont égaux à $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) : x = 0\} = \mathbb{R}_0 \times \mathbb{R}$: ce sont tous les points du plan sauf ceux de l'axe des ordonnées. Les dérivées partielles sont données par

$$D_xh(x,y) = \frac{y^3}{x^2}\, e^{-\frac{y}{x}} \qquad \text{et} \qquad D_yh(x,y) = \left(2 - \frac{y}{x}\right) y\, e^{-\frac{y}{x}}.$$

3. **On donne la fonction f par $f(x,y) = \ln(\sqrt{x^2 - 4y^2})$.**
a) Déterminer son domaine de définition et d'infinie dérivabilité.
b) Dans le domaine d'infinie dérivabilité, calculer $D_x^2f + D_y^2f$.

Les 2 domaines sont égaux à $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2-4y^2>0\}$ et on a

$$D_x^2 f(x,y)+D_y^2 f(x,y)=\frac{-5(x^2+4y^2)}{(x^2-4y^2)^2}.$$

4. **a) Déterminer le gradient de la fonction f donnée par $f(x_1,x_2,x_3)=x_1\,x_2^3\sin(x_1x_3)$.**
b) Même question pour la fonction g donnée par $g(x,y,z)=y^2e^{x^2y\sqrt{2z}}$.

a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^3$ et son gradient est le vecteur de composantes

$$(x_2^3\sin(x_1x_3)+x_1\,x_2^3\,x_3\cos(x_1x_3),\ 3x_1\,x_2^2\sin(x_1x_3),\ x_1^2\,x_2^3\cos(x_1x_3)).$$

b) La fonction g est dérivable sur $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z>0\}$ et son gradient est le vecteur de composantes

$$\left(2xy^3\sqrt{2z}\,e^{x^2y\sqrt{2z}},\ (2+x^2y\sqrt{2z})y\,e^{x^2y\sqrt{2z}},\ \frac{x^2y^3}{\sqrt{2z}}\,e^{x^2y\sqrt{2z}}\right).$$

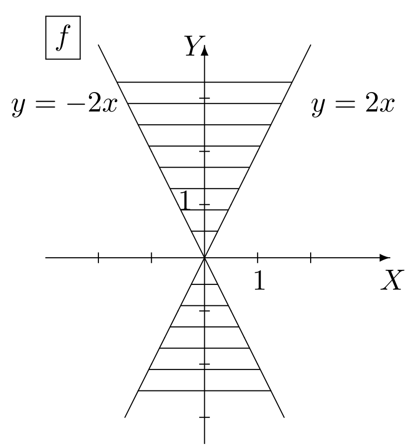
5. **On donne les fonctions f et g respectivement par**

$$f(x,y)=\arcsin\left(\frac{2x}{y}\right)\qquad g(x,y)=\exp(\sqrt{x^2-y+1}).$$

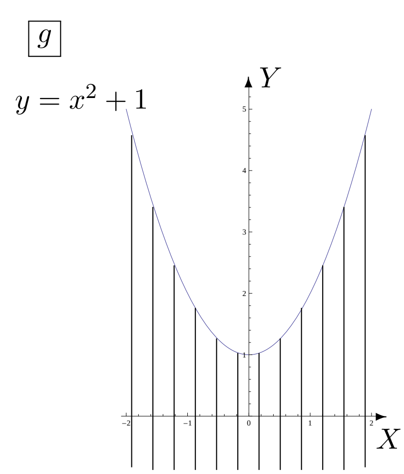
a) Déterminer le domaine de définition A et d'infinie dérivabilité B de ces fonctions. Représenter ces domaines.
b) Déterminer l'expression explicite de $\frac{|x|}{|y|}D_xf(x,y)+D_yf(x,y)$.
c) Déterminer l'expression explicite de $F(t)=f\left(t,\frac{1}{t}\right)$, le domaine de dérivabilité de cette fonction et l'expression explicite de sa dérivée.
d) Déterminer l'expression explicite de $G(t)=g(\sin(t),\cos^2(t))$, le domaine de dérivabilité de cette fonction et l'expression explicite de sa dérivée.
a) Pour f, on a

$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -1\leq\frac{2x}{y}\leq 1,\ y\neq 0\right\}\ \text{et}\ B=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -1<\frac{2x}{y}<1y\neq 0\right\}.$$

Pour g, on a $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2-y+1\geq 0\}$ et $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2-y+1>0\}$.
Voici les représentations graphiques de ces ensembles (parties hachurées) :



Les points des droites sont compris dans A, sauf l'origine du repère.
Les points des droites sont exclus de B.



Les points de la parabole sont compris dans l'ensemble A mais non dans B.

b) On a

$$\frac{|x|}{|y|} D_x f(x,y) + D_y f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad xy \geq 0 \text{ et } y \neq 0 \\ \dfrac{-4x}{y\sqrt{y^2-4x^2}} & \text{si} \quad x \leq 0 \text{ et } y > 0 \\ \dfrac{4x}{y\sqrt{y^2-4x^2}} & \text{si} \quad x \geq 0 \text{ et } y < 0 \end{cases}$$

c) L'expression explicite de $F(t) = f\left(t, \frac{1}{t}\right)$ est donnée par $F(t) = \arcsin(2t^2)$; si on considère F sans faire référence à la composition, son domaine de dérivabilité est $\left]-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right[$ mais si on tient compte de la composition alors on doit retirer 0 du domaine de dérivabilité. La dérivée de F est

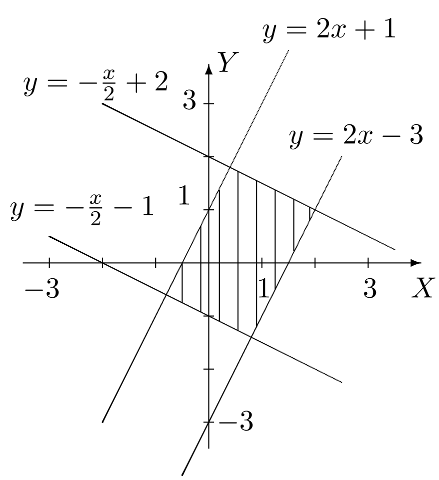
$$DF(t) = \frac{4t}{\sqrt{1-4t^4}}.$$

d) L'expression explicite de $G(t) = g(\sin(t), \cos^2(t)$ est donnée par $G(t) = \exp(\sqrt{1-\cos(2t)})$; son domaine de dérivabilité est $\mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ et sa dérivée est

$$DG(t) = \frac{\sin(2t)}{\sqrt{1-\cos(2t)}} \exp(\sqrt{1-\cos(2t)}).$$

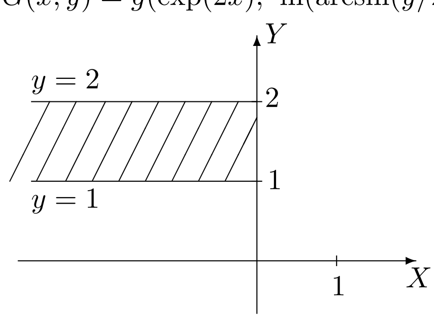
II. Dérivation des fonctions composées

1. **a) On donne f, continûment dérivable sur $]-1,3[\times]-2,4[$. On demande le domaine de dérivabilité de la fonction F définie par $F(x,y) = f(2x-y, x+2y)$, sa représentation graphique ainsi que l'expression des dérivées partielles de F en fonction de celles de f.**



Le domaine de dérivabilité de F est l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < 2x-y < 3,\ -2 < x+2y < 4\}$. Sa représentation graphique est la partie du plan hachurée, les points des droites étant exclus de l'ensemble.
Les dérivées partielles sont $(D_xF)(x,y) = (D_uf)(2x-y, x+2y).2 + (D_vf)(2x-y, x+2y).1$ et $(D_yF)(x,y) = (D_uf)(2x-y, x+2y).(-1) + (D_vf)(2x-y, x+2y).2$ si u et v sont respectivement les première et deuxième variables de f.

b) Même question pour g, continûment dérivable sur $]-1,1[\times]\ln\frac{\pi}{6}, +\infty[$ et $G(x,y) = g(\exp(2x),\ \ln(\arcsin(y/2)))$.



Le domaine de dérivabilité de G est l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0,\ y \in]1,2[\} =]-\infty, 0[\times]1,2[$. Sa représentation graphique est la partie du plan hachurée, les points des bords étant exclus de l'ensemble.

Les dérivées partielles sont

$$(D_xG)(x,y) = (D_ug)(\exp(2x), \ln(\arcsin(y/2))).2\ \exp(2x)$$

$$(D_yG)(x,y) = (D_vg)(\exp(2x), \ln(\arcsin(y/2))).\left(\frac{1}{\arcsin(y/2)\sqrt{4-y^2}}\right)$$

si u et v sont respectivement les première et deuxième variables de g.

2. **On donne la fonction g continûment dérivable sur $]\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}[\times]0,+\infty[\times]0,3[$.**

   a) Déterminer le domaine de dérivabilité de $f : t \mapsto f(t) = g\left(\operatorname{arcos}\left(\frac{t}{3}\right), \frac{1}{\sqrt{t-1}}, t^2-1\right)$.
   b) Calculer la dérivée de f en fonction des dérivées partielles de g.
   c) Si elle est définie, que vaut cette dérivée en 0 ? $3/2$?
   d) Mêmes questions si g est continûment dérivable sur $]\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}[\times]0,+\infty[\times]0,3[$.

   a) La fonction f n'est dérivable en aucun réel.
   d) Le domaine de dérivabilité de f est $]1,2[$; f n'est donc pas dérivable en 0 mais bien en $3/2$. La dérivée de f en fonction des dérivées partielles de g est donnée par

$$Df(t) = (D_ug)\left(\operatorname{arcos}\left(\frac{t}{3}\right), \frac{1}{\sqrt{t-1}}, t^2-1\right)\ .\ \left(\frac{-1}{\sqrt{9-t^2}}\right)$$

$$+(D_vg)\left(\operatorname{arcos}\left(\frac{t}{3}\right), \frac{1}{\sqrt{t-1}}, t^2-1\right)\ .\ \left(\frac{-1}{2\sqrt{(t-1)^3}}\right)+(D_wg)\left(\operatorname{arcos}\left(\frac{t}{3}\right), \frac{1}{\sqrt{t-1}}, t^2-1\right)\ .\ 2t$$

   si u, v et w sont respectivement les première, deuxième et troisième variables de g.

   La dérivée de f en $3/2$ vaut

$$Df(3/2) = (D_ug)\left(\frac{\pi}{3},\sqrt{2},\frac{5}{4}\right)\ .\ \left(\frac{-2\sqrt{3}}{9}\right)+(D_vg)\left(\frac{\pi}{3},\sqrt{2},\frac{5}{4}\right)\ .\ \left(-\sqrt{2}\right)+(D_wg)\left(\frac{\pi}{3},\sqrt{2},\frac{5}{4}\right)\ .\ 3$$

   si u, v et w sont respectivement les première, deuxième et troisième variables de g.

3. **Soit $F(t) = f(x(t), y(t))$ avec $x(2) = 3,\ y(2) = 5,\ (Dx)(2) = -1,\ (Dy)(2) = 4,\ (D_xf)(3,5) = 6$ et $(D_yf)(3,5) = -2$. En supposant satisfaites les hypothèses du théorème de dérivation des fonctions composées en 2, que vaut $(DF)(2)$?**

   On a $(DF)(2) = (D_xf)(3,5).(D_tx)(2) + (D_yf)(3,5).(D_ty)(2) = -14$.

4. **Soit $F(s,t) = f(u(s,t), v(s,t))$. En supposant satisfaites les hypothèses du théorème de dérivation des fonctions composées en $(0,1)$ si**

$$u(0,1) = -2 \quad (D_su)(0,1) = 2 \quad (D_tu)(0,1) = 4$$

$$v(0,1) = 5 \quad (D_sv)(0,1) = 3 \quad (D_tv)(0,1) = 6$$

   et $(D_uf)(-2,5) = -1$ et $(D_vf)(-2,5) = 8$, calculer $(D_sF)(0,1)$ et $(D_tF)(0,1)$.

   On a $(D_sF)(0,1) = (D_uf)(-2,5).(D_su)(0,1) + (D_vf)(-2,5).(D_sv)(0,1) = 22$ et $(D_tF)(0,1) = (D_uf)(-2,5).(D_tu)(0,1) + (D_vf)(-2,5).(D_tv)(0,1) = 44$

Liste 3 : Fonctions de plusieurs variables (3)

I. Permutation de l'ordre d'intégration

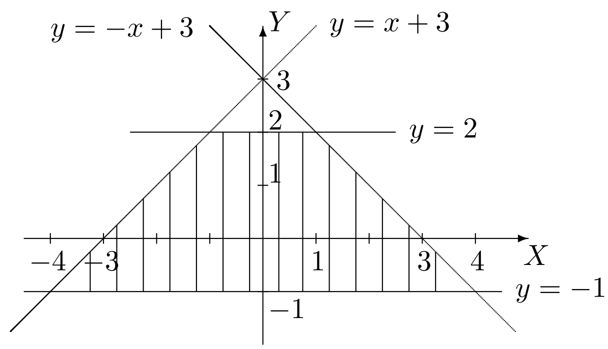
1. **Si la fonction est intégrable sur l'ensemble considéré, permuter les intégrales et représenter l'ensemble d'intégration dans les cas suivants**

$$a) \int_{-1}^{2}\left(\int_{y-3}^{3-y} f(x,y)\,dx\right)\,dy \qquad\qquad b) \int_{0}^{2}\left(\int_{y}^{\sqrt{8-y^2}} f(x,y)\,dx\right)\,dy.$$

a) Si on permute l'ordre d'intégration, l'intégrale s'écrit

$$\int_{-4}^{-1}\left(\int_{-1}^{x+3} f(x,y)\,dy\right)dx+\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{2} f(x,y)\,dy\right)dx+\int_{1}^{4}\left(\int_{-1}^{-x+3} f(x,y)\,dy\right)dx$$

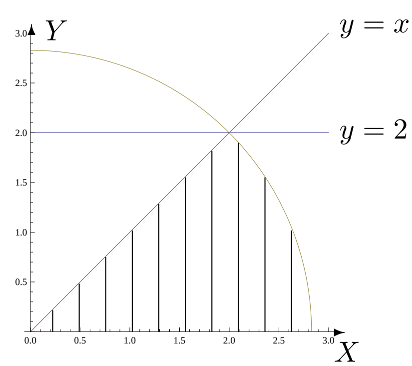
et l'ensemble d'intégration est la partie hachurée du plan ci-dessous.



b) Si on permute l'ordre d'intégration, l'intégrale s'écrit

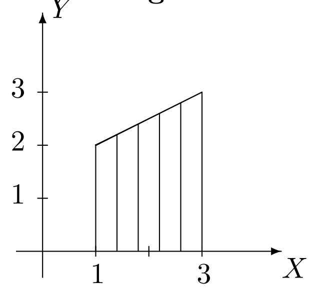
$$\int_{0}^{2}\left(\int_{0}^{x} f(x,y)\,dy\right)dx+\int_{2}^{2\sqrt{2}}\left(\int_{0}^{\sqrt{8-x^2}} f(x,y)\,dy\right)dx$$

et l'ensemble d'intégration est la partie hachurée du plan ci-dessous.



2. **On considère une fonction f intégrable sur l'ensemble hachuré fermé borné A ci-dessous. Ecrire, dans un ordre et dans l'autre, l'intégrale**

$$\int\int_A f(x,y)dx\,dy.$$

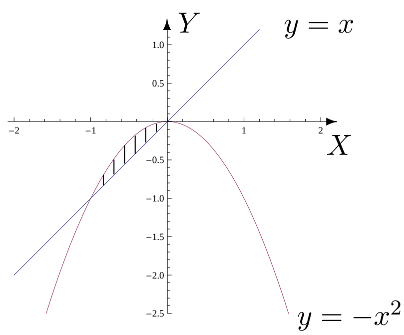


L'intégrale sur cet ensemble s'écrit

$$\int_1^3 \left(\int_0^{\frac{x+3}{2}} f(x,y)\ dy\right) dx = \int_0^2 \left(\int_1^3 f(x,y)\ dx\right) dy + \int_2^3 \left(\int_{2y-3}^3 f(x,y)\ dx\right) dy.$$

II. Intégration sur des ensembles fermés bornés

1. **Dans le plan, on considère l'ensemble borné fermé A délimité par le graphique de la droite d'équation cartésienne $x - y = 0$ et celui de la fonction $x \mapsto -x^2$.**
   a) Représenter A dans un repère orthonormé et en donner une expression analytique.
   b) Calculer, si elle existe, l'intégrale de f sur A si $f : (x,y) \mapsto f(x,y) = y\cos(x)$.



L'expression analytique de A est
$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1,0],\ y \in [x,-x^2]\}$
ou encore
$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1,0],\ x \in [-\sqrt{-y}, y]\}$.
La fonction f est intǵrable sur A et son intégrale vaut $7\sin(1) - 11\cos(1)$.

2. **Si elle existe, calculer l'intégrale de**
   a) $f(x,y) = 4 - x^2$ sur $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-2,2],\ y \in [x^2, 8-x^2]\}$
   b) $f(x,y) = \cos(y^2)$ sur $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1,0],\ y \in [-1,x]\}$
   c) $f(x,y) = x + 2y$ sur $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le \inf\{-x, \sqrt{4-x^2}\}\}$
   d) $f(x,y) = x^2\cos(xy)$ sur $A = [-1,1] \times \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

   a) La fonction f est intégrable sur A et son intégrale vaut $\dfrac{1024}{15}$.

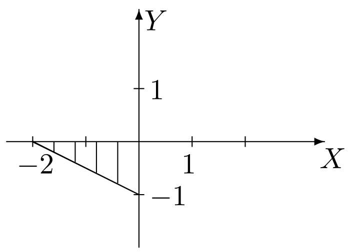
   b) La fonction f est intégrable sur A et son intégrale vaut $\dfrac{1}{2}\sin(1)$.

   c) La fonction f est intégrable sur A et son intégrale vaut $\dfrac{16}{3} - 4\sqrt{2}$.

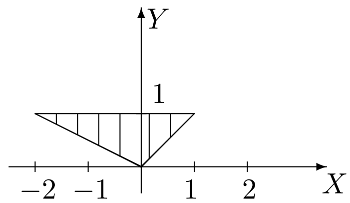
   d) La fonction f est intégrable sur A et son intégrale vaut $\dfrac{2\pi - 8}{\pi^2}$.

3. **Si elle existe, déterminer la valeur de l'intégrale sur l'ensemble A borné fermé hachuré ci-dessous dans les cas suivants**

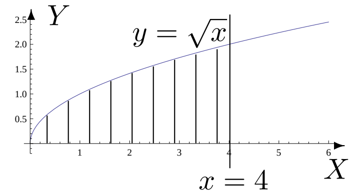
a) $\int\int_A e^{2x-y}\, dx\, dy$



b) $\int\int_A xy^2\, dx\, dy$



c) $\displaystyle\int\int_A \frac{y}{\sqrt{4+x^2}}\, dx\, dy$



a) La fonction f est intégrable sur A et son intégrale vaut $\dfrac{4\,e^5 - 5\,e^4 + 1}{10\,e^4}$.

b) La fonction f est intégrable sur A et son intégrale vaut $-\dfrac{3}{10}$.

c) La fonction f est intégrable sur A et son intégrale vaut $\sqrt{5} - 1$.

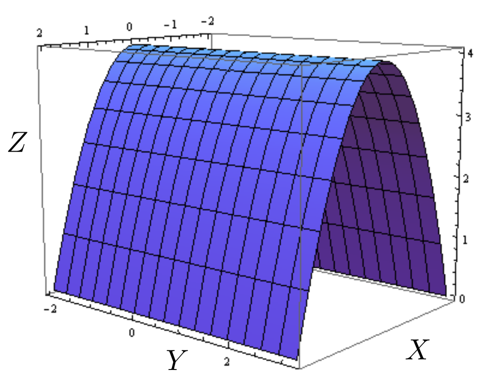
III. Volume d'un corps

Calculer le volume des corps de l'espace décrits ci-dessous. Donner aussi une représentation graphique de ces corps.

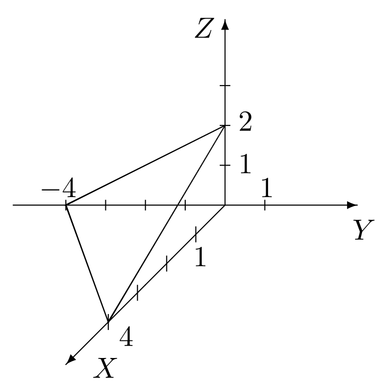
1. **Corps borné par la surface d'équation cartésienne $z = 4 - x^2$ et les plans d'équation $z = 0,\ y = -2$ et $y = 3$.**
2. **Corps borné par les plans de coordonnées et la surface d'équation $x - y + 2z = 4$**

Le volume du premier corps vaut $160/3$ (unités de volume) et celui du deuxième vaut $16/3$. Les représentations graphiques sont les suivantes :

1)



2)



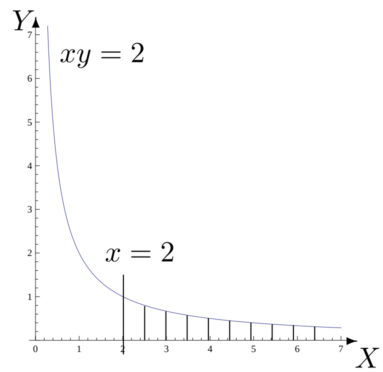
Liste 4 : Fonctions de plusieurs variables (4)

I. Intégration sur des ensembles non fermés bornés

1. **Si elles ont un sens, calculer les intégrales suivantes et représenter l'ensemble d'intégration.**

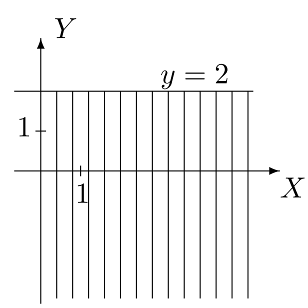
a) $\displaystyle\int\int_A \frac{1}{x^2}\,dx\,dy$ avec $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 2,\ 0 \leq y \leq \frac{2}{x}\}$

La fonction est intégrable sur A et son intégrale vaut $1/4$. L'ensemble d'intégration est l'ensemble hachuré ci-contre.



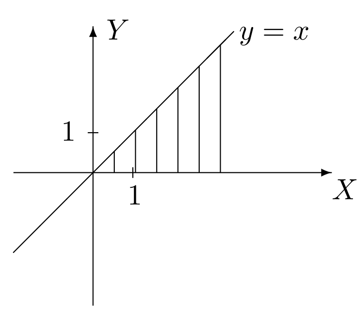
b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{2} \left(\int_0^{+\infty} e^{2y-x}\,dx \right) dy$

La fonction est intégrable sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,+\infty[,\ y \in]-\infty, 2]\}$ et son intégrale vaut $\dfrac{e^4}{2}$. L'ensemble d'intégration est l'ensemble hachuré ci-contre.



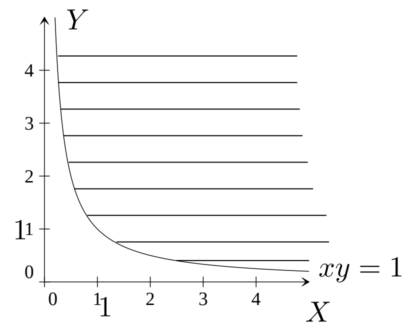
c) $\displaystyle\int\int_A e^{-x^2}\,dx\,dy$ avec $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x\}$

La fonction est intégrable sur A et son intégrale vaut $\dfrac{1}{2}$. L'ensemble d'intégration est l'ensemble hachuré ci-contre.



d) $\displaystyle\int\int_A y^3\, e^{-xy^2}\; dx\, dy \quad$ avec $\quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ 1 \le xy\}$

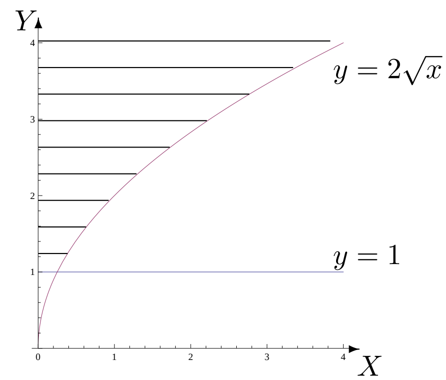
La fonction est intégrable sur A et son intégrale vaut 1. L'ensemble d'intégration est l'ensemble hachuré ci-contre.



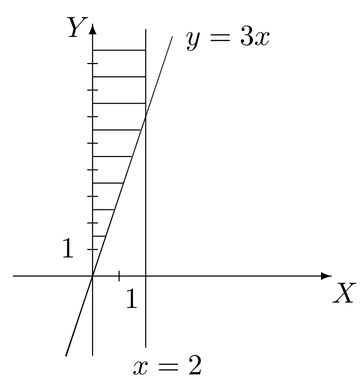
2. **Déterminer si les intégrales suivantes existent ; si oui, les calculer. Représenter géométriquement l'ensemble d'intégration dans chaque cas.**

$$a) \int_1^{+\infty} \left(\int_0^{y^2/4} \frac{ye^{-y^2}}{x+y^2}\, dx \right) dy, \quad b) \int_0^2 \left(\int_{3x}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2+y^2}\, dy \right) dx, \quad c) \int_0^1 \left(\int_0^{4x^2} \frac{1}{x+y}\, dy \right) dx$$

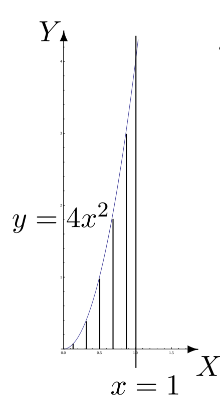
a) La fonction est intégrable sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [1, +\infty[,\ x \in [0, y^2/4]\}$ et son intégrale vaut $\dfrac{1}{2e} \ln(5/4)$. L'ensemble d'intégration est l'ensemble hachuré ci-contre.



b) La fonction est intégrable sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in]0,2],\ y \in [3x, +\infty[\}$ et son intégrale vaut $2\sqrt{2}\,\mathrm{arcotg}(3)$. L'ensemble d'intégration est l'ensemble hachuré ci-contre.



c) La fonction est intégrable sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in]0,1],\ y \in [0, 4x^2]\}$ et son intégrale vaut $\frac{5}{4}\ln(5) - 1$. L'ensemble d'intégration est l'ensemble hachuré ci-contre.



3. **On considère l'intégrale double suivante**

$$I = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^x \sin(y-x)e^{-x}\, dy \right) dx$$

a) Permuter l'ordre d'intégration et représenter l'ensemble d'intégration dans un repère orthonormé.
b) Si elle existe, déterminer la valeur de cette succession d'intégrales dans un ordre et dans l'autre.
c) Trouve-t-on la même valeur quel que soit l'ordre d'intégration ? Justifier.

a) L'ensemble d'intégration A est donné par

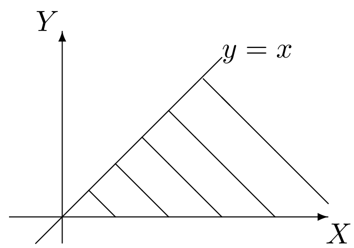
$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,+\infty[,\ y \in [0,x]\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,+\infty[,\ x \in [y,+\infty[\}$$

et est représenté par l'ensemble hachuré ci-dessous.

En permutant l'ordre d'intégration, on a $I = \int_0^{+\infty} \left(\int_y^{+\infty} \sin(y-x)e^{-x}\, dx \right) dy$.

b) La fonction est intégrable sur A et, dans un ordre ou dans l'autre, son intégrale vaut $-1/2$.

c) On trouve la même valeur car la fonction est intégrable sur A.



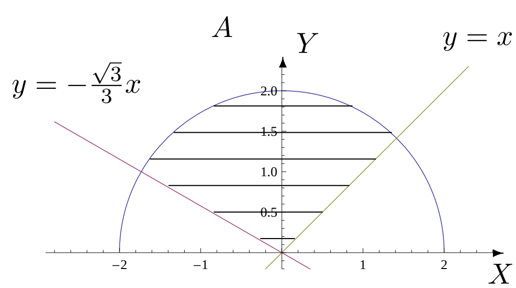
II. Intégration par changement de variables polaires

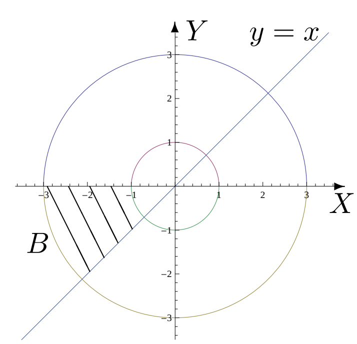
1. **Si elle existe, calculer**

a) $\displaystyle\int\int_A \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy$ où A est l'ensemble hachuré ci-dessous.

b) $\displaystyle\int\int_B xy\, dx\, dy$ où B est l'ensemble hachuré ci-dessous.

c) $\displaystyle\int\int_C (x+3y)\, dx\, dy$ où $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le \inf\{-x, \sqrt{4-x^2}\}\}$.





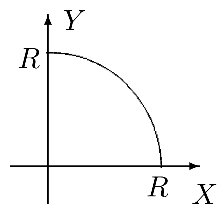
Les 3 fonctions sont intégrables et les intégrales valent respectivement $\frac{14\pi}{9}$, 5 et $\frac{8}{3}(3-2\sqrt{2})$.

2. **Soit A une partie du plan (bornée et fermée). Le centre de masse de A (considéré homogène) est défini comme le point de coordonnées (x_A, y_A) où**

$$x_A = s^{-1} \int\int_A x \, dx \, dy, \quad y_A = s^{-1} \int\int_A y \, dx \, dy$$

et où s est l'aire de la surface A.
Déterminer la position du centre de masse d'une plaque homogène dont la forme est un quart de cercle de rayon R (R réel strictement positif).

La position du centre de masse est donnée par le point de coordonnées $\left(\frac{4R}{3\pi}, \frac{4R}{3\pi}\right)$ dans un repère orthonormé correspondant au graphique ci-dessous.



3. **Déterminer le volume du corps borné par la surface d'équation cartésienne $z = 4 - x^2 - y^2$ et par le plan d'équation $z = 0$.**

Le volume du corps est 8π (unités de volume).

Liste 5 : Calcul matriciel (1)

I. Opérations entre matrices

1. **Soient les matrices A, B, C données par**

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & -i \\ 1-i & 1 \\ \frac{2}{i} & (2+i)^2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 1 \\ -i & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & \frac{1}{i-1} \\ 2i & \frac{i}{3} \end{pmatrix}.$$

Si possible, effectuer les opérations suivantes (et simplifier la réponse au maximum). Si cela ne l'est pas, en expliquer la raison.

$$1)\ A+B,\ 2)\ A+\widetilde{B},\ 3)\ A.B,\ 4)\ A.B+C,\ 5)\ B.A,\ 6)\ C.\widetilde{A},\ 7)\ A^*.C,\ 8)\ i.C,\ 9)\ (i.A)^*.$$

1) $A+B$ est impossible à calculer car les matrices n'ont pas le même format.

2) $A+\widetilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & 5-i & -3i \\ -i & 2 & 5+4i \end{pmatrix}$

3) $A.B = \begin{pmatrix} -4-4i & 1-5i \\ 8-i & 7+8i \end{pmatrix}$

4) $A.B+C = \begin{pmatrix} -1-4i & \frac{1-11i}{2} \\ 8+i & \frac{21+25i}{3} \end{pmatrix}$

5) $B.A = \begin{pmatrix} -6 & -2+2i & 4i \\ 12-i & 5-4i & 3-4i \\ -5i & 1-i & 4+8i \end{pmatrix}$

6) $C\widetilde{A}$ est impossible à calculer car le nombre de colonnes (2) de C n'est pas égal au nombre de lignes (3) de $\widetilde{A}$.

7) $A^*C = \begin{pmatrix} 7 & \frac{-11-9i}{6} \\ 3+5i & \frac{-2i}{3} \\ 8+12i & \frac{7}{3} \end{pmatrix}$

8) $iC = \begin{pmatrix} 3i & \frac{1-i}{2} \\ -2 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

9) $(iA)^* = \begin{pmatrix} -3i & 1 \\ 1-i & -i \\ 2 & -4-3i \end{pmatrix}$

2. **Soit A une matrice carrée de dimension 3 telle que $A_{ij} = 2, \forall i, j$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.**

Calculer $C = AB - BA$ et en déduire la forme de $\widetilde{C} + C$.

On a $C = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ -4 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\widetilde{C} + C$ est la matrice nulle de dimension 3.

3. **On donne la matrice** $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$**. Montrer que** $A^2 - 5A + 6I = 0$**.**

4. **Déterminer la forme générale des matrices qui commutent avec** $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$**.**

   La forme générale des matrices qui commutent avec A est du type $\begin{pmatrix} a & -2c \\ c & a \end{pmatrix}$ $(a, c \in \mathbb{C})$.

II. Déterminants

1. **Calculer le plus rapidement possible le déterminant de chacune des matrices suivantes.**

   $$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3+i & -2i \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3i \\ (i-1)^2 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}, \quad D = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 7 & -1 \\ 7 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

   Le déterminant de A vaut $\frac{3}{2}(2+i)$, celui de B vaut -10, celui de C vaut 40 et celui de D vaut -16.

2. **Le déterminant de chacune des matrices suivantes est un polynôme en** $x \in \mathbb{C}$**. Factoriser ce polynôme en un produit de facteurs du premier degré.**

   $$A = \begin{pmatrix} 1-x & -\sqrt{5} \\ \sqrt{5} & 3+x \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} i & x-2 \\ x & 5i \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} x & 9 \\ -1 & x \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} x+1 & 0 & 6 \\ 0 & x-1 & x \\ 1 & 0 & x+2 \end{pmatrix}.$$

   Le déterminant de A est égal à $-(x+4)(x-2)$; celui de B est égal à $-(x - 1 - 2i)$ $(x-1+2i)$, celui de C vaut $(x+3i)(x-3i)$ et celui de D vaut $(x-1)^2(x+4)$.

III. Inversion de matrices

Calculer (si elle existe) la matrice inverse de chacune des matrices suivantes (on donne $\alpha \in \mathbb{R}$**).**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \\ \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -i & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

- La matrice inverse de A est $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- La matrice B ne possède pas d'inverse car son déterminant est nul.
- La matrice inverse de C est égale à la transposée de C .
- La matrice inverse de D est $D^{-1} = \frac{-2-i}{5}\begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ i & i & 1 \\ i & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Liste 6 : Calcul matriciel (2)
Approximations polynomiales

I. Diagonalisation

1. **Déterminer les valeurs propres des matrices suivantes et en donner la multiplicité.**

$$A = \begin{pmatrix} i & -2i \\ 2i & i \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 9 & -1 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de la matrice A sont $-2+i$ et $2+i$; ces valeurs propres sont simples (c'est-à-dire de multiplicité 1).
Les valeurs propres de la matrice B sont -3, 2 et 5 ; ces valeurs propres sont simples.
Les valeurs propres de la matrice C sont $\frac{1-\sqrt{65}}{2}$, $\frac{1+\sqrt{65}}{2}$ et 3 ; ces valeurs propres sont simples.

2. **Rechercher les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices suivantes. Ces matrices sont-elles diagonalisables ? Pourquoi ? Si elles le sont, en déterminer une forme diagonale Δ , ainsi qu'une matrice inversible S qui y conduit.**

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Calculer les produits AS et $S\Delta$. Comparer les résultats et justifier.

• Matrice A : 2 valeurs propres simples : -5 et 8 ; la matrice est donc diagonalisable.
Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre -5 sont du type $c\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{C}_0$ et ceux relatifs à la valeur propre 8 sont du type $c'\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $c' \in \mathbb{C}_0$.
On a, par exemple, $\Delta = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ avec $S = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.
Dès lors, on a $AS = S\Delta = \begin{pmatrix} 10 & 24 \\ -5 & 40 \end{pmatrix}$. Comme $\Delta = S^{-1}AS$, en multipliant les deux membres à gauche par S, on obtient $S\Delta = AS$.

• Matrice B : 2 valeurs propres, l'une simple 1 et l'autre double -2.
Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre double -2 sont du type $c\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{C}_0$.
Comme cette valeur propre n'engendre pas 2 vecteurs propres linéairement indépendants, la matrice n'est pas diagonalisable.
Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre simple 1 sont du type $c'\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $c' \in \mathbb{C}_0$.

• Matrice C : 2 valeurs propres, l'une simple 1 et l'autre double -2.

Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre double -2 sont du type $c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ non simultanément nuls. Cette matrice est donc diagonalisable car elle possède 3 vecteurs propres linéairement indépendants.

Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre simple 1 sont du type $c' \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $c' \in \mathbb{C}_0$.

On a, par exemple, $\Delta = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $S = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. **Une matrice carrée A de dimension 2 possède les deux valeurs propres 2 et -1, auxquelles peuvent être associés respectivement les vecteurs propres $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Que vaut A ?**

La matrice A est égale à $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

II. Divers

1. **Dans un laboratoire, à chaque repas, des lapins ont le choix entre manger des carottes, de la salade ou des pissenlits mais ne peuvent manger qu'un aliment d'une seule catégorie lors d'un même repas. Comme ils sont gourmands, ils ne manquent jamais un repas.**
L'observation montre que si un lapin a mangé des carottes à un repas, il en mangera au repas suivant dans 75 % des cas ; sinon, il mangera de la salade une fois sur 5 ou des pissenlits 1 fois sur 20.
S'il a mangé de la salade, il en mangera encore 1 fois sur 2 au repas suivant ; sinon, il mangera un des deux autres aliments de façon équiprobable.
Enfin, s'il a mangé des pissenlits, au repas suivant il y a 1 chance sur 5 qu'il mange des carottes et 2 chances sur 5 de la salade.

   (a) Si un lapin vient de manger des carottes, quelle est la probabilité qu'il mange de la salade dans deux repas ?

   (b) A longue échéance, que mange ce lapin ?

(a) S'il vient de manger des carottes, le lapin a 27 % de chance de manger de la salade dans deux repas.
(b) A longue échéance, le lapin a 48 % (40 sur 83) de chance de manger des carottes, 18 % (15 sur 83) de chance de manger des pissenlits et 34 % (28 sur 83) de chance de manger de la salade.

2. **En algèbre linéaire (ou géométrie analytique), une rotation du plan (d'angle θ) est représentée par une matrice du type**

$$M_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

où θ est un réel (et représente la mesure de l'angle de la rotation).

– **Pour tout θ, déterminer la matrice produit M_θ^2 et en simplifier les éléments au maximum.**
On a
$$M_\theta^2 = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix}$$

– **Montrer que quels que soient θ, θ', les matrices M_θ et $M_{\theta'}$ commutent. Qu'est-ce que cela signifie en termes de rotations ?**
On a
$$M_\theta M_{\theta'} = M_{\theta'} M_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta+\theta') & -\sin(\theta+\theta') \\ \sin(\theta+\theta') & \cos(\theta+\theta') \end{pmatrix}$$
ce qui signifie que l'ordre dans lequel on effectue les rotations n'a pas d'importance.

– **Montrer que quel que soit le réel θ, la matrice**
$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$
est aussi une matrice qui représente une rotation.

On a
$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}.$$
C'est donc aussi une matrice de rotation mais la rotation s'effectue dans le sens inverse de la rotation d'angle θ.

III. Approximations polynomiales

1. **Dans chacun des cas suivants, déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre n en x_0 pour la fonction f_k. Représenter f_2 (—-ou f_3 ou f_5—) et ses approximations.**

$f_1(x) = \cos(x)\, e^{2x},\ x_0 = 0, n = 0,1,2,3$ $\quad f_2(x) = \sqrt{1+4x},\ x_0 = 0, n = 0,1,2$

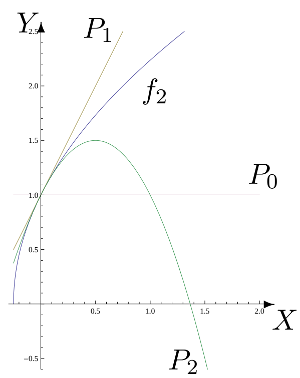
$f_3(x) = \dfrac{1}{2-x},\ x_0 = 0, n = 0,1,2$ $\quad f_4(x) = \mathrm{arcotg}(x),\ x_0 = 0$ (resp. $x_0 = 1$)$, n = 0,1,2$

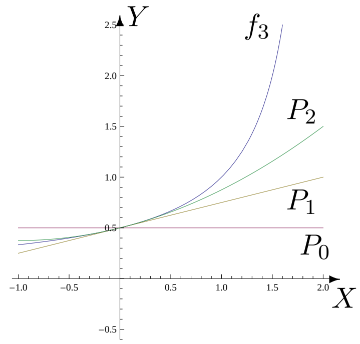
$f_5(x) = \sin^2(x),\ x_0 = 0,\ n = 0,1,2$ $\quad f_6(x) = \cos(x),\ x_0 = 1, n = 0,1,2$

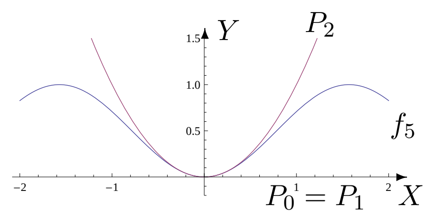
Fonction	Ordre 0	Ordre 1	Ordre 2
f_1	1	$1+2x$	$1+2x+\frac{3}{2}x^2,\ x\in\mathbb{R}$
f_2	1	$1+2x$	$1+2x-2x^2,\ x\in\mathbb{R}$
f_3	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{2}+\dfrac{x}{4}$	$\dfrac{1}{2}+\dfrac{x}{4}+\dfrac{x^2}{8},\ x\in\mathbb{R}$
$f_4\ (x_0=0)$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{\pi}{2}-x$	$\dfrac{\pi}{2}-x,\ x\in\mathbb{R}$
$f_4\ (x_0=1)$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x-1}{2}$	$\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x-1}{2}+\dfrac{(x-1)^2}{4},\ x\in\mathbb{R}$
f_5	0	0	$x^2,\ x\in\mathbb{R}$
f_6	$\cos(1)$	$\cos(1)-\sin(1)(x-1)$	$\cos(1)-\sin(1)(x-1)-\cos(1)\dfrac{(x-1)^2}{2},\ x\in\mathbb{R}$

L'approximation à l'ordre 3 en 0 de f_1 est donnée par $P_3(x)=1+2x+\frac{3}{2}x^2+\frac{x^3}{3},\ x\in\mathbb{R}$.

Dans les graphiques suivants, notons P_i l'approximation polynomiale à l'ordre i.

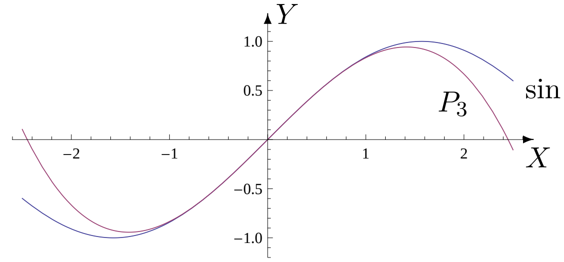






2. **Déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre 3 en 0 de la fonction** sin **et en estimer le reste. Représenter la fonction et cette approximation dans le même repère orthonormé.**

L'approximation polynomiale à l'ordre 3 en 0 est donnée par $P(x)=x-\frac{x^3}{6},\ x\in\mathbb{R}$ et le reste vaut $R_3(x)=\dfrac{\sin(u)}{4!}x^4,\ x\in\mathbb{R}$ où u est un réel strictement compris entre 0 et x. Dès lors, on a $|R_3(x)|\le\dfrac{x^4}{24},\ \forall x\in\mathbb{R}$.



3. **Un professeur de mathématique lance un défi à ses élèves. Le premier qui donnera une approximation du nombre e avec les 3 premières décimales exactes et pourra expliquer sa méthode aux autres sera dispensé de la prochaine interrogation. Pour relever le défi, les élèves, restés en classe, n'ont droit qu'à une feuille et un crayon. Ils sont sans accès à internet et ne peuvent utiliser ni gsm, ni calculatrice ...**
Comment peuvent-ils procéder ?

L'approximation polynomiale en 0 à l'ordre n ($n \in \mathbb{N}$) de l'exponentielle est donnée par

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{x^n}{n!},\ x \in \mathbb{R}$$

et le reste associé vaut $R_n(x) = \dfrac{e^u}{(n+1)!}\, x^{n+1},\ x \in \mathbb{R}$ où u est un réel strictement compris entre 0 et x. Dès lors, si $x \in [0,1]$, $e^u \in [1,e] \subset [1,3]$ et on a $\quad R_n(x) \leq \dfrac{3\, x^{n+1}}{(n+1)!}$.

Si $x = 1$, l'inégalité

$$\frac{3}{(n+1)!} < \frac{1}{10^3} \quad \text{est vérifiée si} \quad n \geq 6 \ (7! = 5040).$$

Dès lors, en prenant $n = 6$ et $x = 1$, une valeur approchée de e est donnée par

$$P(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} = 2 + \frac{517}{720} = 2,718\ldots$$

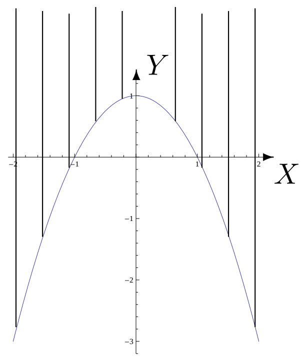
Liste 7 : Révisions

1. **On donne la fonction f par**

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y - 1}$$

   (a) **Déterminer le domaine d'infinie dérivabilité de cette fonction et le représenter dans un repère orthonormé.**

   La fonction f est infiniment dérivable sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y - 1 > 0\}$. Les points de l'ensemble sont représentés par la partie hachurée du plan, les points de la parabole étant exclus.



   (b) **Déterminer l'expression explicite de $F(t) = f(2t+1, 3t^2)$, le domaine de dérivabilité de cette fonction et l'expression explicite de sa dérivée en tout point du domaine.**

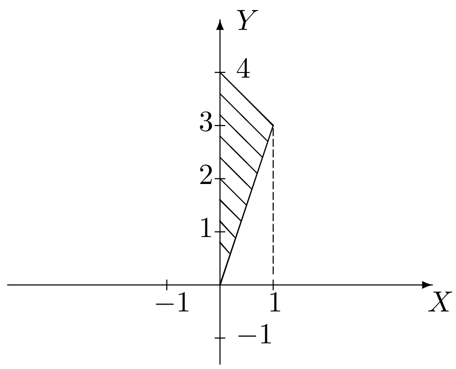
   La fonction F est la fonction $t \mapsto F(t) = \sqrt{7t^2 + 4t}$; son domaine de dérivabilité est l'ensemble $\{t \in \mathbb{R} : 7t^2 + 4t > 0\} = \left]-\infty, -\frac{4}{7}\right[\cup]0, +\infty[$ et sa dérivée est donnée par $DF(t) = \dfrac{7t+2}{\sqrt{7t^2+4t}}$.

   (c) **Que vaut la dérivée de F en 2 ? Simplifier votre réponse au maximum.**

   La dérivée de F en 2 vaut $\dfrac{8}{3}$.

2. **On donne l'ensemble fermé hachuré A suivant. Déterminer**

$$\int\int_A y\, e^{y-x}\, dxdy.$$



La fonction $f : (x,y) \mapsto ye^{y-x}$ est continue sur le fermé borné A ; elle est donc intégrable sur cet ensemble et on a

$$\iint_A ye^{y-x}dxdy = \frac{5}{4}(e^4-1)-e^2.$$

3. **On donne la matrice**

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) **Déterminer les valeurs propres de A.**

   Les valeurs propres de A sont 2 et 3.

   (b) **Cette matrice est-elle diagonalisable ? Si oui, en donner une forme diagonale ainsi qu'une matrice inversible qui y conduit puis vérifier que ces matrices sont correctes.**

   Les valeurs propres étant simples, la matrice est diagonalisable et on a, par exemple,

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (c) **Montrer que la matrice A vérifie $A^2-5A+6I=0$ où I est la matrice identité.**

4. **Soient les matrices**

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} -i \\ 4 \end{pmatrix}$$

Si c'est possible, calculer

   (a) **1)** AB **2)** BA **3)** BC **4)** CB **5)** AC **6)** CA

   1) Le produit AB est impossible à calculer car le nombre de colonnes de A n'est pas égal au nombre de lignes de B.
   2) Le produit BA est la matrice ligne $(-5 \;\; 4)$.
   3) Le produit BC est la matrice de dimension 1 dont l'élément est $-8-3i$.
   4) Le produit CB est la matrice

$$\begin{pmatrix} -3i & 2i \\ 12 & -8 \end{pmatrix}.$$

   5) Le produit AC est la matrice

$$\begin{pmatrix} 8+i \\ 4-i \end{pmatrix}.$$

   6) Le produit CA est impossible à calculer car le nombre de colonnes de C n'est pas égal au nombre de lignes de A.

   (b) **le déterminant des matrices obtenues ci-dessus**
   Comme on ne peut calculer que le déterminant d'une matrice carrée, le déterminant de BC vaut $-8-3i$ et celui de CB vaut 0.

(c) **la matrice inverse de A et des matrices obtenues ci-dessus**

La matrice inverse de A est la matrice $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et celle de BC est $\frac{-8+3i}{73}$.
Comme on ne peut calculer l'inverse que de matrices carrées de déterminant différent de zéro, les autres matrices n'ont pas d'inverse.

5. **On donne la fonction f par**

$$f(x) = \mathrm{tg}(3x).$$

(a) **Si possible, déterminer les approximations polynomiales de cette fonction à l'ordre 1, 2 et 3 en 0.**
Si on note $P_n(x)$ l'approximation polynomiale à l'ordre n en 0, on a

$$P_1(x) = 3x = P_2(x), \quad P_3(x) = 3x + 9x^3, \ x \in \mathbb{R};$$

(b) **Dans un même repère orthonormé, représenter le graphique de f et les approximations demandées au voisinage de** 0 **en utilisant différentes couleurs.**