Mathématiques générales A
Examen du lundi 17 août 2015

QUESTIONNAIRE

Théorie

Théorie 1.

(1.1) Définir ce que l'on entend par primitive d'une fonction sur l'intervalle $]0,1[$.

(1.2) Enoncer le théorème des accroissements finis (TAF) dans $]0,1[$.

(1.3) En utilisant le point 1.2, démontrer que si une fonction dérivable dans l'intervalle $]0,1[$ a une dérivée nulle en tout point, alors cette fonction est constante dans l'intervalle.

(1.4) Déduire de ce qui précède que si deux fonctions sont primitives d'une même fonction dans $]0,1[$, alors ces deux primitives sont égales à une constante additive près dans l'intervalle.

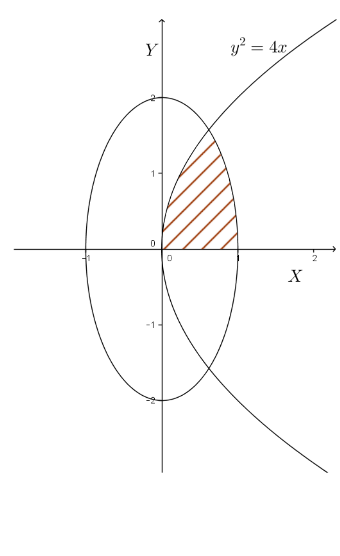
Théorie 2.

(2.1) On donne une fonction continue sur l'intervalle $]0,1]$. Quelle est la définition de l'intégrabilité de la fonction sur cet intervalle ?

(2.2) Utiliser la définition donnée au point précédent pour établir une condition nécessaire et suffisante sur r sous laquelle la fonction $x \mapsto x^r$ est intégrable sur $]0,1]$.

Exercices

1. (a) Sachant que l'inconnue réelle x appartient à l'intervalle $[\pi, 3\pi]$, résoudre l'équation suivante
$$\cos(2x) = \cos(x) - 1.$$
(b) Après avoir justifié si elles sont définies, simplifier au maximum les expressions suivantes
$$(*) \quad \ln\left(\cos^2\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right), \qquad (**) \ \cos\left(\operatorname{arcos}\left(\frac{-\pi\ln(e^3)}{3}\right)\right).$$
(c) Déterminer la partie imaginaire et le module du nombre complexe
$$z = \frac{1+3i}{(1+i)^2}\ .$$
2. Si elles existent, déterminer les limites suivantes
$$(*) \ \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+x}\right) \qquad , \qquad (**) \ \lim_{x\to 0^-} (x\ln(-x)).$$
3. Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier votre réponse au maximum
$$(*) \ \int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x+2)}\, dx \qquad , \qquad (**) \ \int_{-\infty}^0 \left(xe^{-x^2}\right) dx.$$
4. Décrire analytiquement l'ensemble borné fermé hachuré suivant en commençant par l'ensemble de variation des abscisses puis, à abscisse fixée, l'ensemble de variation des ordonnées.



5. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$D^2 f(x) + f(x) = x^2 + 1 \ .$$

6. Rédiger une résolution du problème suivant en justifiant le raisonnement.
Un groupe de retraités loue un car 1800 euros pour une excursion. Le jour du départ, dix personnes victimes d'une épidémie de grippe ne peuvent entreprendre le voyage, ce qui augmente de 6 euros les frais de chaque participant. Combien de personnes devaient partir initialement ?

CORRIGE

Théorie

Question 1.

(1.1) **Définir ce que l'on entend par primitive d'une fonction sur l'intervalle $]0,1[$.**
Solution. Voir cours p. 112 définition 2.8.1 (version 2014-2015)

(1.2) **Enoncer le théorème des accroissements finis (TAF) dans $]0,1[$.**
Solution. Voir cours p. 105 théorème 2.7.4 (version 2014-2015)

(1.3) **En utilisant le point 1.2, démontrer que si une fonction dérivable dans l'intervalle $]0,1[$ a une dérivée nulle en tout point, alors cette fonction est constante dans l'intervalle.**
Solution. Voir cours p. 106 théorème 2.7.5 (version 2014-2015)

(1.4) **Déduire de ce qui précède que si deux fonctions sont primitives d'une même fonction dans $]0,1[$, alors ces deux primitives sont égales à une constante additive près dans l'intervalle.**
Solution. Voir cours p. 113 propriété 2.8.3 (version 2014-2015)

Question 2.

(2.1) **On donne une fonction continue sur l'intervalle $]0,1]$. Quelle est la définition de l'intégrabilité de la fonction sur cet intervalle ?**
Solution. Voir cours p. 137 définition 4.2.2 (version 2014-2015)

(2.2) **Utiliser la définition donnée au point précédent pour établir la condition nécessaire et suffisante sur r sous laquelle la fonction $x \mapsto x^r$ est intégrable sur $]0,1]$.**
Solution. Voir cours p. 139 proposition 4.2.6 (version 2014-2015)

Exercices

1. **(a) Sachant que l'inconnue réelle x appartient à l'intervalle $[\pi, 3\pi]$, résoudre l'équation suivante**

$$\cos(2x) = \cos(x) - 1.$$

Solution. L'équation est définie pour $x \in \mathbb{R}$ et, puisque $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$, elle est équivalente à

$$2\cos^2(x) - 1 = \cos(x) - 1 \Leftrightarrow \cos(x)\,(2\cos(x) - 1) = 0$$
$$\Leftrightarrow \cos(x) = 0 \quad \text{ou} \quad \cos(x) = \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{ou} \quad (x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{-\pi}{3} + 2k\pi)\ (k \in \mathbb{Z}).$$

Dès lors, les solutions dans l'intervalle $[\pi, 3\pi]$ sont $\frac{3\pi}{2},\ \frac{5\pi}{3},\ \frac{7\pi}{3},\ \frac{5\pi}{2}$.

(b) Après avoir justifié si elles sont définies, simplifier au maximum les expressions suivantes

$$(*)\quad \ln\left(\cos^2\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right), \qquad (**)\ \cos\left(\text{arcos}\left(\frac{-\pi\ln(e^3)}{3}\right)\right).$$

Solution. (*) La fonction ln est définie sur $]0, +\infty[$; d'autre part, la fonction cos est définie sur $\mathbb{R}$. Comme $\cos^2\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{1}{4}$, l'expression donnée est définie et on a

$$\ln\left(\cos^2\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) = \ln\left(\frac{1}{4}\right) = \ln(2^{-2}) = -2\ln(2).$$

(**) Comme ln est défini sur $]0, +\infty[$ et que $\ln(e^3) = 3$, on a $\frac{-\pi\ln(e^3)}{3} = \frac{-3\pi}{3} = -\pi$.
Mais puisque arcos est défini sur $[-1, 1]$ et que $-\pi$ n'est pas dans cet ensemble, l'expression n'est donc pas définie !

(c) Déterminer la partie imaginaire et le module du nombre complexe

$$z = \frac{1+3i}{(1+i)^2}\ .$$

Solution. Puisque $(1+i)^2 = 1 + i^2 + 2i = 2i$, on a

$$z = \frac{1+3i}{(1+i)^2} = \frac{1+3i}{2i} = \frac{(1+3i)(i)}{2i\ .\ (i)} = \frac{i-3}{-2} = \frac{3}{2} - \frac{i}{2}.$$

La partie imaginaire de z vaut donc $\frac{-1}{2}$.
Son module vaut

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9+1}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

2. **Si elles existent, déterminer les limites suivantes**

$$(*)\ \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2+x}\right) \qquad , \qquad (**)\ \lim_{x\to 0^-}\ (x\ln(-x)).$$

Solution. (*) La fonction $x \mapsto \sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2+x}$ est définie sur

$$\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 \geqslant 0 \text{ et } x^2 + x \geqslant 0\} = \{x \in \mathbb{R} : (x \leqslant -1 \text{ ou } x \geqslant 1) \text{ et } (x \leqslant -1 \text{ ou } x \geqslant 0)\}$$

$$=]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[.$$

Comme cet ensemble n'est pas minoré, le calcul de la limite en $-\infty$ peut être envisagé. Cela étant, pour lever l'indétermination $+\infty-\infty$, on multiplie numérateur et dénominateur par $\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+x}$ et on a

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-1-x^2-x}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+x}}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-x(1+\frac{1}{x})}{|x|(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}})}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=\frac{1}{2}.$$

(**) La fonction $x\mapsto x\ln(-x)$ est définie sur $A=]-\infty,0[$.

Soit $B=A\cap\,]-\infty,0[=]-\infty,0[$. Comme tout intervalle ouvert contenant 0 rencontre B, la limite de la fonction en 0^- peut être envisagée. Cela étant, pour lever l'indétermination $0^-\,.\,(-\infty)$, on utilise le théorème de l'Hospital dont les hypothèses sont vérifiées, en considérant la fonction sous la forme $x\mapsto\dfrac{\ln(-x)}{\frac{1}{x}}$.

En effet, si $V=]-\varepsilon,0[$ ($\varepsilon>0$ et assez petit), on a

1) $f:x\mapsto\ln(-x)$ et $g:x\mapsto\frac{1}{x}$ sont dérivables dans V

2) $Dg(x)=\frac{-1}{x^2}\neq 0$ dans V

3) $(\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\ln(-x)=-\infty$ et) $\lim_{x\to0^-}g(x)=\lim_{x\to0^-}\left(\dfrac{1}{x}\right)=-\infty$

4) $\lim_{x\to0^-}\dfrac{Df(x)}{Dg(x)}=\lim_{x\to0^-}\dfrac{\frac{-1}{-x}}{\frac{-1}{x^2}}=\lim_{x\to0^-}-x=0.$

Dès lors, par application du théorème de l'Hospital, la limite cherchée vaut 0.

3. **Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier votre réponse au maximum**

$$(*)\ \int_0^1\frac{1}{(x+1)(x+2)}\,dx\qquad,\qquad(**)\ \int_{-\infty}^0\left(xe^{-x^2}\right)\,dx.$$

Solution. (*) La fonction $x\mapsto\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$ est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{-2,-1\}$ donc sur l'intervalle fermé borné $[0,1]$; elle est donc intégrable sur cet intervalle .

Décomposons la fraction donnée en une somme de fractions simples ; on a

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}=\frac{A(x+2)+B(x+1)}{(x+1)(x+2)},\ x\in\mathbb{R}\setminus\{-2,-1\}.$$

Vu les propriétés des polynômes, on a $1=A(x+2)+B(x+1)$ pour tout réel x, ce qui donne $A=1$ et $B=-1$.

Comme

$$\int\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)dx\simeq\int\frac{1}{x+1}\,dx-\int\frac{1}{x+2}\,dx\simeq\ln|x+1|-\ln|x+2|\simeq\ln\left(\left|\frac{x+1}{x+2}\right|\right),x\in]-1,+\infty[,$$

on a

$$\int_0^1\frac{1}{(x+1)(x+2)}\,dx=\left[\ln\left(\left|\frac{x+1}{x+2}\right|\right)\right]_0^1=\ln\left(\frac{2}{3}\right)-\ln\left(\frac{1}{2}\right)=\ln\left(\frac{4}{3}\right).$$

(**) La fonction $x\mapsto xe^{-x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $]-\infty,0]$, ensemble non borné. Pour vérifier l'intégrabilité de la fonction en $-\infty$, on peut utiliser le critère en θ . Calculons la limite

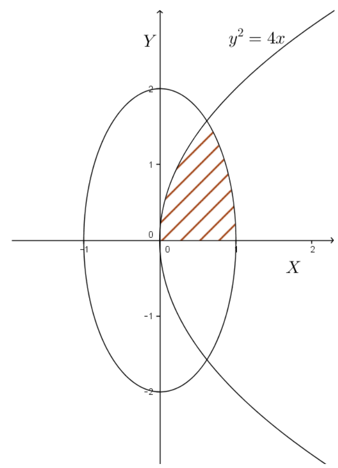
$$\lim_{x\to-\infty}\left(x^2|x|\,e^{-x^2}\right)=-\lim_{x\to-\infty}\left(x^3e^{-x^2}\right)=0$$

car l'exponentielle l'emporte sur les puissances antagonistes. Comme cette limite existe et est finie avec $\theta = 2 > 1$, par le critère d'intégration en θ, f est intégrable en $-\infty$ donc finalement sur $]-\infty, 0]$. On a donc

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{0} \left(xe^{-x^2}\right) dx = \frac{-1}{2}\int_{-\infty}^{0} \left(-2xe^{-x^2}\right) dx = \frac{-1}{2}\left[e^{-x^2}\right]_{x\to-\infty}^{0} \\ = \frac{-1}{2}\left(e^0 - \lim_{x\to-\infty}\left(e^{-x^2}\right)\right) = \frac{-1}{2},\end{aligned}$$

par application du théorème de la limite d'une fonction composée donnant $\lim_{x\to-\infty}(-x^2) = -\infty$ et $\lim_{y\to-\infty}(e^y) = 0$.

4. **Décrire analytiquement l'ensemble borné fermé hachuré suivant en commençant par l'ensemble de variation des abscisses puis, à abscisse fixée, l'ensemble de variation des ordonnées.**



Solution.

L'ellipse a pour équation $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ ou encore $4x^2 + y^2 = 4$. La parabole a pour équation $y^2 = 4x$. L'abscisse du point d'intersection entre les deux courbes est le réel positif $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, zéro positif de l'équation $4x^2 + 4x = 4$.
Dès lors, l'ensemble fermé hachuré est décrit analytiquement par

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \left[0, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right],\ y \in \left[0, 2\sqrt{x}\right]\right\} \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, 1\right],\ y \in \left[0, 2\sqrt{1-x^2}\right]\right\}.$$

5. **Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle**

$$D^2 f(x) + f(x) = x^2 + 1 \ .$$

Solution. L'équation donnée est une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 2 non homogène.
L'équation homogène associée est $D^2 f(x) + f(x) = 0$; le polynôme caractéristique est $z \mapsto z^2 + 1$ dont les zéros sont $-i$ et i. Il s'ensuit que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$c_1\, e^{-ix} + c_2\, e^{ix},\ x \in \mathbb{R}$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

Cherchons une solution particulière de $D^2 f(x) + f(x) = x^2 + 1$ (*).
Le second membre de cette équation est l'exponentielle-polynôme $(x^2+1).e^{0x}$, produit d'un polynôme de degré 2 et d'une exponentielle dont le coefficient 0 de l'argument n'est pas solution de l'équation caractéristique. Une solution particulière est donc du type $f_P(x) = (Ax^2+Bx+C)\, x^0\, e^{0x}$, c'est-à-dire $f_P(x) = Ax^2 + Bx + C$, $x \in \mathbb{R}$ où A, B, C sont des constantes à déterminer.
Comme $Df_P(x) = 2Ax + B$ et $D^2 f_P(x) = 2A$, en remplaçant dans (*), on a

$$2A + (Ax^2 + Bx + C) = x^2 + 1 \Leftrightarrow Ax^2 + Bx + (2A + C) = x^2 + 1 \Leftrightarrow A = 1,\ B = 0 \ et\ C = -1.$$

Ainsi, $f_P(x) = x^2 - 1,\ x \in \mathbb{R}$ et les solutions de l'équation donnée sont les fonctions

$$c_1\, e^{-ix} + c_2\, e^{ix} + x^2 - 1,\ x \in \mathbb{R}$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

6. **Rédiger une résolution du problème suivant en justifiant le raisonnement.**
Un groupe de retraités loue un car 1800 euros pour une excursion. Le jour du départ, dix personnes victimes d'une épidémie de grippe ne peuvent entreprendre le voyage, ce qui augmente de 6 euros les frais de chaque participant. Combien de personnes devaient partir initialement ?

Solution. Soit x le nombre de personnes qui devaient partir initialement. Puisque le prix du car est de 1800 euros, le prix par personne est de $\dfrac{1800}{x}$ euros. Si 10 personnes se désistent, le prix passe à $\dfrac{1800}{x-10}$ euros ou encore $\dfrac{1800}{x} + 6$ euros. On a donc l'équation

$$\frac{1800}{x-10} = \frac{1800}{x} + 6 \Leftrightarrow 1800x = 1800(x-10) + 6x(x-10)$$
$$\Leftrightarrow 1800x = 1800x - 18000 + 6x^2 - 60x \Leftrightarrow 6x^2 - 60x - 18000 = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 10x - 3000 = 0 \Leftrightarrow x = 60 \text{ ou } \ x = -50,$$

puisque le discriminant de cette dernière équation vaut $(110)^2$.
Comme seule une valeur réelle positive de x peut-être acceptée pour le problème, on a $x = 60$.
Les retraités étaient donc 60 au départ.