1, 2, 3... Sciences

Année académique 2014-2015

Mathématiques générales (partim B)

Correction des listes d'exercices du 2ème quadrimestre :
Géologie

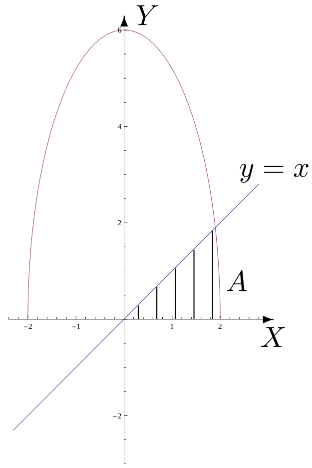
Version 29 janvier 2015

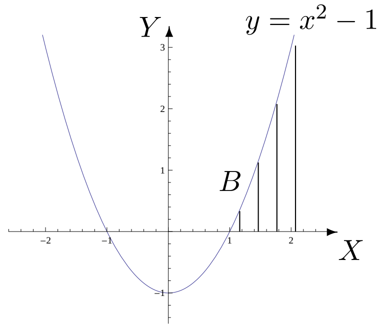
Liste 1 : compléments

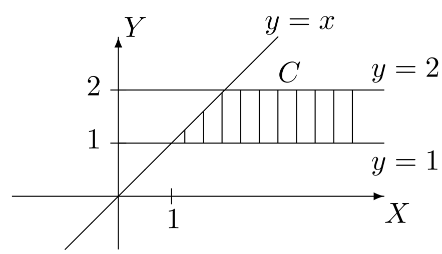
I. Représentation d'ensembles

1. **Dans un repère orthonormé du plan, représenter, en le hachurant, l'ensemble dont une description analytique est la suivante**

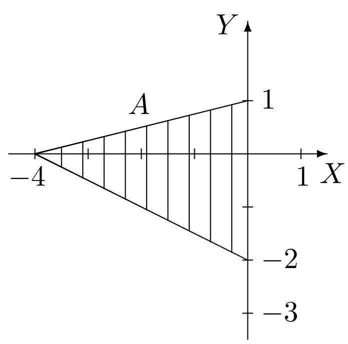
a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \inf\{x, \sqrt{36-9x^2}\}\}$
b) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ 0 \leq y \leq x^2 - 1\}$
c) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y,\ y \in [1,2]\}$

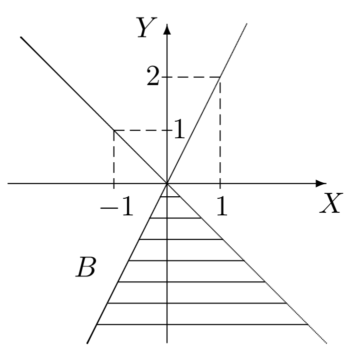


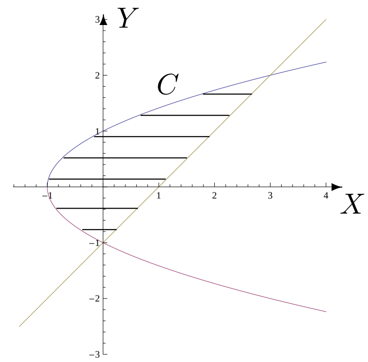




2. **Décrire analytiquement les ensembles hachurés suivants, les points des bords étant compris dans l'ensemble, en donnant d'abord**
a) l'ensemble de variation des abscisses
b) l'ensemble de variation des ordonnées.







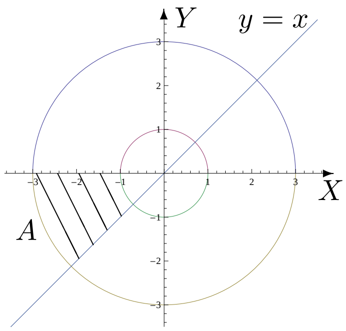
Les descriptions analytiques sont les suivantes
$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-4,0],\ y \in [-\frac{x}{2} - 2, \frac{x}{4} + 1]\}$
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-2,0],\ x \in [-2(y+2), 0]\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,1],\ x \in [4(y-1),\ 0]\}$

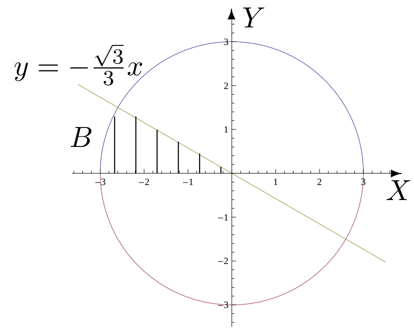
$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in\ ]-\infty, 0],\ y \in]-\infty, 2x]\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,\ +\infty[,\ y \in]-\infty, -x]\}$
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in]-\infty, 0],\ x \in [\ \frac{y}{2}, -y]\}$

$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1,0],\ y \in [-\sqrt{x+1}, \sqrt{x+1}]\}$
$\cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,3],\ y \in [x-1, \sqrt{x+1}]\}$
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1,2],\ x \in [y^2 - 1, y+1]\}$

.

3. **En utilisant les coordonnées polaires, décrire analytiquement les ensembles hachurés suivants, les points des bords étant compris dans l'ensemble A mais non dans B.**





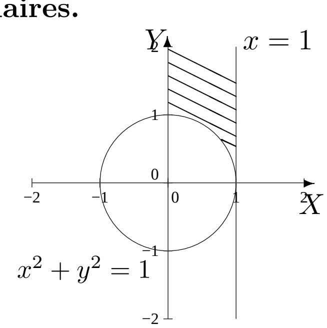
Les ensembles A et B exprimés en coordonnées polaires sont respectivement

$$A' = \left\{(r,\theta) : r \in [1,3],\ \theta \in \left[\pi, \frac{5\pi}{4}\right]\right\} \quad \text{et} \quad B' = \left\{(r,\theta) : r \in]0,3[,\ \theta \in \left]\frac{5\pi}{6}, \pi\right[\right\}.$$

4. **Dans un repère orthonormé du plan, représenter, en le hachurant, l'ensemble dont une description analytique est**

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1,\ y > 0,\ x^2 + y^2 > 1\}.$$

Ensuite, décrire analytiquement cet ensemble en utilisant les coordonnées polaires.



Les points des bords sont exclus de l'ensemble.
L'ensemble E exprimé en coordonnées polaires est

$$E' = \left\{(r,\theta) : \theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[,\ r \in \left]1, \frac{1}{\cos(\theta)}\right[\right\}.$$

II. Dérivation

1. **En appliquant la définition, montrer que la fonction est dérivable en x_0 et donner la valeur de sa dérivée en ce point si**
a) $f : x \mapsto |x^2 - 9|$ et $x_0 = 2$
b) $g : x \mapsto \sqrt{x^2 - 4}$ et $x_0 = 3$
Ces deux fonctions sont dérivables en x_0 ; la dérivée de f en 2 vaut -4 et celle de g en 3 vaut $\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

2. **a) On donne la fonction f dérivable sur $]-2,2[$. Quel est le domaine de dérivabilité de la fonction F définie par $F(x) = f(\sqrt{x^2 - 1})$ ainsi que l'expression**

de sa dérivée en fonction de celle de f ?
Le domaine de dérivabilité de F est $]-\sqrt{5},-1[\,\cup\,]1,\sqrt{5}[$ et sa dérivée vaut

$$DF(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}(Df)(\sqrt{x^2-1}).$$

b) Même question pour g dérivable sur $]-\frac{\pi}{2},0[$ avec $G(x) = g(\arcsin(3x-1))$.
Le domaine de dérivabilité de G est $\left]0,\dfrac{1}{3}\right[$ et sa dérivée vaut

$$DG(x) = \frac{3}{\sqrt{-9x^2+6x}}(Dg)(\arcsin(3x-1)).$$

III. Cacul intégral

1. a) **a) Si a est un paramètre réel fixé dans $]0,1]$, la fonction $f_1 : x \mapsto a^2\cos(ax)$ est-elle intégrable sur $[0,\frac{\pi}{2}]$? Si oui, que vaut son intégrale ?**
   La fonction est continue sur le fermé borné $[0,\frac{\pi}{2}]$; elle y est donc intégrable et son intégrale vaut $a\sin\left(\frac{a\pi}{2}\right)$.

   b) Si $a>0$ est un réel fixé, la fonction $f_2 : x \mapsto \frac{a\ e^{a^2}}{a^2+x}$ est-elle intégrable sur $[0,a^2]$? Si oui, que vaut son intégrale ?
   La fonction est continue sur le fermé borné $[0,a^2]$; elle y est donc intégrable et son intégrale vaut $a\ln 2\ .\ e^{a^2}$.

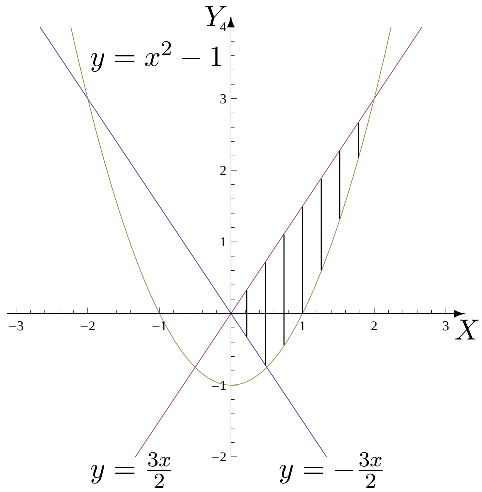
   c) Si $a>0$ est un réel fixé, la fonction $f_3 : x \mapsto \frac{\sqrt{a}}{x^2-a^2}$ est-elle intégrable sur $[a,+\infty[$? Si oui, que vaut son intégrale ?
   La fonction est continue sur $]a,+\infty[$ et, par application de la définition ou du critère en θ, elle est intégrable en $+\infty$ mais non en a^+. Cette fonction n'est donc pas intégrable sur $[a,+\infty[$.

2. **Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes**

   $$a) \int_0^e \ln(x)\ dx \qquad\qquad b) \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2+4}\ dx$$

   Ces deux fonctions sont intégrables. La première intégrale vaut 0 et la deuxième $\dfrac{\pi}{8}$.

3. **On considère l'ensemble $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -\dfrac{3x}{2} \le y \le \dfrac{3x}{2},\ y \ge x^2-1\right\}$. Donner une représentation graphique de cet ensemble en le hachurant et calculer l'aire de cette région du plan.**
   L'aire de la région hachurée vaut $\dfrac{33}{16}$.



IV. Divers

1. **Dans une réaction chimique, la constante d'équilibre à une température donnée vaut**

$$K_C = 50 = \frac{1,56^2}{(A - 0,78).0,22}$$

Que vaut A sachant que A représente la quantité de matière introduite dans le milieu réactionnel ?

La quantité de matière A introduite dans le milieu réactionnel vaut 1,001 mol.

2. **Dans une réaction chimique, la constante d'équilibre à une température donnée vaut**

$$K_C = 4 = \frac{x}{(0,5 - x)(0,25 - x)}$$

Que vaut x **sachant que** $x \in]0; 0,25[$ **représente le nombre de moles par litre de produit formé ?**

Le nombre de moles par litre de produit formé vaut $\frac{2-\sqrt{2}}{4}$ donc approximativement 0,146 mol/L.

3. **En creusant pour les fondations d'une maison, on pénètre dans une masse de débris de roche emballés dans une matrice argileuse. Dans la masse, on trouve les restes d'un arbuste qu'on échantillonne pour le dater au carbone-14. On obtient un carbone-14 résiduel correspondant à** 17 % **de la quantité initiale. Sachant que la constante de désintégration radioactive** λ **du carbone-14 vaut** $1,21\ 10^{-4}$ **(en année**$^{-1}$**) et que** $N(t) = N_0\ e^{-\lambda t}$ **où** $N(t)$ **est le nombre d'atomes restants au temps** t **(en années) et** N_0 **le nombre d'atomes au départ, déterminer**
a) la demi-vie (temps nécessaire pour que le nombre d'atomes radioactifs soit diminué de moitié) du carbone-14
b) l'âge de cet arbuste.

a) La demi-vie du carbone-14 est de 5 728 années.
b) L'arbuste a 14 644 ans.

4. **Le mouvement d'un point matériel sur un pendule rotatif est décrit par la fonction potentielle**

$$\nu(\theta) = -\frac{n^2}{2}\sin^2(\theta) - \cos(\theta),\ \ \theta \in [-\pi, \pi]$$

où n est un paramètre réel strictement positif. Les positions d'équilibre du système correspondent aux extrema de ν (équilibre stable pour un minimum, instable pour un maximum).
Déterminer les positions (éventuelles) d'équilibre du système.

Les extrema éventuels sont compris dans l'ensemble des zéros de la dérivée première de ν.
Si $n \in]0, 1]$ les zéros sont $-\pi,\ 0$ et π.
Si $n > 1$, les zéros sont $-\pi,\ 0,\ \pi$ et $\pm\text{arcos}(\frac{1}{n^2})$.

Pour avoir un extremum, la dérivée doit changer de signe de part et d'autre du zéro. Dès lors,
- si $n \in]0, 1]$, on a un maximum en $-\pi$ et π et un minimum en 0
- si $n > 1$, on a un maximum en $-\pi,\ 0$ et π et un minimum en $\pm\text{arcos}(\frac{1}{n^2})$.

Liste 2 : Fonctions de plusieurs variables (1)

I. Définitions et représentations graphiques

1. **Déterminer le domaine de définition des fonctions données explicitement ci-dessous et le représenter.**

$$f(x,y) = \ln\left(4y^2 - x^2 + 1\right), \quad g(x,y) = \sqrt{4 - |x-2y|}, \quad h(x,y) = \operatorname{arcos}\left(\frac{xy}{2}\right).$$

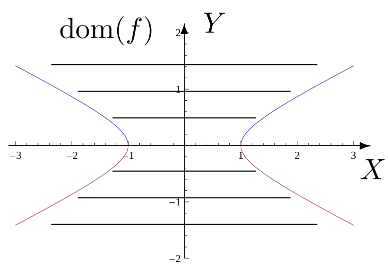
S'il appartient au domaine de définition, donner l'image de $(1,-2,)$ **par** f**, de** $(5,3)$ **par** g **et de** $(-1,1)$ **par** h**. Dans un repère orthonormé de l'espace, représenter ces points et leur image éventuelle.**

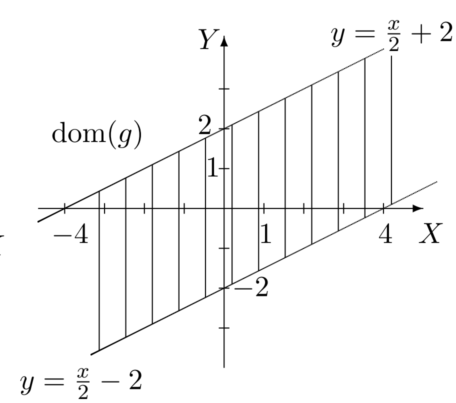
Les domaines de définition sont les suivants :

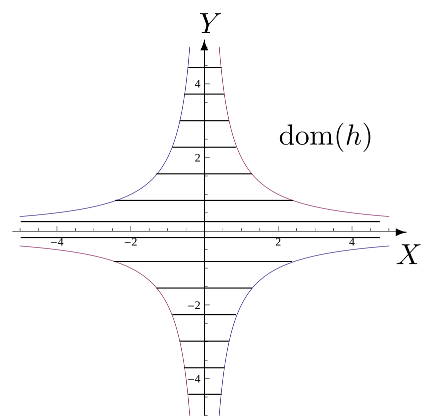
• $\mathrm{dom}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4y^2 - x^2 + 1 > 0\}$; sa représentation graphique est la région hachurée, les points de l'hyperbole étant exclus de l'ensemble. Comme $(1,-2)$ appartient à $\mathrm{dom}(f)$, on a $f(1,-2) = 4\ln(2)$.

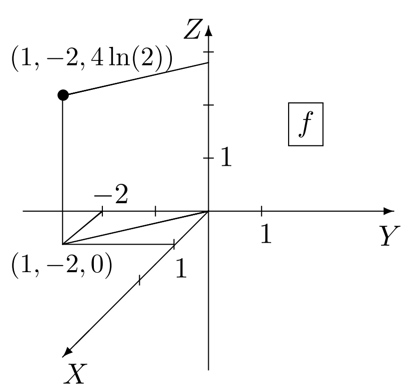
• $\mathrm{dom}(g) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -4 \leq x - 2y \leq 4\}$; sa représentation graphique est la région hachurée, les points des droites sont compris dans l'ensemble. Comme $(5,3)$ appartient à $\mathrm{dom}(g)$, on a $g(5,3) = \sqrt{3}$.

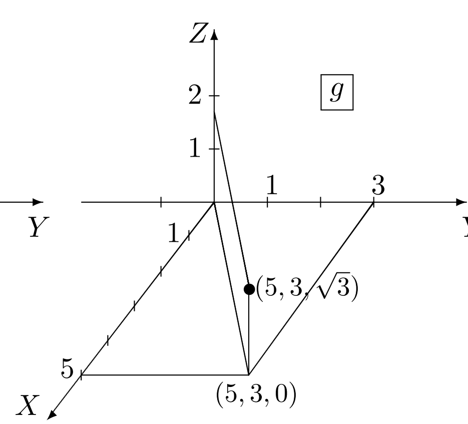
• $\mathrm{dom}(h) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq xy \leq 2\}$; sa représentation graphique est la région hachurée, les points des hyperboles sont compris dans l'ensemble. Comme $(-1,1)$ appartient à $\mathrm{dom}(h)$, on a $h(-1,1) = \frac{2\pi}{3}$.

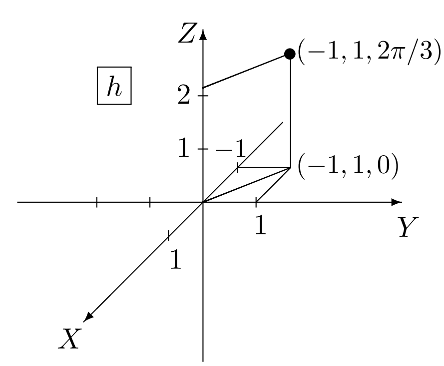




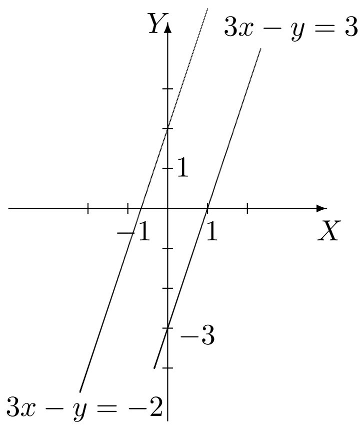


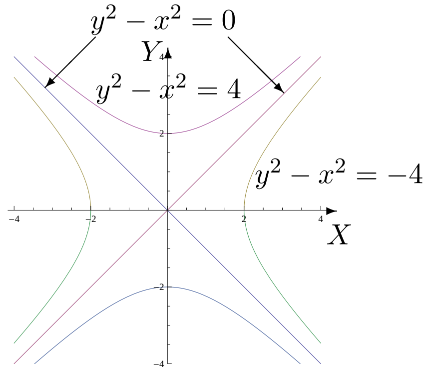


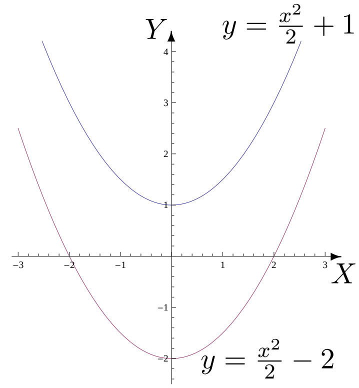




2. **Dans chacun des cas suivants, représenter les courbes de niveau d'équation** $f(x, y) = c$ **si**
a) $f(x, y) = 3x - y$ et $c = -2,\ 3$
b) $f(x, y) = y^2 - x^2$ et $c = -4,\ 0,\ 4$
c) $f(x, y) = x^2 - 2y$ et $c = -2,\ 4$

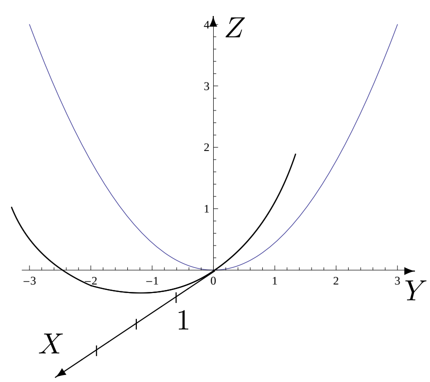






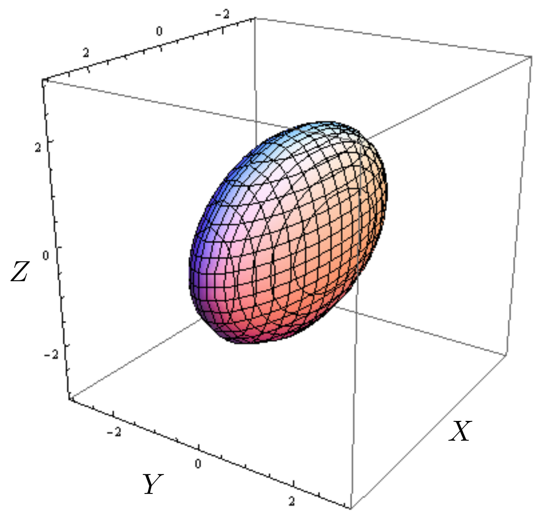
3. **On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé ; on appelle** X, Y, Z **les trois axes de celui-ci. Représenter la trace de la surface d'équation cartésienne** $x^2 + 4y^2 = 9z$ **dans le plan d'équation** $x = 0$ **puis dans celui d'équation** $y = 0$**. Comment appelle-t-on chacune de ces courbes ? Quelle est la nature de cette quadrique ?**

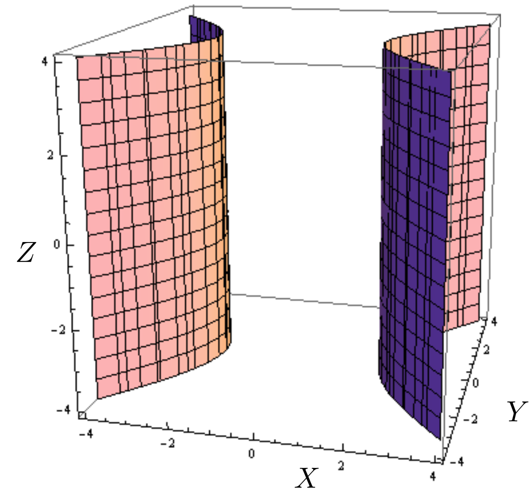
La trace dans le plan d'équation $x = 0$ est une parabole de sommet à l'origine du repère et d'axe de symétrie Z ; celle dans le plan d'équation $y = 0$ est aussi une parabole de sommet à l'origine du repère et d'axe de symétrie Z (cf. graphique).
Cette quadrique est un paraboloïde elliptique.



4. **Esquisser les représentations graphiques des surfaces quadriques dont les équations cartésiennes sont**

$$a)\ \frac{x^2}{9} + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1 \qquad\qquad b)\ x^2 - y^2 = 4.$$





II. Dérivation et gradient

1. **En appliquant la définition des dérivées, montrer que la fonction f donnée explicitement par $f(x,y) = 2x^3 + xy^2,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$ est dérivable par rapport à sa première variable au point $(-1,2)$ et donner la valeur de cette dérivée partielle en ce point.**

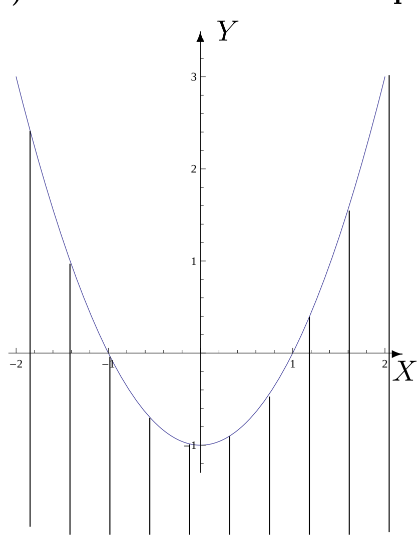
   La fonction f est dérivable par rapport à sa première variable au point $(-1,2)$ et sa dérivée partielle en ce point vaut 10.

2. **On donne les fonctions f, g et h par**

$$f(x,y) = \ln(x^2 - 1 - y), \quad g(x,y) = \sin(x^3y^2 + 3y) \quad \textbf{et} \quad h(x,y) = y^2\, e^{-\frac{y}{x}}.$$

   a) Déterminer leur domaine de définition, de dérivabilité et les représenter dans un repère orthonormé.

   b) Déterminer les dérivées partielles de ces fonctions.



Pour la fonction f, les 2 domaines sont égaux à $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 - y > 0\}$. La représentation graphique de cet ensemble est la région hachurée, les points de la parabole étant exclus de l'ensemble. Les dérivées partielles sont données par

$$D_x f(x,y) = \frac{2x}{x^2 - 1 - y}$$

et

$$D_y f(x,y) = \frac{-1}{x^2 - 1 - y}.$$

Pour la fonction g, les 2 domaines sont égaux à $\mathbb{R}^2$: ce sont tous les points du plan. Les dérivées partielles sont données par

$$D_x g(x,y) = 3x^2y^2\cos(x^3y^2+3y) \qquad \text{et} \qquad D_y g(x,y) = (2x^3y+3)\cos(x^3y^2+3y).$$

Pour la fonction h, les 2 domaines sont égaux à $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) : x = 0\} = \mathbb{R}_0 \times \mathbb{R}$: ce sont tous les points du plan sauf ceux de l'axe des ordonnées. Les dérivées partielles sont données par

$$D_x h(x,y) = \frac{y^3}{x^2}\, e^{-\frac{y}{x}} \qquad \text{et} \qquad D_y h(x,y) = \left(2 - \frac{y}{x}\right) y\, e^{-\frac{y}{x}}.$$

3. **On donne la fonction f par $f(x,y) = \ln(\sqrt{x^2-4y^2})$.**
   a) Déterminer son domaine de définition et d'infinie dérivabilité.
   b) Dans le domaine d'infinie dérivabilité, calculer $D_x^2 f + D_y^2 f$.

   Les 2 domaines sont égaux à $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 4y^2 > 0\}$ et on a

$$D_x^2 f(x,y) + D_y^2 f(x,y) = \frac{-5(x^2+4y^2)}{(x^2-4y^2)^2}.$$

4. **a) Déterminer le gradient de la fonction f donnée par $f(x_1,x_2,x_3) = x_1\, x_2^3 \sin(x_1x_3)$.**
   b) Même question pour la fonction g donnée par $g(x,y,z) = y^2 e^{x^2 y\sqrt{2z}}$.
   a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^3$ et son gradient est le vecteur de composantes

$$(x_2^3\sin(x_1x_3) + x_1\, x_2^3\, x_3\cos(x_1x_3),\ 3x_1\, x_2^2\sin(x_1x_3),\ x_1^2\, x_2^3\cos(x_1x_3)).$$

   b) La fonction g est dérivable sur $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}$ et son gradient est le vecteur de composantes

$$\left(2xy^3\sqrt{2z}\, e^{x^2y\sqrt{2z}},\ (2 + x^2y\sqrt{2z})y\, e^{x^2y\sqrt{2z}},\ \frac{x^2y^3}{\sqrt{2z}}\, e^{x^2y\sqrt{2z}}\right).$$

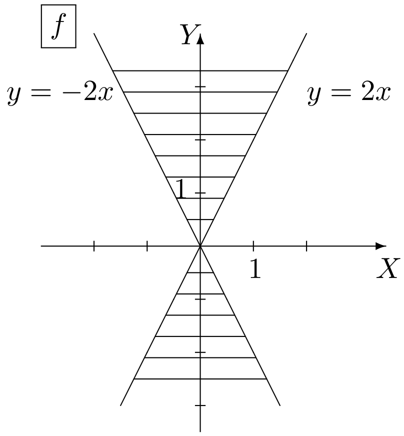
5. **On donne les fonctions f et g respectivement par**

$$f(x,y) = \arcsin\left(\frac{2x}{y}\right) \qquad g(x,y) = \exp(\sqrt{x^2-y+1}).$$

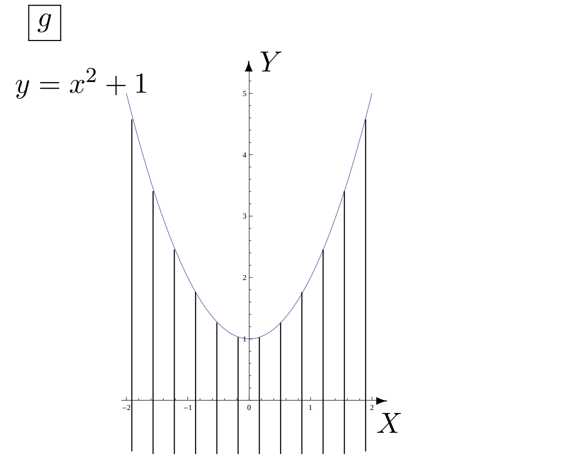
   a) Déterminer le domaine de définition A et d'infinie dérivabilité B de ces fonctions. Représenter ces domaines.
   b) Déterminer l'expression explicite de $\frac{|x|}{|y|} D_x f(x,y) + D_y f(x,y)$.
   c) Déterminer l'expression explicite de $F(t) = f\left(t, \frac{1}{t}\right)$, le domaine de dérivabilité de cette fonction et l'expression explicite de sa dérivée.
   d) Déterminer l'expression explicite de $G(t) = g(\sin(t), \cos^2(t))$, le domaine de dérivabilité de cette fonction et l'expression explicite de sa dérivée.
   a) Pour f, on a

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le \frac{2x}{y} \le 1,\ y \ne 0\right\} \text{ et } B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < \frac{2x}{y} < 1,\ y \ne 0\right\}.$$

Pour g, on a $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y + 1 \geq 0\}$ et $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y + 1 > 0\}$.
Voici les représentations graphiques de ces ensembles (parties hachurées) :



Les points des droites sont compris dans A, sauf l'origine du repère.
Les points des droites sont exclus de B.



Les points de la parabole sont compris dans l'ensemble A mais non dans B.

b) On a

$$\frac{|x|}{|y|} D_x f(x,y) + D_y f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad xy \geq 0 \text{ et } y \neq 0 \\ \dfrac{-4x}{y\sqrt{y^2 - 4x^2}} & \text{si} \quad x \leq 0 \text{ et } y > 0 \\ \dfrac{4x}{y\sqrt{y^2 - 4x^2}} & \text{si} \quad x \geq 0 \text{ et } y < 0 \end{cases}$$

c) L'expression explicite de $F(t) = f\left(t, \frac{1}{t}\right)$ est donnée par $F(t) = \arcsin(2t^2)$; si on considère F sans faire référence à la composition, son domaine de dérivabilité est $\left]-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right[$ mais si on tient compte de la composition alors on doit retirer 0 du domaine de dérivabilité.
La dérivée de F est

$$DF(t) = \frac{4t}{\sqrt{1 - 4t^4}}.$$

d) L'expression explicite de $G(t) = g(\sin(t), \cos^2(t)$ est donnée par $G(t) = \exp(\sqrt{1 - \cos(2t)})$; son domaine de dérivabilité est $\mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ et sa dérivée est

$$DG(t) = \frac{\sin(2t)}{\sqrt{1 - \cos(2t)}} \exp(\sqrt{1 - \cos(2t)}).$$

6. **On donne la fonction $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.**
a) Déterminer son domaine de définition A et celui d'infinie dérivabilité B.
b) Si on définit F par $F(x,y) = f(x,y)(D_x^2 f(x,y) + D_y^2 f(x,y))$, $(x,y) \in B$, montrer que F est une fonction constante et déterminer cette constante.

On a $A = \mathbb{R}^2$ et $B = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et F est la fonction constante 1.

7. **On considère la fonction $f_r(x,y) = y^r e^{-\frac{x}{y}}$, r étant un réel.**
a) Déterminer son domaine de définition A et celui d'infinie dérivabilité B.

b) Déterminer le réel r tel que $D_y f_r(x,y) = y D_x^2 f_r(x,y) - \frac{x}{y} D_x f_r(x,y),\ (x,y) \in B$.

On a $A = B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ et le réel r vérifiant l'égalité donnée vaut 1.

8. **On donne la fonction $f(x,y) = \cos(ax)\sin(by)$ où a et b sont des constantes réelles non nulles. Montrer que f vérifie l'équation des ondes $D_x^2 f - \dfrac{a^2}{b^2} D_y^2 f = 0$.**

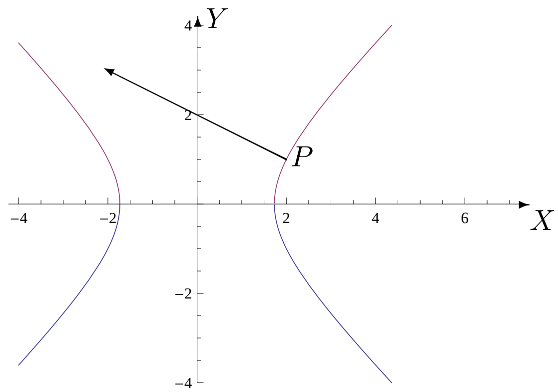
   La fonction f est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}^2$ et vérifie bien l'équation des ondes.

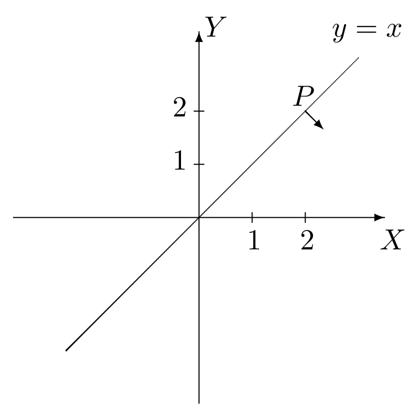
9. **L'expérience montre que, dans un champ de températures, la chaleur s'écoule dans la direction dans laquelle la température décroît le plus vite. Trouver cette direction en toute généralité puis en un point P donné dans les cas suivants :**
   a) $T(x,y) = x^2 - y^2$ et P a pour cordonnées $(2,1)$
   b) $T(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$ et P a pour cordonnées $(2,2)$
   Esquisser cette direction en P par un vecteur.
   Représenter aussi l'isotherme correspondant à la valeur 3 dans le premier cas et à $\frac{\pi}{4}$ dans le second.

   En toute généralité, le gradient est un vecteur dont le sens est celui de la direction dans laquelle T croît le plus vite. Puisque la chaleur s'écoule dans la direction dans laquelle la température décroît le plus vite, on considère l'opposé du vecteur gradient de T c'est-à-dire le vecteur de composantes

   $$\text{a) } (-2x, 2y) \qquad\qquad \text{b) } \left(\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2}\right).$$

   Au point P, on a respectivement les vecteurs de composantes $(-4,2)$ et $(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$.



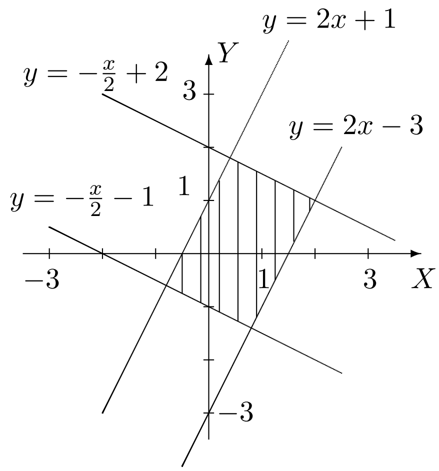


Le point $(0,0)$ n'appartient pas à l'isotherme

Liste 3 : Fonctions de plusieurs variables (2)

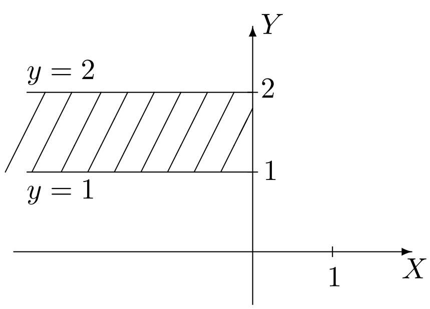
I. Dérivation des fonctions composées

1. **a) On donne f, continûment dérivable sur $]-1,3[\times]-2,4[$. On demande le domaine de dérivabilité de la fonction F définie par $F(x,y)=f(2x-y,x+2y)$, sa représentation graphique ainsi que l'expression des dérivées partielles de F en fonction de celles de f.**



Le domaine de dérivabilité de F est l'ensemble $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -1<2x-y<3,\ -2<x+2y<4\}$. Sa représentation graphique est la partie du plan hachurée, les points des droites étant exclus de l'ensemble.
Les dérivées partielles sont $(D_xF)(x,y) = (D_uf)(2x-y,x+2y).2+(D_vf)(2x-y,x+2y).1$
et
$(D_yF)(x,y) = (D_uf)(2x-y,x+2y).(-1)+(D_vf)(2x-y,x+2y).2$
si u et v sont respectivement les première et deuxième variables de f.

b) Même question pour g, continûment dérivable sur $]-1,1[\times]\ln\frac{\pi}{6},+\infty[$ et $G(x,y)=g(\exp(2x),\ \ln(\arcsin(y/2)))$.



Le domaine de dérivabilité de G est l'ensemble $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x<0,\ y\in]1,2[\}=]-\infty,0[\times]1,2[$. Sa représentation graphique est la partie du plan hachurée, les points des bords étant exclus de l'ensemble.

Les dérivées partielles sont

$$(D_xG)(x,y)=(D_ug)(\exp(2x),\ln(\arcsin(y/2))).2\ \exp(2x)$$

$$(D_yG)(x,y)=(D_vg)(\exp(2x),\ln(\arcsin(y/2))).\left(\frac{1}{\arcsin(y/2)\sqrt{4-y^2}}\right)$$

si u et v sont respectivement les première et deuxième variables de g.

2. **On donne la fonction g continûment dérivable sur $]\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}[\times]0,+\infty[\times]0,3[$.**
a) Déterminer le domaine de dérivabilité de $f: t\mapsto f(t)=g\left(\arcos\left(\frac{t}{3}\right),\frac{1}{\sqrt{t-1}},t^2-1\right)$.
b) Calculer la dérivée de f en fonction des dérivées partielles de g.
c) Si elle est définie, que vaut cette dérivée en 0 ? en $3/2$?
d) Mêmes questions si g est continûment dérivable sur $]\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}[\times]0,+\infty[\times]0,3[$.

a) La fonction f n'est dérivable en aucun réel.
d) Le domaine de dérivabilité de f est $]1,2[$; f n'est donc pas dérivable en 0 mais bien en $3/2$. La dérivée de f en fonction des dérivées partielles de g est donnée par

$$Df(t) = (D_u g)\left(\text{arcos}\left(\frac{t}{3}\right), \frac{1}{\sqrt{t-1}}, t^2-1\right) \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{9-t^2}}\right)$$

$$+(D_v g)\left(\text{arcos}\left(\frac{t}{3}\right), \frac{1}{\sqrt{t-1}}, t^2-1\right) \cdot \left(\frac{-1}{2\sqrt{(t-1)^3}}\right)+(D_w g)\left(\text{arcos}\left(\frac{t}{3}\right), \frac{1}{\sqrt{t-1}}, t^2-1\right) \cdot 2t$$

si $u,\ v$ et w sont respectivement les première, deuxième et troisième variables de g.

La dérivée de f en $3/2$ vaut

$$Df(3/2) = (D_u g)\left(\frac{\pi}{3}, \sqrt{2}, \frac{5}{4}\right) \cdot \left(\frac{-2\sqrt{3}}{9}\right)+(D_v g)\left(\frac{\pi}{3}, \sqrt{2}, \frac{5}{4}\right) \cdot \left(-\sqrt{2}\right)+(D_w g)\left(\frac{\pi}{3}, \sqrt{2}, \frac{5}{4}\right) \cdot 3$$

si $u,\ v$ et w sont respectivement les première, deuxième et troisième variables de g.

3. **Soit $F(t) = f(x(t), y(t))$ avec $x(2) = 3,\ y(2) = 5,\ (Dx)(2) = -1,\ (Dy)(2) = 4,\ (D_x f)(3,5) = 6$ et $(D_y f)(3,5) = -2$. En supposant satisfaites les hypothèses du théorème de dérivation des fonctions composées en 2, que vaut $(DF)(2)$?**

   On a $(DF)(2) = (D_x f)(3,5).(D_t x)(2) + (D_y f)(3,5).(D_t y)(2) = -14$.

4. **Soit $F(s,t) = f(u(s,t), v(s,t))$. En supposant satisfaites les hypothèses du théorème de dérivation des fonctions composées en $(0,1)$ si**

$$u(0,1) = -2 \quad (D_s u)(0,1) = 2 \quad (D_t u)(0,1) = 4$$

$$v(0,1) = 5 \quad (D_s v)(0,1) = 3 \quad (D_t v)(0,1) = 6$$

   et $(D_u f)(-2,5) = -1$ et $(D_v f)(-2,5) = 8$, calculer $(D_s F)(0,1)$ et $(D_t F)(0,1)$.

   On a $(D_s F)(0,1) = (D_u f)(-2,5).(D_s u)(0,1) + (D_v f)(-2,5).(D_s v)(0,1) = 22$ et $(D_t F)(0,1) = (D_u f)(-2,5).(D_t u)(0,1) + (D_v f)(-2,5).(D_t v)(0,1) = 44$

5. **On donne la fonction $(x,y) \mapsto f(x,y)$ définie et 2 fois continûment dérivable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. On effectue le changement de variables en coordonnées polaires $x = r\cos(\theta),\ y = r\sin(\theta)$ ($r > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$) et on considère $F(r,\theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$. Montrer que**

$$(D_x f)^2 + (D_y f)^2 = (D_r F)^2 + \frac{1}{r^2}(D_\theta F)^2$$

   Remarque : le premier membre est pris au point de coordonnées $(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ et le second en (r,θ).

II. Permutation de l'ordre d'intégration

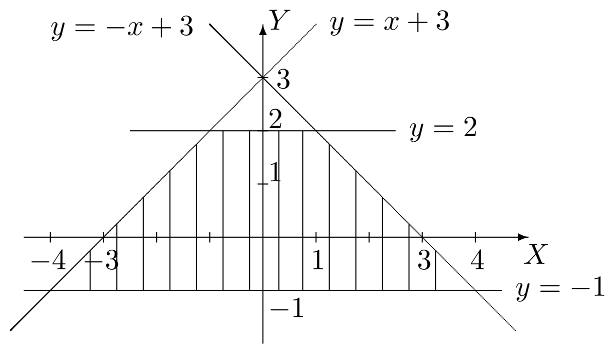
1. **Si la fonction est intégrable sur l'ensemble considéré, permuter les intégrales et représenter l'ensemble d'intégration dans les cas suivants**

$$a) \int_{-1}^{2} \left(\int_{y-3}^{3-y} f(x,y)\ dx\right)\ dy \qquad\qquad b) \int_{0}^{2} \left(\int_{y}^{\sqrt{8-y^2}} f(x,y)\ dx\right)\ dy.$$

a) Si on permute l'ordre d'intégration, l'intégrale s'écrit

$$\int_{-4}^{-1}\left(\int_{-1}^{x+3} f(x,y)\ dy\right) dx + \int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{2} f(x,y)\ dy\right) dx + \int_{1}^{4}\left(\int_{-1}^{-x+3} f(x,y)\ dy\right) dx$$

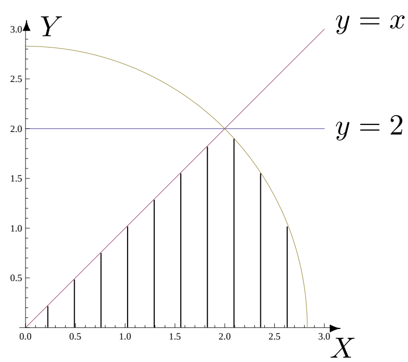
et l'ensemble d'intégration est la partie hachurée du plan ci-dessous.



b) Si on permute l'ordre d'intégration, l'intégrale s'écrit

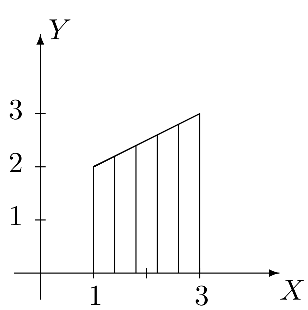
$$\int_{0}^{2}\left(\int_{0}^{x} f(x,y)\ dy\right) dx + \int_{2}^{2\sqrt{2}}\left(\int_{0}^{\sqrt{8-x^2}} f(x,y)\ dy\right) dx$$

et l'ensemble d'intégration est la partie hachurée du plan ci-dessous.



2. **On considère une fonction f intégrable sur l'ensemble hachuré fermé borné A ci-dessous. Ecrire, dans un ordre et dans l'autre, l'intégrale**

$$\int\int_A f(x,y)dx\,dy.$$

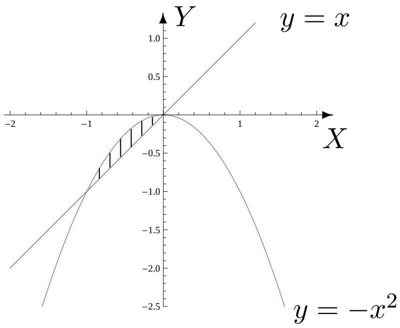


L'intégrale sur cet ensemble s'écrit

$$\int_{1}^{3}\left(\int_{0}^{\frac{x+3}{2}} f(x,y)\ dy\right) dx = \int_{0}^{2}\left(\int_{1}^{3} f(x,y)\ dx\right) dy + \int_{2}^{3}\left(\int_{2y-3}^{3} f(x,y)\ dx\right) dy.$$

III. Intégration sur des ensembles fermés bornés

1. **Dans le plan, on considère l'ensemble borné fermé A délimité par le graphique de la droite d'équation cartésienne $x-y=0$ et celui de la fonction $x \mapsto -x^2$.**
   a) Représenter A dans un repère orthonormé et en donner une expression analytique.
   b) Calculer, si elle existe, l'intégrale de f sur A si $f:(x,y)\mapsto f(x,y)=y\cos(x)$.



L'expression analytique de A est
$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[-1,0],\ y\in[x,-x^2]\}$
ou encore
$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\in[-1,0],\ x\in[-\sqrt{-y},y]\}$.
La fonction f est intǵrable sur A et son intégrale vaut $7\sin(1)-11\cos(1)$.

2. **Si elle existe, calculer l'intégrale de**
   a) $f(x,y)=4-x^2$ sur $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[-2,2],\ y\in[x^2,8-x^2]\}$
   b) $f(x,y)=\cos(y^2)$ sur $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[-1,0],\ y\in[-1,x]\}$
   c) $f(x,y)=x+2y$ sur $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le y\le \inf\{-x,\sqrt{4-x^2}\}\}$
   d) $f(x,y)=x^2\cos(xy)$ sur $A=[-1,1]\times\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$

   a) La fonction f est intégrable sur A et son intégrale vaut $\dfrac{1024}{15}$.

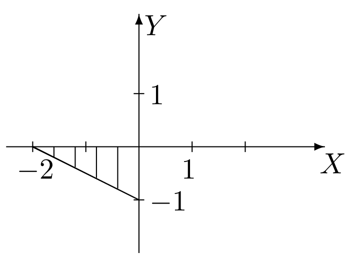
   b) La fonction f est intégrable sur A et son intégrale vaut $\dfrac{1}{2}\sin(1)$.

   c) La fonction f est intégrable sur A et son intégrale vaut $\dfrac{16}{3}-4\sqrt{2}$.

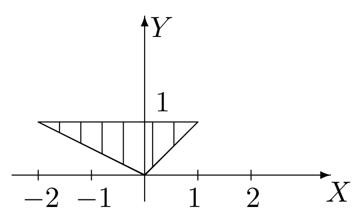
   d) La fonction f est intégrable sur A et son intégrale vaut $\dfrac{2\pi-8}{\pi^2}$.

3. **Si elle existe, déterminer la valeur de l'intégrale sur l'ensemble A borné fermé hachuré ci-dessous dans les cas suivants**

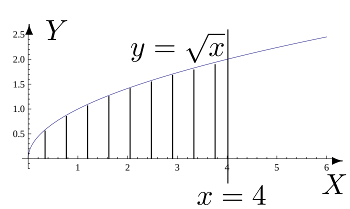
a) $\int\int_A e^{2x-y}\ dx\,dy$



b) $\int\int_A xy^2\ dx\,dy$



c) $\displaystyle\int\int_A \frac{y}{\sqrt{4+x^2}}\ dx\,dy$

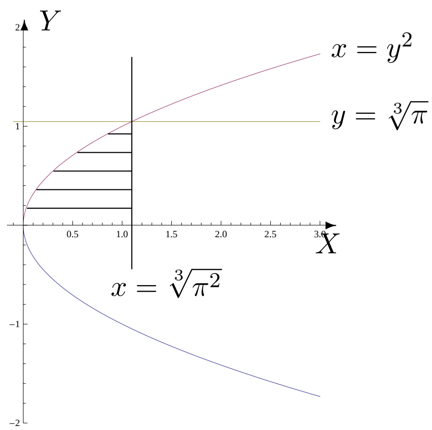


a) La fonction f est intégrable sur A et son intégrale vaut $\dfrac{4\,e^5-5\,e^4+1}{10\,e^4}$.

b) La fonction f est intégrable sur A et son intégrale vaut $-\dfrac{3}{10}$.

c) La fonction f est intégrable sur A et son intégrale vaut $\sqrt{5}-1$.

4. **Soit** $I = \displaystyle\int_0^{\sqrt[3]{\pi}} \left(\int_{y^2}^{\sqrt[3]{\pi^2}} \cos(\sqrt{x^3})\ dx \right)\ dy$**.**
Représenter l'ensemble d'intégration et calculer l'intégrale si c'est possible.



La fonction est intégrable sur cet ensemble (partie hachurée) et son intégrale vaut 0.

Liste 4 : Fonctions de plusieurs variables (3)

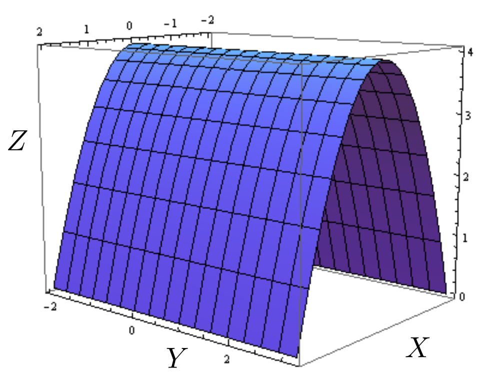
I. Volume d'un corps

Calculer le volume des corps de l'espace décrits ci-dessous. Donner aussi une représentation graphique de ces corps.

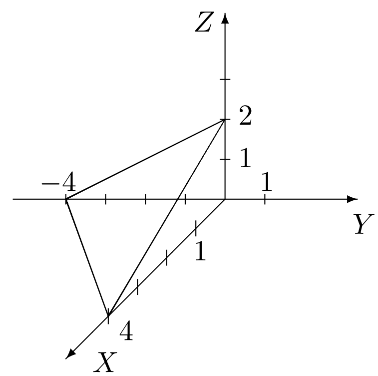
1. **Corps borné par la surface d'équation cartésienne** $z = 4 - x^2$ **et les plans d'équation** $z = 0,\ y = -2$ **et** $y = 3$**.**
2. **Corps borné par les plans de coordonnées et la surface d'équation** $x - y + 2z = 4$

   Le volume du premier corps vaut 160/3 (unités de volume)et celui du deuxième vaut 16/3. Les représentations graphiques sont les suivantes :

1)



2)

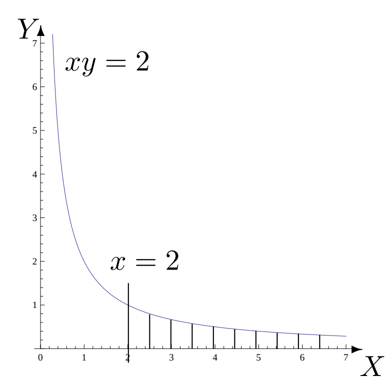


II. Intégration sur des ensembles non fermés bornés

1. **Si elles ont un sens, calculer les intégrales suivantes et représenter l'ensemble d'intégration.**

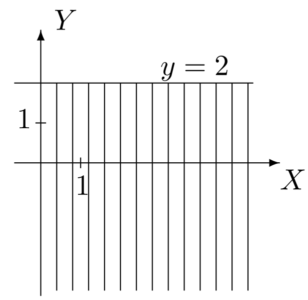
   a) $\displaystyle\int\int_A \frac{1}{x^2}\, dx\, dy$ avec $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 2,\ 0 \leq y \leq \frac{2}{x}\}$

La fonction est intégrable sur A et son intégrale vaut 1/4. L'ensemble d'intégration est l'ensemble hachuré ci-contre.



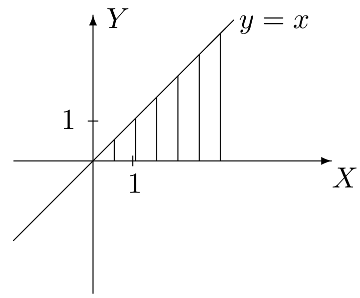
b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{2}\left(\int_{0}^{+\infty} e^{2y-x}\,dx\right)dy$

La fonction est intégrable sur $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[0,+\infty[,\ y\in]-\infty,2]\}$ et son intégrale vaut $\dfrac{e^4}{2}$. L'ensemble d'intégration est l'ensemble hachuré ci-contre.



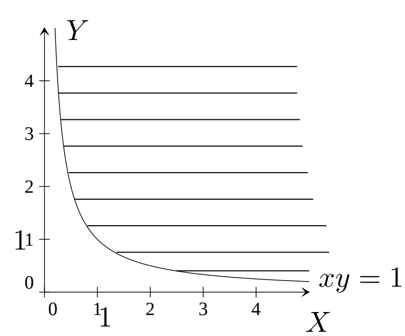
c) $\displaystyle\int\int_A e^{-x^2}\,dx\,dy$ avec $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le y\le x\}$

La fonction est intégrable sur A et son intégrale vaut $\dfrac{1}{2}$. L'ensemble d'intégration est l'ensemble hachuré ci-contre.



d) $\displaystyle\int\int_A y^3\,e^{-xy^2}\,dx\,dy$ avec $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>0,\ 1\le xy\}$

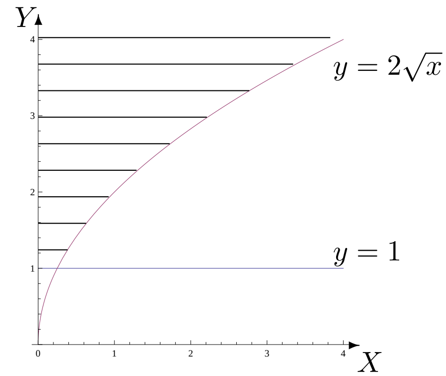
La fonction est intégrable sur A et son intégrale vaut 1. L'ensemble d'intégration est l'ensemble hachuré ci-contre.



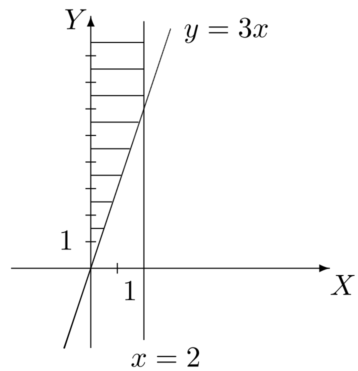
2. **Déterminer si les intégrales suivantes existent ; si oui, les calculer. Représenter géométriquement l'ensemble d'intégration dans chaque cas.**

$a)\displaystyle\int_{1}^{+\infty}\left(\int_{0}^{y^2/4}\frac{ye^{-y^2}}{x+y^2}\,dx\right)dy,\quad b)\int_{0}^{2}\left(\int_{3x}^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x^2+y^2}\,dy\right)dx,\quad c)\int_{0}^{1}\left(\int_{0}^{4x^2}\frac{1}{x+y}\,dy\right)dx$

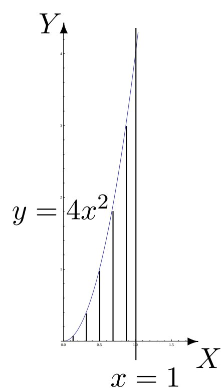
a) La fonction est intégrable sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [1,+\infty[,\ x \in [0, y^2/4]\}$ et son intégrale vaut $\dfrac{1}{2e}\ln(5/4)$. L'ensemble d'intégration est l'ensemble hachuré ci-contre.



b) La fonction est intégrable sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in]0,2],\ y \in [3x,+\infty[\}$ et son intégrale vaut $2\sqrt{2}\,\mathrm{arcotg}(3)$. L'ensemble d'intégration est l'ensemble hachuré ci-contre.



c) La fonction est intégrable sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in]0,1],\ y \in [0,4x^2]\}$ et son intégrale vaut $\frac{5}{4}\ln(5) - 1$. L'ensemble d'intégration est l'ensemble hachuré ci-contre.



3. **On considère l'intégrale double suivante**

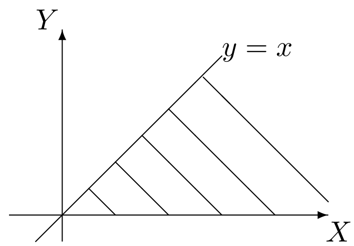
$$I = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^x \sin(y-x) e^{-x}\ dy \right) dx$$

a) Permuter l'ordre d'intégration et représenter l'ensemble d'intégration dans un repère orthonormé.
b) Si elle existe, déterminer la valeur de cette succession d'intégrales dans un ordre et dans l'autre.
c) Trouve-t-on la même valeur quel que soit l'ordre d'intégration ? Justifier.

a) L'ensemble d'intégration A est donné par

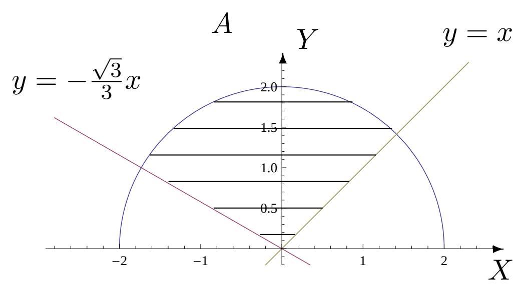
$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,+\infty[,\ y \in [0,x]\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,+\infty[,\ x \in [y,+\infty[\}$$

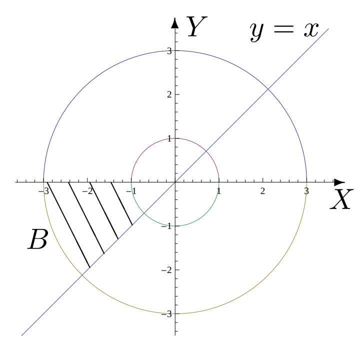
et est représenté par l'ensemble hachuré ci-dessous.
En permutant l'ordre d'intégration, on a $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\int_y^{+\infty} \sin(y-x)e^{-x}\, dx \right) dy.$
b) La fonction est intégrable sur A et, dans un ordre ou dans l'autre, son intégrale vaut $-1/2$.
c) On trouve la même valeur car la fonction est intégrable sur A.



III. Intégration par changement de variables polaires

1. **Si elle existe, calculer**
a) $\displaystyle\int\int_A \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy$ où A est l'ensemble hachuré ci-dessous.
b) $\displaystyle\int\int_B xy\, dx\, dy$ où B est l'ensemble hachuré ci-dessous.
c) $\displaystyle\int\int_C (x+3y)\, dx\, dy$ où $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \inf\{-x, \sqrt{4-x^2}\}\}$.





Les 3 fonctions sont intégrables et les intégrales valent respectivement $\dfrac{14\pi}{9}$, 5 et $\dfrac{8}{3}(3-2\sqrt{2})$.

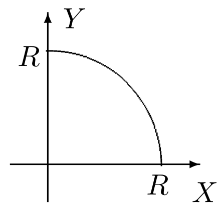
2. **Soit A une partie du plan (bornée et fermée). Le centre de masse de A (considéré homogène) est défini comme le point de coordonnées (x_A, y_A) où**

$$x_A = s^{-1} \int\int_A x\ dx\ dy, \quad y_A = s^{-1} \int\int_A y\ dx\ dy$$

et où s est l'aire de la surface A.
Déterminer la position du centre de masse d'une plaque homogène dont la

forme est un quart de cercle de rayon R (R réel strictement positif).

La position du centre de masse est donnée par le point de coordonnées $\left(\frac{4R}{3\pi}, \frac{4R}{3\pi}\right)$ dans un repère orthonormé correspondant au graphique ci-dessous.



3. **Déterminer le volume du corps borné par la surface d'équation cartésienne $z = 4 - x^2 - y^2$ et par le plan d'équation $z = 0$.**

   Le volume du corps est 8π (unités de volume).

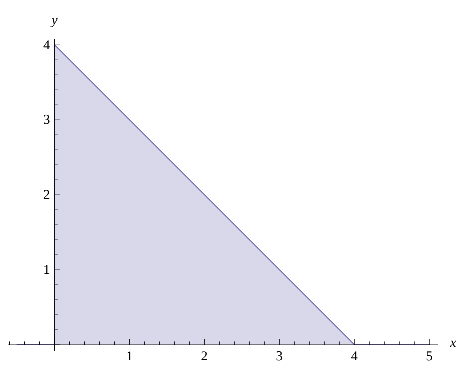
IV. Divers

La masse d'une plaque plane est donnée par

$$m = \int\int_R \delta(x, y)dxdy,$$

où $\delta(x, y)$ est la densité au point de coordonnées (x, y). Considérons une plaque plane de la forme d'un triangle isocèle rectangle R dont les côtés égaux mesurent $4\ m$. Si la densité en un point P est directement proportionnelle au carré de la distance de P au sommet opposé à l'hypoténuse [1], si l'on place l'origine du repère sur ce sommet et si les axes OX et OY sont les prolongations des côtés de même longueur du triangle R,

a) **quelle est la masse de cette plaque ?**
b) **en quelles unités s'exprime la constante K ?**



La masse de la plaque est $\frac{128K}{3}$ kg et la constante K s'exprime en kg/m^4.

1. c'est-à-dire $\delta(x, y) = K(x^2 + y^2)$ (où K est une constante)

Liste 5 : Calcul matriciel (1)

I. Opérations entre matrices

1. **Soient les matrices A, B, C données par**

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & -i \\ 1-i & 1 \\ \frac{2}{i} & (2+i)^2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 1 \\ -i & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & \frac{1}{i-1} \\ 2i & \frac{i}{3} \end{pmatrix}.$$

Si possible, effectuer les opérations suivantes (et simplifier la réponse au maximum). Si cela ne l'est pas, en expliquer la raison.

1) $A+B$, 2) $A+\widetilde{B}$, 3) $A.B$, 4) $A.B+C$, 5) $B.A$, 6) $C.\widetilde{A}$, 7) $A^*.C$, 8) $i.C$, 9) $(i.A)^*$.

1) $A+B$ est impossible à calculer car les matrices n'ont pas le même format.

2) $A+\widetilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & 5-i & -3i \\ -i & 2 & 5+4i \end{pmatrix}$

3) $A.B = \begin{pmatrix} -4-4i & 1-5i \\ 8-i & 7+8i \end{pmatrix}$

4) $A.B+C = \begin{pmatrix} -1-4i & \frac{1-11i}{2} \\ 8+i & \frac{21+25i}{3} \end{pmatrix}$

5) $B.A = \begin{pmatrix} -6 & -2+2i & 4i \\ 12-i & 5-4i & 3-4i \\ -5i & 1-i & 4+8i \end{pmatrix}$

6) $C\widetilde{A}$ est impossible à calculer car le nombre de colonnes (2) de C n'est pas égal au nombre de lignes (3) de $\widetilde{A}$.

7) $A^*C = \begin{pmatrix} 7 & \frac{-11-9i}{6} \\ 3+5i & \frac{-2i}{3} \\ 8+12i & \frac{7}{3} \end{pmatrix}$

8) $iC = \begin{pmatrix} 3i & \frac{1-i}{2} \\ -2 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

9) $(iA)^* = \begin{pmatrix} -3i & 1 \\ 1-i & -i \\ 2 & -4-3i \end{pmatrix}$

2. **Soit A une matrice carrée de dimension 3 telle que $A_{ij} = 2, \forall i, j$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.**

Calculer $C = AB - BA$ et en déduire la forme de $\widetilde{C} + C$.

On a $C = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ -4 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\widetilde{C} + C$ est la matrice nulle de dimension 3.

3. **On donne la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 - 5A + 6I = 0$.**

4. **Déterminer la forme générale des matrices qui commutent avec**

$$\textbf{a) } A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \textbf{b) } B = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \quad (a, b \in \mathbb{C})$$

La forme générale des matrices qui commutent avec A est du type $\begin{pmatrix} a & -2c \\ c & a \end{pmatrix}$ $(a, c \in \mathbb{C})$.
La forme générale des matrices qui commutent avec B est du type $\begin{pmatrix} \alpha & a\beta \\ b\beta & \alpha \end{pmatrix}$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{C})$ si a et b sont non nuls.
Si $a = 0$ et $b \neq 0$, on a $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{C})$; si $a \neq 0$ et $b = 0$, on a $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{C})$.
Enfin, si on a $a = b = 0$ alors toute matrice commute avec la matrice nulle.

II. Déterminants

1. **Calculer le plus rapidement possible le déterminant de chacune des matrices suivantes.**

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3+i & -2i \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3i \\ (i-1)^2 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix},$$

$$D = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 7 & -1 \\ 7 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 7 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} \cos(2a) & \sin^2(a) & \cos^2(a) \\ \cos(2b) & \sin^2(b) & \cos^2(b) \\ \cos(2c) & \sin^2(c) & \cos^2(c) \end{pmatrix} \quad (a, b, c \in \mathbb{R}).$$

Le déterminant de A vaut $\frac{3}{2}(2+i)$, celui de B vaut -10, celui de C vaut 40, celui de D vaut -16 et celui de E vaut 0.

2. **Le déterminant de chacune des matrices suivantes est un polynôme en $x \in \mathbb{C}$. Factoriser ce polynôme en un produit de facteurs du premier degré.**

$$A = \begin{pmatrix} i & x-2 \\ x & 5i \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} x & 9 \\ -1 & x \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} x+1 & 0 & 6 \\ 0 & x-1 & x \\ 1 & 0 & x+2 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & x & 1 & 1 \\ x & 1 & 1 & x & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & x \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de A est égal à $(-x+1+2i)(x-1+2i)$; celui de B est égal à $(x+3i)(x-3i)$, celui de C vaut $(x-1)^2(x+4)$ et celui de D vaut $x^2(x-1)^2$.

III. Inversion de matrices

Calculer (si elle existe) la matrice inverse de chacune des matrices suivantes (on donne $\alpha \in \mathbb{R}$).

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \\ \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -i & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & -1 \\ -i & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- La matrice inverse de A est $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- La matrice B ne possède pas d'inverse car son déterminant est nul.
- La matrice inverse de C est égale à la transposée de C .
- La matrice inverse de D est $D^{-1} = \frac{-2-i}{5}\begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ i & i & 1 \\ i & 2 & 1 \end{pmatrix}$
- La matrice inverse de E est $E^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i & i \\ -i & 1 & -1 \\ -i & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Liste 6 : Calcul matriciel (2)

I. Diagonalisation

1. **Déterminer les valeurs propres des matrices suivantes et en donner la multiplicité.**

$$A = \begin{pmatrix} i & -2i \\ 2i & i \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 9 & -1 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de la matrice A sont $-2+i$ et $2+i$; ces valeurs propres sont simples (c'est-à-dire de multiplicité 1).
Les valeurs propres de la matrice B sont -3, 2 et 5 ; ces valeurs propres sont simples.
Les valeurs propres de la matrice C sont $\frac{1-\sqrt{65}}{2}$, $\frac{1+\sqrt{65}}{2}$ et 3 ; ces valeurs propres sont simples.

2. **Rechercher les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices suivantes. Ces matrices sont-elles diagonalisables ? Pourquoi ? Si elles le sont, en déterminer une forme diagonale Δ, ainsi qu'une matrice inversible S qui y conduit.**

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer les produits AS et $S\Delta$. Comparer les résultats et justifier.

• Matrice A : 2 valeurs propres simples : -5 et 8 ; la matrice est donc diagonalisable.
Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre -5 sont du type $c\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{C}_0$ et ceux relatifs à la valeur propre 8 sont du type $c'\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $c' \in \mathbb{C}_0$.
On a, par exemple, $\Delta = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ avec $S = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.
Dès lors, on a $AS = S\Delta = \begin{pmatrix} 10 & 24 \\ -5 & 40 \end{pmatrix}$. Comme $\Delta = S^{-1}AS$, en multipliant les deux membres à gauche par S, on obtient $S\Delta = AS$.

• Matrice B : 2 valeurs propres, l'une simple 1 et l'autre double -2.
Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre double -2 sont du type $c\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{C}_0$.
Comme cette valeur propre n'engendre pas 2 vecteurs propres linéairement indépendants, la matrice n'est pas diagonalisable.
Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre simple 1 sont du type $c'\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $c' \in \mathbb{C}_0$.

• Matrice C : 2 valeurs propres, l'une simple 1 et l'autre double -2.

Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre double -2 sont du type $c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ non simultanément nuls. Cette matrice est donc diagonalisable car elle possède 3 vecteurs propres linéairement indépendants.

Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre simple 1 sont du type $c' \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $c' \in \mathbb{C}_0$.

On a, par exemple, $\Delta = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $S = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

• Matrice D : 3 valeurs propres simple : $-3,\ -2$ et 1 ; la matrice est donc diagonalisable.

Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre -3 sont du type $c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $c_1 \in \mathbb{C}_0$; les vecteurs propres relatifs à la valeur propre -2 sont du type $c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c_2 \in \mathbb{C}_0$ et les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 1 sont du type $c_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $c_3 \in \mathbb{C}_0$.

On a, par exemple, $\Delta = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $S = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

3. **Une matrice carrée A de dimension 2 possède les deux valeurs propres 2 et -1, auxquelles peuvent être associés respectivement les vecteurs propres $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Que vaut A ?**

   La matrice A est égale à $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

II. Divers

1. **L'institut météorologique a fait les observations suivantes :**
   - **on n'a jamais vu deux jours ensoleillés consécutifs,**
   - **s'il fait beau un jour donné, on a une chance égale d'avoir de la pluie ou de la neige le lendemain,**
   - **s'il pleut ou s'il neige, on a une chance sur deux que le temps se maintienne le jour suivant et une chance sur quatre qu'il fasse beau le lendemain.**

   Sachant cela,

   (a) **Représenter la matrice de transition de ce système.**

(b) **Sachant qu'il fait beau aujourd'hui, quel pourcentage de chance a-t-on qu'il fasse beau dans deux jours ?**

(c) **A long terme, quelle sera l'évolution du climat ?**

(a) Si on note N_0, P_0 et S_0 respectivement un jour de neige, un jour de pluie et un jour de soleil au départ et N_1, P_1 et S_1 la météo correspondante le jour suivant, on a

$$\begin{pmatrix} N_1 \\ P_1 \\ S_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_0 \\ P_0 \\ S_0 \end{pmatrix}$$

et la matrice de dimension 3 est la matrice de transition du système.
(b) Sachant qu'il fait beau aujourd'hui, on a 25 % de chance qu'il fasse beau dans 2 jours.
(c) Le vecteur de probabilité de valeur propre 1 est égal à $\begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,4 \\ 0,2 \end{pmatrix}$. A long terme, on 4 chances sur 10 qu'il neige, 4 chances sur 10 qu'il pleuve et 2 chances sur 10 qu'il fasse ensoleillé.

2. **Dans un laboratoire, à chaque repas, des lapins ont le choix entre manger des carottes, de la salade ou des pissenlits mais ne peuvent manger qu'un aliment d'une seule catégorie lors d'un même repas. Comme ils sont gourmands, ils ne manquent jamais un repas.**
L'observation montre que si un lapin a mangé des carottes à un repas, il en mangera au repas suivant dans 75 % des cas ; sinon, il mangera de la salade une fois sur 5 ou des pissenlits 1 fois sur 20.
S'il a mangé de la salade, il en mangera encore 1 fois sur 2 au repas suivant ; sinon, il mangera un des deux autres aliments de façon équiprobable.
Enfin, s'il a mangé des pissenlits, au repas suivant il y a 1 chance sur 5 qu'il mange des carottes et 2 chances sur 5 de la salade.

   (a) **Si un lapin vient de manger des carottes, quelle est la probabilité qu'il mange de la salade dans deux repas ?**

   (b) **A longue échéance, que mange ce lapin ?**

   (a) S'il vient de manger des carottes, le lapin a 27 % de chance de manger de la salade dans deux repas.
   (b) A longue échéance, le lapin a 48 % (40 sur 83) de chance de manger des carottes, 18 % (15 sur 83) de chance de manger des pissenlits et 34 % (28 sur 83) de chance de manger de la salade.

3. **En algèbre linéaire (ou géométrie analytique), une rotation du plan (d'angle θ) est représentée par une matrice du type**

$$M_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

   où θ est un réel (et représente la mesure de l'angle de la rotation).

– **Pour tout θ, déterminer la matrice produit M_θ^2 et en simplifier les éléments au maximum.**
On a

$$M_\theta^2 = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix}$$

– **Montrer que quels que soient θ, θ', les matrices M_θ et $M_{\theta'}$ commutent. Qu'est-ce que cela signifie en termes de rotations ?**
On a

$$M_\theta M_{\theta'} = M_{\theta'} M_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta+\theta') & -\sin(\theta+\theta') \\ \sin(\theta+\theta') & \cos(\theta+\theta') \end{pmatrix}$$

ce qui signifie que l'ordre dans lequel on effectue les rotations n'a pas d'importance.

– **Montrer que quel que soit le réel θ, la matrice**

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

est aussi une matrice qui représente une rotation.

On a

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}.$$

C'est donc aussi une matrice de rotation mais la rotation s'effectue dans le sens inverse de la rotation d'angle θ.

4. **Considérons la fonction $f : (x, y) \mapsto -x^2 + y^2 + 2xy - 3x + y - 4$.**

 a) Résoudre le système $\begin{cases} D_x f(x,y) = 0 \\ D_y f(x,y) = 0 \end{cases}$

 b) Calculer les dérivées secondes de f.

 c) Notons $H_f(x, y)$ la matrice $\begin{pmatrix} D_x^2 f & D_x D_y f \\ D_y D_x f & D_y^2 f \end{pmatrix}$**.**

 Calculer det$H_f(x, y)$ si (x, y) est la (les) solution(s) du système ci-dessus.

 a) Ce système a pour solution $(-1, 1/2)$.
 b) On a $D_x^2 f(x,y) = -2,\ D_y^2 f(x,y) = 2$ et $D_x D_y f(x,y) = D_y D_x f(x,y) = 2$.
 c) Le déterminant de $H_f(-1, 1/2)$ vaut -8.

 d) **Mêmes questions avec la fonction $g : (x, y) \mapsto \frac{2}{3}x^3 + 2xy - y^2 - 4y$.**
 - Le système a pour solution les couples $(-2, 4)$ et $(1, -1)$.
 - On a $D_x^2 g(x,y) = 4x,\ D_y^2 g(x,y) = -2$ et $D_x D_y g(x,y) = D_y D_x g(x,y) = 2$.
 - Le déterminant $H_g(-2, -4)$ vaut 12 et le déterminant $H_g(1, -1)$ vaut -12.

5. **Vrai ou faux (Justifier)**

 (a) **Toute matrice carrée de dimension 3 commute avec** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$**.**

 Faux : si on multiplie la matrice donnée notée A à gauche et à droite par une matrice quelconque notée B du type $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ dont les élements sont des complexes quelconques, on a, par exemple, que la deuxième ligne de AB est le vecteur nul alors que la deuxième ligne de BA a pour premier élément d.

(b) **La matrice** $\begin{pmatrix} a+b & a^2+ab+b^2 \\ a^2-b^2 & a^3-b^3 \end{pmatrix}$ $(a, b \in \mathbb{C})$ **est inversible.**
Faux car le déterminant de cette matrice vaut 0.

(c) **Si une matrice carrée A de dimension 2 est de déterminant nul, alors l'une des colonnes de A est multiple de l'autre.**
Vrai (cf. théorie)

(d) **Si deux colonnes d'une matrice carrée A de dimension 3 sont identiques, alors** $\det A = 0$**.**
Vrai (cf. théorie)

(e) **Si A est une matrice carrée de dimension 3, alors** $\det(4A) = 4 \det A$**.**
Faux : $\det(4A) = 4^3 \det A = 64 \det A$

(f) **Si B est la matrice obtenue en multipliant la colonne 2 de A par 4, alors** $\det B = 4 \det A$**.**
Vrai (cf. théorie)

Liste 7 : Approximations polynomiales

Approximations polynomiales

1. **Dans chacun des cas suivants, déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre n en x_0 pour la fonction f_k. Représenter f_2 (—-ou f_3 ou f_5—) et ses approximations.**

$f_1(x) = \cos(x)\ e^{2x},\ x_0 = 0, n = 0,1,2,3$ $\quad$ $f_2(x) = \sqrt{1+4x},\ x_0 = 0, n = 0,1,2$

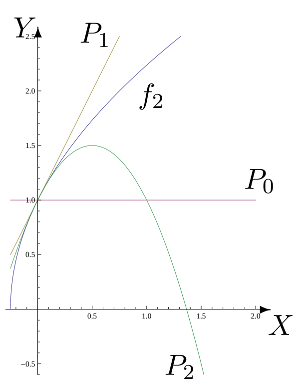
$f_3(x) = \dfrac{1}{2-x},\ x_0 = 0, n = 0,1,2$ $\quad$ $f_4(x) = \mathrm{arcotg}(x),\ x_0 = 0$ (resp. $x_0 = 1$), $n = 0,1,2$

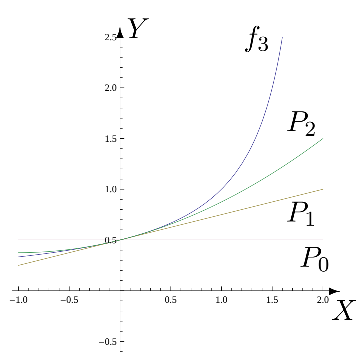
$f_5(x) = \sin^2(x),\ x_0 = 0,\ n = 0,1,2$ $\quad$ $f_6(x) = \cos(x),\ x_0 = 1, n = 0,1,2$

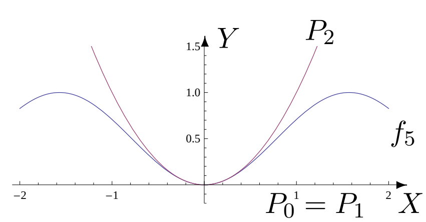
Fonction	Ordre 0	Ordre 1	Ordre 2
f_1	1	$1+2x$	$1+2x+\frac{3}{2}x^2,\ x\in\mathbb{R}$
f_2	1	$1+2x$	$1+2x-2x^2,\ x\in\mathbb{R}$
f_3	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{2}+\dfrac{x}{4}$	$\dfrac{1}{2}+\dfrac{x}{4}+\dfrac{x^2}{8},\ x\in\mathbb{R}$
$f_4\ (x_0=0)$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{\pi}{2}-x$	$\dfrac{\pi}{2}-x,\ x\in\mathbb{R}$
$f_4\ (x_0=1)$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x-1}{2}$	$\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x-1}{2}+\dfrac{(x-1)^2}{4},\ x\in\mathbb{R}$
f_5	0	0	$x^2,\ x\in\mathbb{R}$
f_6	$\cos(1)$	$\cos(1)-\sin(1)(x-1)$	$\cos(1)-\sin(1)(x-1)-\cos(1)\dfrac{(x-1)^2}{2},\ x\in\mathbb{R}$

L'approximation à l'ordre 3 en 0 de f_1 est donnée par $P_3(x) = 1+2x+\frac{3}{2}x^2+\frac{x^3}{3},\ x\in\mathbb{R}$.

Dans les graphiques suivants, notons P_i l'approximation polynomiale à l'ordre i.

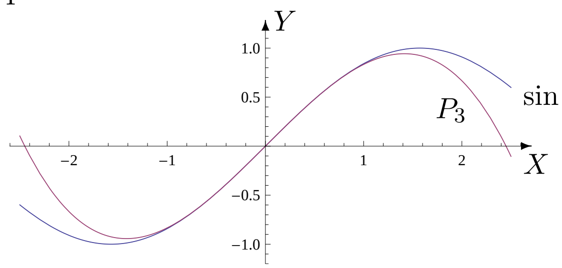






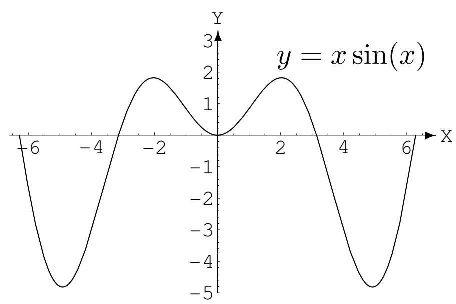
2. a) **Déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre 3 en 0 de la fonction** sin **et en estimer le reste. Représenter la fonction et cette approximation dans le même repère orthonormé.**

L'approximation polynomiale à l'ordre 3 en 0 est donnée par $P_3(x) = x - \frac{x^3}{6},\ x \in \mathbb{R}$ et le reste vaut $R_3(x) = \dfrac{\sin(u)}{4!}x^4,\ x \in \mathbb{R}$ où u est un réel strictement compris entre 0 et x. Dès lors, on a $\quad |R_3(x)| \leq \dfrac{x^4}{24},\ \forall x \in \mathbb{R}.$

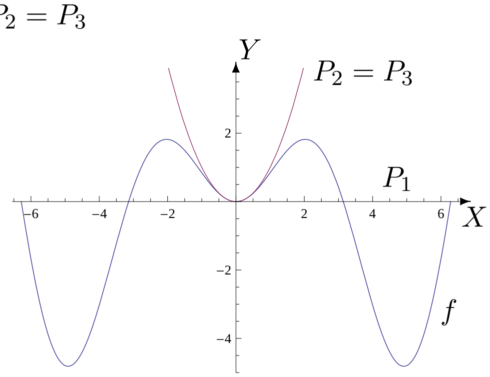


b) Déterminer l'approximation polynomiale en 0 à l'ordre $1,\ 2$ et 3 de la fonction $f(x) = x\sin(x),\ x \in \mathbb{R}$. Représenter graphiquement ces approximations dans le même repère orthonormé que celui où f est représenté (cf ci-dessous), en justifiant les positions relatives des courbes.

(Suggestion : $|\sin x| \leq |x|\ \forall x \in \mathbb{R}$)



Les approximations polynomiales en 0 à l'ordre $1,\ 2$ et 3 de la fonction f sont respectivement $P_1(x) = 0,\ P_2(x) = x^2 = P_3(x),\ x \in \mathbb{R}$.
Au voisinage de zéro, le graphique de f est
1) au-dessus de celui de P_1
2) en dessous de celui de $P_2 = P_3$



3. **Un professeur de mathématique lance un défi à ses élèves. Le premier qui donnera une approximation du nombre e avec les 3 premières décimales exactes et pourra expliquer sa méthode aux autres sera dispensé de la prochaine interrogation. Pour relever le défi, les élèves, restés en classe, n'ont droit qu'à une feuille et un crayon. Ils sont sans accès à internet et ne peuvent utiliser ni gsm, ni calculatrice ...**

   Comment peuvent-ils procéder ?

L'approximation polynomiale en 0 à l'ordre n ($n \in \mathbb{N}$) de l'exponentielle est donnée par

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{x^n}{n!},\ x \in \mathbb{R}$$

et le reste associé vaut $R_n(x) = \dfrac{e^u}{(n+1)!}\, x^{n+1},\ x \in \mathbb{R}$ où u est un réel strictement compris entre 0 et x. Dès lors, si $x \in [0,1]$, $e^u \in [1,e] \subset [1,3]$ et on a $\quad R_n(x) \leq \dfrac{3\, x^{n+1}}{(n+1)!}$.

Si $x = 1$, l'inégalité

$$\frac{3}{(n+1)!} < \frac{1}{10^3} \quad \text{est vérifiée si} \quad n \geq 6\ (7! = 5040).$$

Dès lors, en prenant $n = 6$ et $x = 1$, une valeur approchée de e est donnée par

$$P(1) = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!} = 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\frac{1}{720} = 2+\frac{517}{720} = 2,718\ldots$$

4. **Déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre $0,1,2,3$ en 0 des fonctions données par** [2]

$$g_1(x) = \ln\left(\frac{2-x}{x+2}\right), \quad g_2(x) = \frac{-x-2}{2x^2-x-1}.$$

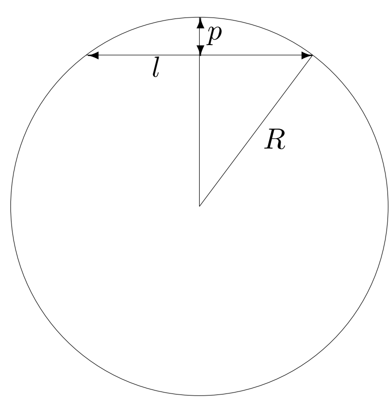
Pour g_1, les approximations polynomiales à l'ordre $0,1,2,3$ en 0 sont respectivement

$$P_0(x) = 0,\ P_1(x) = -x,\ P_2(x) = -x,\ P_3(x) = -x - \frac{x^3}{12},\ x \in \mathbb{R}.$$

Pour g_2, les approximations polynomiales à l'ordre $0,1,2,3$ en 0 sont respectivement

$$P_0(x) = 2,\ P_1(x) = 2 - x,\ P_2(x) = 2 - x + 5x^2,\ P_3(x) = 2 - x + 5x^2 - 7x^3,\ x \in \mathbb{R}.$$

5. **Un tunnel d'une longueur l relie deux points de la surface de la Terre. Si R désigne le rayon de la Terre, déterminer une approximation de la profondeur maximale p de ce tunnel.**



Une approximation de la profondeur maximale de ce tunnel vaut $\dfrac{l^2}{8R}$.

2. *Suggestion.* Utiliser le développement de $\ln(2-x)$ et $\ln(2+x)$; décomposer en fractions simples

Liste 8 : Suites et séries

I. Suites

1. **Etudier la convergence des suites suivantes et préciser leur limite en cas de convergence** :

a) $x_m = \dfrac{3m^2+2m+1}{4m^2+1}$ $(m \in \mathbb{N})$

b) $x_n = \sqrt{n^2+2n+3} - \sqrt{n^2-2n+3}$ $(n \in \mathbb{N})$

c) $x_n = 2n - \sqrt{n^3+n^2}$ $(n \in \mathbb{N})$

d) $x_n = \dfrac{3n+(-1)^{n+1}}{4n+(-1)^n}$ $(n \in \mathbb{N})$

e) $x_n = \ln(3n^2+n) - \ln(3n-1)$ $(n \in \mathbb{N}_0)$

f) $x_k = \sqrt[k]{k^3}$ $(k \in \mathbb{N}_0)$

g) $x_n = \dfrac{n\cos(n!)}{n^2+1}$ $(n \in \mathbb{N})$

h) $x_j = \dfrac{(j-1)!}{j^j}$ $(j \in \mathbb{N}_0)$

i) $x_j = \dfrac{j!\,(j+1)!}{(2j+1)!}$ $(j \in \mathbb{N})$

j)[3] $x_n = \dfrac{1}{n^3}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2$ $(n \in \mathbb{N}_0)$

a) La suite converge vers $\frac{3}{4}$
b) La suite converge vers 2
c) La suite converge vers $-\infty$
d) La suite converge vers $\frac{3}{4}$
e) La suite converge vers $+\infty$
f) La suite converge vers 1
g) La suite converge vers 0
h) La suite converge vers 0
i) La suite converge vers 0
j) La suite converge vers $\frac{1}{3}$

2. **Montrer que la suite** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ **définie par**

$$u_n = (-1)^{n+1} + \frac{1}{2n}$$

est divergente.

Cette suite est divergente car, par exemple, les sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}_0}$ convergent vers des limites différentes.

II. Séries

1. **Etudier la convergence des séries suivantes** :

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n^2)}{n^2}$ b) $\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^j$ c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin((2n+1)\frac{\pi}{2})}{n\ln(n)}$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n\cos\left(\frac{1}{n}\right)$

a) Comparaison avec une série de Riemann convergente car $\alpha = 2 > 1$ donc série convergente.
b) Série géométrique convergente car $-\frac{1}{3} \in]-1,1[$
c) Série alternée avec la suite $r_n = \dfrac{1}{n\ln(n)}$ qui décroît vers 0 donc série convergente.

3. Suggestion : Montrer par récurrence sur n que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

d) Série divergente car son terme général ne tend pas vers 0.

2. **Etudier la convergence des séries suivantes et préciser la somme de celles qui convergent** :

$$\text{a)} \sum_{j=0}^{+\infty} (\sqrt{3})^j \quad \text{b)} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{(j+1)(j+3)} \quad \text{c)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{n+3}}{3^n} \quad \text{d)} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4^{2k-1}}{k!}$$

a) Série géométrique divergente car $\sqrt{3} \notin]-1, 1[$
b) Série convergente dont la somme vaut $\frac{5}{12}$
c) Série géométrique convergente car $\frac{2}{3} \in]-1, 1[$; la somme de la série vaut 24
d) Série définissant l'exponentielle de 16 ; la somme de la série vaut $\frac{e^{16}-1}{4}$

Liste 9 : Séries (2)

Séries

1. **Etudier la convergence des séries suivantes** :

a) $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty}(-1)^j\frac{j^2+2}{j^3+3}$ b) $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{j^2+\sqrt{2}}$ c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{3^k}{\sqrt{k}}$ d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2-1}}$

e) $\displaystyle\sum_{n=4}^{+\infty}\frac{n}{n^4+2}$ f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}3^{2k}.2^{1-k}$ g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{4n^2+5}$

a) Série alternée avec la suite $r_j=\dfrac{j^2+2}{j^3+3}$ qui décroît vers 0 donc série convergente.
b) Comparaison avec une série de Riemann convergente car $\alpha=2>1$ donc série convergente.
c) Série divergente car son terme général ne tend pas vers 0.
d) Série divergente car son terme général ne tend pas vers 0.
e) Comparaison avec une série de Riemann convergente car $\alpha=3>1$ donc série convergente.
f) Série géométrique divergente car $\frac{9}{2}\notin]-1,1[$
g) Série divergente car son terme général ne tend pas vers 0.

2. **Etudier la convergence des séries suivantes et préciser la somme de celles qui convergent** :

a) $\displaystyle\sum_{j=2}^{+\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^j$ b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-2)^n}{n!}$ c) $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n^2-4}$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\cos\frac{1}{n}-\cos\frac{1}{n+1}\right)$

a) Série géométrique convergente car $-\frac{1}{3}\in\,]-1,1[$; la somme de la série vaut $\frac{1}{12}$

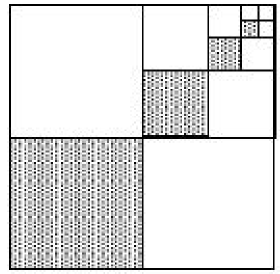
b) Série définissant l'exponentielle de -2 ; la somme de la série vaut $e^{-2}+1=\dfrac{1}{e^2}+1$

c) Série convergente ; la somme de la série vaut $\dfrac{25}{48}$
d) Série convergente ; la somme de la série vaut $\cos(1)-1$

3. **Ecrire sous forme d'une série puis d'une fraction irréductible le réel** $1,5909090\ldots$.

Le réel $1,5909090\ldots=1,5+90.10^{-3}\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty}100^{-j}=\frac{35}{22}$.

4. **Un carré de $6\,cm$ de côté est divisé en quatre carrés identiques (en prenant ses médianes). Le carré inférieur gauche est ombré. Le carré supérieur droit est à nouveau divisé en quatre carrés identiques (en prenant ses médianes) et le carré inférieur gauche est ombré. On répète indéfiniment ce processus comme montré sur la figure ci-dessous. Quelle est la surface ombrée totale ?**



La surface ombrée totale vaut 12 cm^2.

5. **Une balle est lâchée d'une hauteur de $3\,m$. Chaque fois qu'elle frappe le sol, elle rebondit sur les trois quarts de la distance de sa chute. Quelle distance aura-t-elle parcourue quand elle sera complètement arrêtée ?**

   Quand la balle sera complètement arrêtée, elle aura parcouru 21 m.

6. **Démontrer l'égalité**

$$\cos^2(\theta) + \cos^4(\theta) + \cos^6(\theta) + \ldots = \text{cotg}^2(\theta).$$

   A quelle(s) condition(s) cette égalité est-elle vraie ?

   Cette égalité est vraie si et seulement si $\theta \neq k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.