
Université
de Liège



1, 2, 3... Sciences

Année académique 2014-2015

QUESTIONNAIRE ET CORRIGÉ
EXAMEN DE MATH B DU 1ER JUIIN 2015
BIOLOGISTES

QUESTIONNAIRE

1. On donne la fonction f par $f(x) = \cos^2(x)$.

- a) Si possible, déterminer les approximations polynomiales de cette fonction à l'ordre 1 et 2 en 0.
- b) Dans un même repère orthonormé, représenter au voisinage de 0 le graphique de f et des approximations demandées en utilisant différentes couleurs.

2. Soient les matrices A , B et X données par

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- Si c'est possible, déterminer la matrice inverse de B .
- La matrice B est-elle diagonalisable? Pourquoi? Si oui, en déterminer une forme diagonale, ainsi qu'une matrice qui y conduit.
- Quelle est la forme générale des matrices qui commutent avec B ? Justifier.
- Montrer **directement** que X est un vecteur propre de A de valeur propre λ_0 et donner la valeur de λ_0 .

3. a) On donne la fonction f par

$$f(x, y) = \ln(y^2 - x).$$

- Déterminer le domaine d'infinie dérivabilité de cette fonction. Dans un repère orthonormé, représenter ce domaine en le hachurant.
- Déterminer l'expression explicite de $F(t) = f(1, e^t - 1)$, le domaine de dérivabilité de cette fonction et l'expression explicite de sa dérivée en tout point de son domaine.
- Si elle existe, que vaut la dérivée de F en $t = 0$? Simplifier votre réponse au maximum.

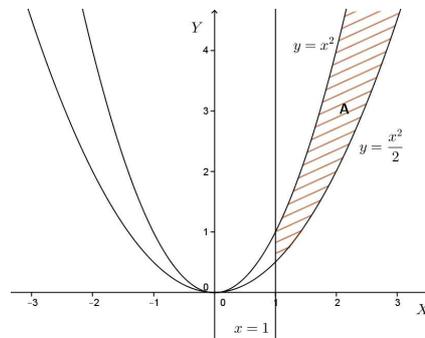
b) Soit f une fonction intégrable sur la partie A du plan telle que

$$\iint_A f(x, y) \, dx dy = \int_{-1}^0 \left(\int_{\frac{1}{y}}^y f(x, y) \, dx \right) dy.$$

- Représenter l'ensemble d'intégration A dans un repère orthonormé en le hachurant.
- Permuter l'ordre d'intégration.
- Trouve-t-on la même valeur quel que soit l'ordre d'intégration? Pourquoi?

4. On donne l'ensemble hachuré A ci-contre.
Si elle existe, déterminer la valeur de l'intégrale

$$\iint_A \frac{y}{x^2(y^2 + x^4)} \, dx \, dy.$$



CORRIGÉ

Exercices

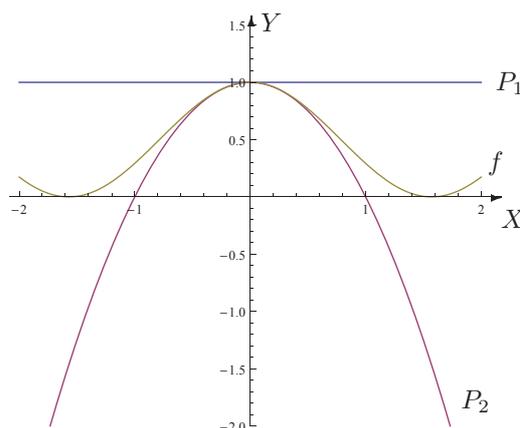
1. On donne la fonction f par $f(x) = \cos^2(x)$.
- a) Si possible, déterminer les approximations polynomiales de cette fonction à l'ordre 1 et 2 en 0.
- b) Dans un même repère orthonormé, représenter au voisinage de 0 le graphique de f et des approximations demandées en utilisant différentes couleurs. .

Solution. La fonction est infiniment dérivable sur \mathbb{R} et on a

$$Df(x) = 2 \cos(x)(-\sin(x)) = -\sin(2x), \quad D^2f(x) = -2 \cos(2x).$$

Comme $f(0) = 1$, $Df(0) = 0$ et $D^2f(0) = -2$, si on note $P_n(x)$ l'approximation polynomiale de f à l'ordre n en 0, on a

$$P_1(x) = f(0) + Df(0)x = 1, \quad P_2(x) = P_1(x) + \frac{D^2f(0)}{2!}x^2 = 1 - x^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$



2. Soient les matrices A , B et X données par

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- Si c'est possible, déterminer la matrice inverse de B .

Solution. La matrice B est inversible si et seulement si $\det B \neq 0$. Comme $\det B = -4$, la matrice B est donc inversible.

La matrice des cofacteurs de B étant égale à

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix},$$

l'inverse de B est la matrice

$$B^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- La matrice B est-elle diagonalisable? Pourquoi? Si oui, en déterminer une forme diagonale, ainsi qu'une matrice qui y conduit.

Solution. Les valeurs propres de B sont les zéros du polynôme $\begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4$. La matrice B possède donc deux valeurs propres simples, -2 et 2 ; elle est donc diagonalisable.

Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre -2 sont les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que

$$(B + 2I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x + y = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre -2 sont donc des vecteurs du type

$$c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

où c est une constante complexe non nulle.

Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 2 sont les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que

$$(B - 2I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 2 sont donc des vecteurs du type

$$c' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

où c' est une constante complexe non nulle.

Dès lors, la matrice inversible $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ est telle que $S^{-1}BS = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

- Quelle est la forme générale des matrices qui commutent avec B ? Justifier.

Solution. Comme B est une matrice de dimension 2, toute matrice qui commute avec B est aussi de dimension 2.

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec a, b, c et $d \in \mathbb{C}$. On a

$$BM = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c & 2d \\ 2a & 2b \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad MB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b & 2a \\ 2d & 2c \end{pmatrix}.$$

Dès lors, $BM = MB \Leftrightarrow b = c$ et $a = d$ et on a $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec a et $b \in \mathbb{C}$.

- Montrer directement que X est un vecteur propre de A de valeur propre λ_0 et donner la valeur de λ_0 .

Solution. Par définition, X est un vecteur propre de A de valeur propre λ_0 si $AX = \lambda_0 X$. Comme

$$AX = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = (-2) \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

X est bien un vecteur propre de A de valeur propre -2 .

3. a) On donne la fonction f par

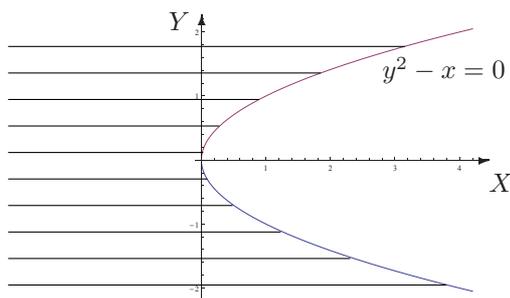
$$f(x, y) = \ln(y^2 - x).$$

- Déterminer le domaine d'infinie dérivabilité de cette fonction. Dans un repère ortho-normé, représenter ce domaine en le hachurant.

Solution. Le domaine d'infinie dérivabilité de la fonction f est égal à

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - x > 0\}.$$

Voici la représentation graphique de cet ensemble (partie hachurée) : les points de la parabole d'équation cartésienne $y^2 - x = 0$ sont exclus de l'ensemble.



- Déterminer l'expression explicite de $F(t) = f(1, e^t - 1)$, le domaine de dérivabilité de cette fonction et l'expression explicite de sa dérivée en tout point de son domaine.

Solution. L'expression explicite de $F(t)$ est donnée par

$$F(t) = \ln((e^t - 1)^2 - 1) = \ln(e^{2t} - 2e^t) = \ln(e^t(e^t - 2)) = t + \ln(e^t - 2).$$

La fonction F est dérivable sur $\{t \in \mathbb{R} : e^t - 2 > 0\} = \{t \in \mathbb{R} : t > \ln(2)\} =]\ln(2), +\infty[$ et sa dérivée en tout point de cet ensemble est donnée par

$$DF(t) = 1 + \frac{e^t}{e^t - 2} = \frac{2(e^t - 1)}{e^t - 2}.$$

- Si elle existe, que vaut la dérivée de F en $t = 0$? Simplifier votre réponse au maximum.

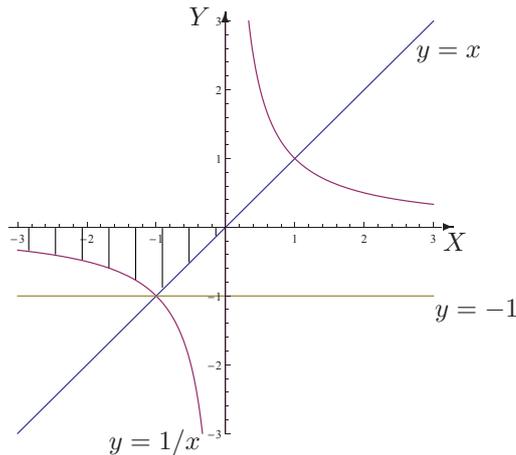
Solution. Comme F est dérivable sur $]\ln(2), +\infty[$ et que $\ln(x) > 0$ si $x > 1$, la fonction F n'est pas dérivable en 0.

b) Soit f une fonction intégrable sur la partie A du plan telle que

$$\iint_A f(x, y) \, dx dy = \int_{-1}^0 \left(\int_{\frac{1}{y}}^y f(x, y) \, dx \right) dy.$$

- Représenter l'ensemble d'intégration A dans un repère orthonormé en le hachurant.

Solution. L'ensemble d'intégration est l'ensemble $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1, 0[, x \in [\frac{1}{y}, y]\}$; en voici la représentation graphique (partie hachurée); les points des "bords" sont compris dans l'ensemble excepté ceux de l'axe des abscisses.



- **Permuter l'ordre d'intégration.**

Solution. Comme

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in]-\infty, -1], y \in [1/x, 0[\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 0], y \in [x, 0[\}$$

si on permute l'ordre d'intégration, on a la succession d'intégrales

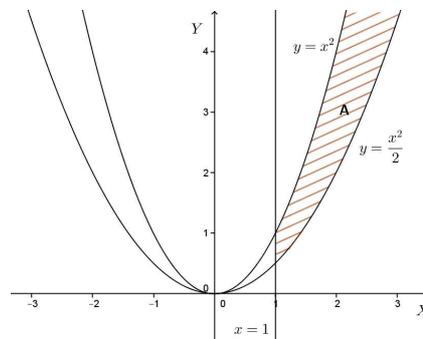
$$\int_{-\infty}^{-1} \left(\int_{1/x}^0 f(x, y) dy \right) dx + \int_{-1}^0 \left(\int_x^0 f(x, y) dy \right) dx.$$

- **Trouve-t-on la même valeur quel que soit l'ordre d'intégration ? Pourquoi ?**

Solution. On trouve la même valeur pour l'intégrale quel que soit l'ordre d'intégration car la fonction est intégrable.

4. **On donne l'ensemble hachuré A ci-contre. Si elle existe, déterminer la valeur de l'intégrale**

$$\iint_A \frac{y}{x^2(y^2 + x^4)} dx dy.$$



Solution. La fonction $f : (x, y) \mapsto \frac{y}{x^2(y^2 + x^4)}$ est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$; elle est donc continue sur $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [1, +\infty[, y \in [\frac{x^2}{2}, x^2]\}$, ensemble fermé non borné.

Etudions l'intégrabilité de f sur A sachant que $|f(x, y)| = f(x, y) \forall (x, y) \in A$.

Pour x fixé dans $[1, +\infty[$, la fonction $g : y \mapsto \frac{y}{x^2(y^2 + x^4)}$ est continue sur le fermé borné $[\frac{x^2}{2}, x^2]$. Elle est donc intégrable sur cet ensemble et on a

$$\int_{x^2/2}^{x^2} \frac{y}{x^2(y^2 + x^4)} dy = \frac{1}{2x^2} \cdot \left[\ln(y^2 + x^4) \right]_{x^2/2}^{x^2} = \frac{1}{2x^2} \left(\ln(2x^4) - \ln\left(\frac{5x^4}{4}\right) \right) = \frac{1}{2x^2} \ln\left(\frac{8}{5}\right).$$

La fonction $h : x \mapsto \ln\left(\frac{8}{5}\right) \frac{1}{2x^2}$ est continue et positive sur \mathbb{R}_0 donc sur $[1, +\infty[$ non borné. Etudions son intégrabilité en $+\infty$. Comme h est continu sur $[1, t] \forall t > 1$, on a

$$\int_1^t \ln\left(\frac{8}{5}\right) \frac{1}{2x^2} dx = -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{8}{5}\right) \left[\frac{1}{x} \right]_1^t = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{8}{5}\right) \left(1 - \frac{1}{t}\right).$$

Dès lors, comme $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} = 0$, on a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \ln\left(\frac{8}{5}\right) \frac{1}{2x^2} dx = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{8}{5}\right).$$

Vu que cette limite est finie, h est intégrable en $+\infty$ donc sur $[1, +\infty[$.

Ainsi, f est intégrable sur A et comme cette fonction est positive sur A , on obtient

$$\iint_A \frac{y}{x^2(y^2 + x^4)} dx dy = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{8}{5}\right).$$