Mathématiques générales A
Examen du lundi 1er juin 2015

QUESTIONNAIRE

Théorie 1.

(1.1) Définir ce que l'on entend par primitive d'une fonction sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

(1.2) Enoncer le théorème des accroissements finis (TAF) dans $]0, +\infty[$.

(1.3) En utilisant le point 1.2, démontrer que si une fonction dérivable dans l'intervalle $]0, +\infty[$ a une dérivée nulle en tout point, alors cette fonction est constante dans l'intervalle.

(1.4) Déduire de ce qui précède que si deux fonctions sont primitives d'une même fonction dans $]0, +\infty[$, alors ces deux primitives sont égales à une constante additive près dans l'intervalle.

Théorie 2.

(2.1) On donne une fonction continue sur l'intervalle $[1, +\infty[$. Quelle est la définition de l'intégrabilité de la fonction sur cet intervalle ?

(2.2) Utiliser la définition donnée au point précédent pour établir une condition nécessaire et suffisante sur r sous laquelle la fonction $x \mapsto x^r$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Exercices

1. (a) Sachant que l'inconnue réelle x appartient à l'intervalle $[\pi, 3\pi]$, résoudre l'équation suivante

$$1 + \cos(x) = \sin(x).$$

(b) Après avoir justifié si elles sont définies, simplifier au maximum les expressions suivantes

$$(*) \quad \ln\left(\sin^2\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right), \qquad (**) \ \arcos\left(\cos\left(\frac{-\pi\ln(\sqrt{e})}{3}\right)\right).$$

(c) Déterminer la partie imaginaire et l'inverse du nombre complexe

$$z = \frac{2+3i}{(1-i)^2}$$

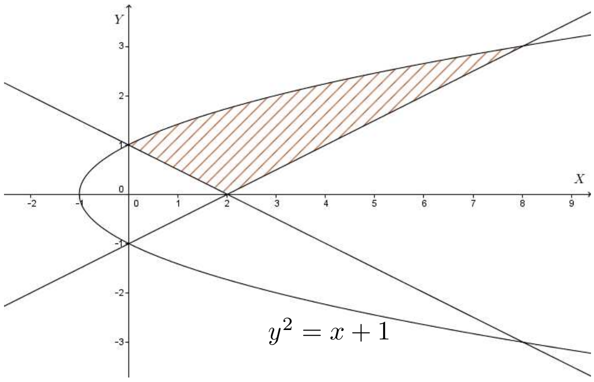
2. Si elles existent, déterminer les limites suivantes

$$(*) \quad \lim_{x\to+\infty} e^{-x}\ln(x), \qquad\qquad (**) \quad \lim_{x\to 2^-} \frac{\ln(3-x)}{5x - x^2 - 6}.$$

3. Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier votre réponse au maximum

$$(*) \quad \int_1^{\sqrt[3]{e}} \frac{1}{x}\ \ln^2(x)\ dx, \qquad\qquad (**) \quad \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{4x^2-1}\ dx.$$

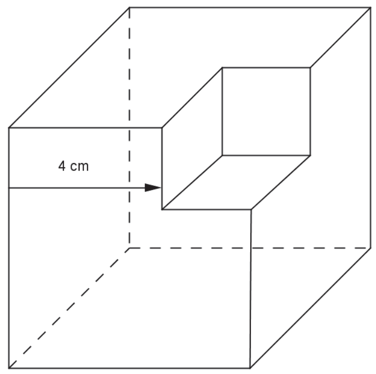
4. Décrire analytiquement l'ensemble borné fermé hachuré suivant en commencant par l'ensemble de variation des ordonnées puis, à ordonnée fixée, l'ensemble de variation des abscisses.



5. Déterminer l'ensemble des solutions réelles de l'équation différentielle

$$D^2 f(x) - f(x) = 1 + x^2.$$

6. Rédiger une résolution du problème suivant en justifiant le raisonnement.
Un grand cube a été évidé d'un petit cube pour obtenir le solide dessiné. Le volume dessiné est égal à 91 cm^3. Combien mesure l'arête du grand cube en mètres ?



CORRIGE

Théorie

Question 1.

(1.1) **Définir ce que l'on entend par primitive d'une fonction sur l'intervalle $]0, +\infty[$.**
Solution. Voir cours p. 112 définition 2.8.1 (version 2014-2015)

(1.2) **Enoncer le théorème des accroissements finis (TAF) dans $]0, +\infty[$.**
Solution. Voir cours p. 105 théorème 2.7.4 (version 2014-2015)

(1.3) **En utilisant le point 1.2, démontrer que si une fonction dérivable dans l'intervalle $]0, +\infty[$ a une dérivée nulle en tout point, alors cette fonction est constante dans l'intervalle.**
Solution. Voir cours p. 106 théorème 2.7.5 (version 2014-2015)

(1.4) **Déduire de ce qui précède que si deux fonctions sont primitives d'une même fonction dans $]0, +\infty[$, alors ces deux primitives sont égales à une constante additive près dans l'intervalle.**
Solution. Voir cours p. 113 propriété 2.8.3 (version 2014-2015)

Question 2.

(2.1) **On donne une fonction continue sur l'intervalle $[1, +\infty[$. Quelle est la définition de l'intégrabilité de la fonction sur cet intervalle ?**
Solution. Voir cours p. 137 définition 4.2.2 (version 2014-2015)

(2.2) **Utiliser la définition donnée au point précédent pour établir la condition nécessaire et suffisante sur r sous laquelle la fonction $x \mapsto x^r$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.**
Solution. Voir cours p. 139 proposition 4.2.6 (version 2014-2015)

Exercices

1. **(a) Sachant que l'inconnue réelle x appartient à l'intervalle $[\pi, 3\pi]$, résoudre l'équation suivante**

$$1 + \cos(x) = \sin(x).$$

Solution. L'équation est définie pour $x \in \mathbb{R}$ et, puisque $\cos(x) = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1$ et que $\sin(x) = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$, elle est équivalente à

$$\begin{aligned}1 + 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) &\Leftrightarrow \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0\\ &\Leftrightarrow \cos\left(\frac{x}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right) = 0\\ &\Leftrightarrow \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \quad \text{ou} \quad \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)\\ &\Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{ou} \quad \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})\\ &\Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).\end{aligned}$$

Dès lors, les solutions dans l'intervalle $[\pi, 3\pi]$ sont π, $\frac{5\pi}{2}$, 3π.

(b) Après avoir justifié si elles sont définies, simplifier au maximum les expressions suivantes

$$(*) \ \ln\left(\sin^2\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right), \qquad (**) \ \text{arcos}\left(\cos\left(\frac{-\pi\ln(\sqrt{e})}{3}\right)\right).$$

Solution. (*) La fonction ln est définie sur $]0, +\infty[$; d'autre part, la fonction sin est définie sur $\mathbb{R}$. Comme $\sin^2\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{4}$, l'expression donnée est définie et on a

$$\ln\left(\sin^2\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = \ln\left(\frac{1}{4}\right) = \ln(2^{-2}) = -2\ln(2).$$

(**) Comme $\sqrt{e} > 0$, ln défini sur $]0, +\infty[$ et $\ln(e) = 1$, on a $\frac{-\pi\ln(\sqrt{e})}{3} = \frac{-\pi}{6}$; d'autre part, la fonction cos est définie sur $\mathbb{R}$ et son ensemble image est $[-1, 1]$. Enfin, la fonction arcos est définie sur $[-1, 1]$. Dès lors, l'expression donnée est définie et on a

$$\text{arcos}\left(\cos\left(\frac{-\pi\ln(\sqrt{e})}{3}\right)\right) = \text{arcos}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right)\right) = \text{arcos}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{\pi}{6}$$

car $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ et $\text{im(arcos)} = [0, \pi]$.

(c) Déterminer la partie imaginaire et l'inverse du nombre complexe

$$z = \frac{2 + 3i}{(1 - i)^2}.$$

Solution. Puisque $(1 - i)^2 = 1 + i^2 - 2i = -2i$, on a

$$z = \frac{2 + 3i}{(1 - i)^2} = \frac{2 + 3i}{-2i} = \frac{(2 + 3i)(i)}{-2i \ . \ (i)} = \frac{2i - 3}{2} = \frac{-3}{2} + \ i.$$

La partie imaginaire de z vaut donc 1.
Comme z est non nul, son inverse existe et vaut

$$\frac{1}{z} = \frac{2}{-3 + 2i}.\frac{-3 - 2i}{-3 - 2i} = \frac{-6 - 4i}{13}.$$

2. **Si elles existent, déterminer les limites suivantes**

$$(*)\ \lim_{x\to+\infty} e^{-x}\ln(x), \qquad\qquad (**)\ \lim_{x\to 2^-} \frac{\ln(3-x)}{5x-x^2-6}.$$

Solution. (*) La fonction $x \mapsto e^{-x}\ln(x)$ est définie sur $]0,+\infty[$, ensemble non majoré ; le calcul de la limite en $+\infty$ peut donc être envisagé. Cela étant, pour lever l'indétermination $0^+ \cdot (+\infty)$, on utilise le théorème de l'Hospital dont les hypothèses sont vérifiées, en considérant la fonction sous la forme $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{e^x}$.

En effet, si $V =]\varepsilon, +\infty[$ ($\varepsilon > 0$ et assez grand), on a

1) $f : x \mapsto \ln(x)$ et $g : x \mapsto e^x$ sont dérivables dans V

2) $Dg(x) = e^x \neq 0$ dans V

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ (et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(\ln(x)) = +\infty$)

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{Df(x)}{Dg(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x.e^x} = 0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}(x\ e^x) = +\infty$.

Dès lors, la limite cherchée vaut 0^+.

(**) La fonction $x \mapsto \dfrac{\ln(3-x)}{5x-x^2-6}$ est définie sur $A =]-\infty, 2[\cup]2, 3[$.

Soit $B = A \cap]-\infty, 2[=]-\infty, 2[$. Comme tout intervalle ouvert contenant 2 rencontre B, la limite de la fonction en 2^- peut être envisagée. Pour lever l'indétermination $\frac{0}{0}$, on utilise le théorème de l'Hospital dont les hypothèses sont vérifiées.

En effet, si $V =]2-\varepsilon, 2[$ ($\varepsilon > 0$ et assez petit), on a

1) $f : x \mapsto \ln(3-x)$ et $g : x \mapsto 5x - x^2 - 6$ sont dérivables dans V

2) $Dg(x) = 5 - 2x \neq 0$ dans V

3) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \ln(3-x) = \ln(1) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}(5x - x^2 - 6) = 0$

4) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{Df(x)}{Dg(x)} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{\frac{-1}{3-x}}{5-2x} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{-1}{(3-x)(5-2x)} = -1$.

Dès lors, la limite cherchée vaut -1.

3. **Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier votre réponse au maximum**

$$(*)\ \int_1^{\sqrt[3]{e}} \frac{1}{x}\ \ln^2(x)\ dx, \qquad\qquad (**)\ \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{4x^2-1}\ dx.$$

Solution. (*) La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}\ \ln^2(x)$ est continue sur $]0,+\infty[$; elle est donc intégrable sur l'intervalle fermé borné $[1, \sqrt[3]{e}]$. Cela étant, comme $D\ln(x) = \frac{1}{x}$, on a

$$\int_1^{\sqrt[3]{e}} \frac{1}{x}\ \ln^2(x)\ dx = \int_1^{\sqrt[3]{e}} D\ln(x)\ \ln^2(x)\ dx = \left[\frac{\ln^3(x)}{3}\right]_1^{\sqrt[3]{e}}$$

$$= \frac{1}{3}\left[(\ln^3(\sqrt[3]{e}) - \ln^3(1))\right] = \frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{3}\ln(e)\right)^3 - 0)\right] = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}.$$

(**) La fonction $x \mapsto \frac{1}{4x^2-1}$ est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$ donc sur $]-\infty, -1]$, ensemble non borné. Pour vérifier l'intégrabilité de la fonction en $-\infty$, on peut utiliser le critère en θ de la manière suivante : calculons la limite

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}\left(x^2\left|\frac{1}{4x^2-1}\right|\right) &= \lim_{x\to-\infty}\left(x^2\frac{1}{4x^2-1}\right)\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{4x^2}\\
&= \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Comme cette limite existe et est finie avec $\theta = 2 > 1$, par le critère d'intégration en θ, f est intégrable en $-\infty$ donc finalement sur $]-\infty, -1]$.
Décomposons la fraction donnée en une somme de fractions simples ; on a

$$\frac{1}{4x^2-1} = \frac{1}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{2x+1} = \frac{A(2x+1)+B(2x-1)}{(2x-1)(2x+1)},\ x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}.$$

Vu les propriétés des polynômes, on a $1 = 2(A+B)x + (A-B)$ pour tout réel x, ce qui donne $A = \frac{1}{2}$ et $B = \frac{-1}{2}$.
Comme

$$\int \left(\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x+1}\right) dx \simeq \int \frac{1}{2x-1}\, dx\ - \int \frac{1}{2x+1}\, dx \simeq \frac{1}{2}\int \frac{2}{2x-1}\, dx\ - \frac{1}{2}\int \frac{2}{2x+1}\, dx$$

$$\simeq\ \frac{1}{2}\ln|2x-1| - \frac{1}{2}\ln|2x+1| \simeq\ \frac{1}{2}\ln\left(\left|\frac{2x-1}{2x+1}\right|\right), x \in]-\infty, -1],$$

on a

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{4x^2-1}\, dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\ln\left(\left|\frac{2x-1}{2x+1}\right|\right)\right]_{x\to-\infty}^{-1} = \frac{1}{4}\left[\ln\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)\right]_{x\to-\infty}^{-1}$$

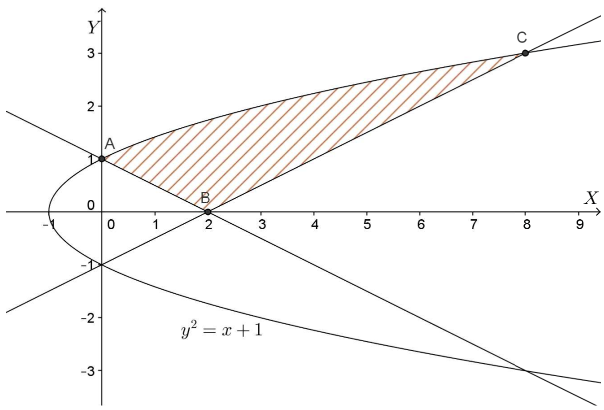
$$= \frac{1}{4}\left(\ln\left(\frac{-3}{-1}\right) - \lim_{x\to-\infty}\left(\ln\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)\right)\right) = \frac{1}{4}\ln(3),$$

l'application du théorème de la limite d'une fonction composée donnant

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\ln\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)\right) = 0 \text{ car } \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x}{2x}\right) = 1 \text{ et } \lim_{y\to1}\ln(y) = 0.$$

Remarque : puisque la fonction est positive sur l'intervalle d'intégration, on pouvait également prouver l'intégrabilité en utilisant la définition.

4. **Décrire analytiquement l'ensemble borné fermé hachuré suivant en commencant par l'ensemble de variation des ordonnées puis, à ordonnée fixée, l'ensemble de variation des abscisses.**



Solution.
Les points A, B et C ont respectivement pour coordonnées $(0,1), (2,0)$ et $(8,3)$. Les droites qui délimitent l'ensemble ont pour équation $AB : x + 2y - 2 = 0$, $BC : x - 2y - 2 = 0$, et la parabole a pour équation $y^2 - 1 = x$.
Dès lors, l'ensemble fermé hachuré est décrit analytiquement par

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,1],\ x \in [-2y+2, 2y+2]\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [1,3],\ x \in [y^2-1, 2y+2]\}.$$

5. **Déterminer l'ensemble des solutions réelles de l'équation différentielle**

$$D^2 f(x) - f(x) = 1 + x^2.$$

Solution. L'équation donnée est une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 2 non homogène.
L'équation homogène associée est $D^2 f(x) - f(x) = 0$; le polynôme caractéristique est $z \mapsto z^2 - 1$ dont les zéros sont -1 et 1. Il s'ensuit que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$c_1\, e^{-x} + c_2\, e^x,\ x \in \mathbb{R}$$

où c_1, c_2 sont des constantes réelles arbitraires.

Cherchons une solution particulière de $D^2 f(x) - f(x) = 1 + x^2$ (*).
Le second membre de cette équation est l'exponentielle-polynôme $(1 + x^2).e^{0x}$, produit d'un polynôme de degré 2 et d'une exponentielle dont le coefficient 0 de l'argument n'est pas solution de l'équation caractéristique. Une solution particulière est donc du type $f_P(x) = (Ax^2+Bx+C)\, x^0\, e^{0x}$, c'est-à-dire $f_P(x) = Ax^2 + Bx + C$, $x \in \mathbb{R}$ où A, B, C sont des constantes à déterminer.
Comme $Df_P(x) = 2Ax + B$ et $D^2 f_P(x) = 2A$, en remplaçant dans (*), on a

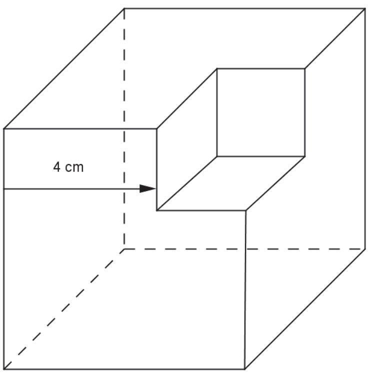
$$2A - (Ax^2 + Bx + C) = 1 + x^2 \Leftrightarrow -Ax^2 - Bx + (2A - C) = x^2 + 1 \Leftrightarrow A = -1,\ B = 0\ et\ C = -3.$$

Ainsi, $f_P(x) = -x^2 - 3,\ x \in \mathbb{R}$ et les solutions de l'équation donnée sont les fonctions

$$c_1\, e^{-x} + c_2\, e^x - x^2 - 3,\ x \in \mathbb{R}$$

où c_1, c_2 sont des constantes réelles arbitraires.

6. **Rédiger une résolution du problème suivant en justifiant le raisonnement.**
Un grand cube a été évidé d'un petit cube pour obtenir le solide dessiné. Le volume dessiné est égal à $91\ cm^3$***. Combien mesure l'arête du grand cube en mètres ?***



Solution. Soit x la longueur de l'arête du grand cube (exprimée en centimètres). La longueur (en centimètres) de l'arête du petit cube retiré vaut donc $x - 4$. Puisque le volume dessiné vaut le volume total moins celui du petit cube, on a l'équation

$$x^3 - (x-4)^3 = 91 \Leftrightarrow x^3 - (x^3 - 12x^2 + 48x - 64) - 91 = 0$$
$$\Leftrightarrow 12x^2 - 48x - 27 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 16x - 9 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{9}{2} \text{ ou } x = \frac{-1}{2},$$

puisque le discriminant de cette dernière équation vaut $(20)^2$.
Comme seule une valeur réelle positive de x peut-être acceptée pour le problème, on a $x = \frac{9}{2}$.
L'arête du grand cube mesure donc $4,5$ cm c'est-à-dire $0,045$ mètres .