1, 2, 3... Sciences

Année académique 2014-2015

Questionnaire et Corrigé
Examen de math B du 1er juin 2015
chimistes, géographes, informaticiens et physiciens

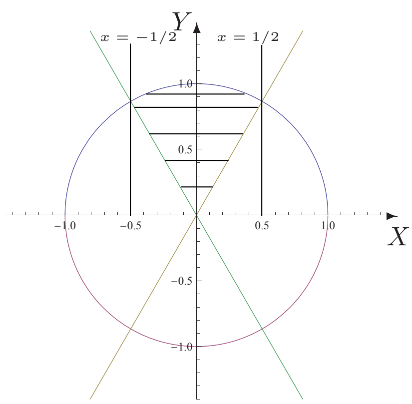
Version 18 mai 2015

QUESTIONNAIRE

1. On donne la fonction f par $f(x) = \cos^2(x)$.
   a) Si possible, déterminer les approximations polynomiales de cette fonction à l'ordre 1 et 2 en 0.
   b) Dans un même repère orthonormé, représenter au voisinage de 0 le graphique de f et des approximations demandées en utilisant différentes couleurs.

2. a) Soient les matrices A, B et X données par
$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
   - Si c'est possible, déterminer la matrice inverse de B.
   - La matrice B est-elle diagonalisable ? Pourquoi ? Si oui, en déterminer une forme diagonale, ainsi qu'une matrice qui y conduit.
   - Quelle est la forme générale des matrices qui commutent avec B ? Justifier.
   - Montrer **directement** que X est un vecteur propre de A de valeur propre λ_0 et donner la valeur de λ_0.
   b) Pour inciter les jeunes à faire du sport, une association oblige ses affiliés à pratiquer, chaque semaine, un sport sur les trois qu'elle propose (jogging, natation, basket). D'une semaine à l'autre, les étudiants peuvent changer de choix.
   - Ayant choisi le jogging, un étudiant a une chance sur deux d'aller à la piscine et une chance sur deux de pratiquer le basket la semaine suivante.
   - S'il a nagé une semaine, la semaine suivante, il a une chance sur trois de poursuivre la même activité, une chance sur trois de faire du jogging et une chance sur trois de pratiquer le basket.
   - Enfin, s'il a joué au basket, il a une chance sur quatre de nager et trois chances sur quatre de faire du jogging.
   (i) Déterminer la matrice de transition.
   (ii) Sachant que cette matrice est régulière, calculer la probabilité qu'à long terme un étudiant fasse du jogging.
3. a) On donne la fonction f par
$$f(x, y) = \ln\left(y^2 - x\right).$$
   - Déterminer le domaine d'infinie dérivabilité de cette fonction. Dans un repère orthonormé, représenter ce domaine en le hachurant.
   - Déterminer l'expression explicite de $F(t) = f(1, e^t - 1)$, le domaine de dérivabilité de cette fonction et l'expression explicite de sa dérivée en tout point de son domaine.
   - Si elle existe, que vaut la dérivée de F en $t = 0$? Simplifier votre réponse au maximum.

   b) On donne l'ensemble fermé borné hachuré A suivant. Déterminer $\displaystyle\iint_A y\, e^x \, dx\, dy$.



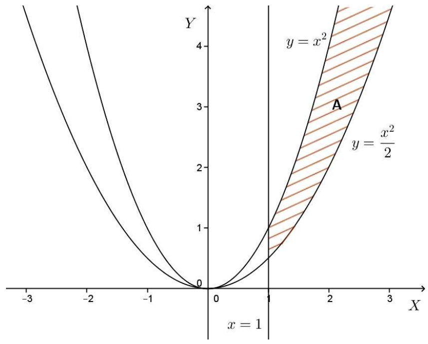
c) Soit f une fonction intégrable sur la partie A du plan telle que

$$\iint_A f(x,y)\ dxdy \ = \ \int_{-1}^{0} \left(\int_{\frac{1}{y}}^{y} f(x,y)\ dx \right)\ dy.$$

- Représenter l'ensemble d'intégration A dans un repère orthonormé en le hachurant.
- Permuter l'ordre d'intégration.
- Trouve-t-on la même valeur quel que soit l'ordre d'intégration ? Pourquoi ?

4. On donne l'ensemble hachuré A ci-contre. Si elle existe, déterminer la valeur de l'intégrale

$$\iint_A \frac{y}{x^2(y^2+x^4)}\ dx\ dy.$$



5. Déterminer si les séries suivantes convergent. Si oui, en déterminer la somme

$$(i)\ \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{-\sqrt[3]{e}} \right)^m, \qquad (ii)\ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^k}{k^2}\ , \qquad (iii)\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\tan(\frac{\pi}{6}))^n}{n!}.$$

CORRIGÉ

Exercices

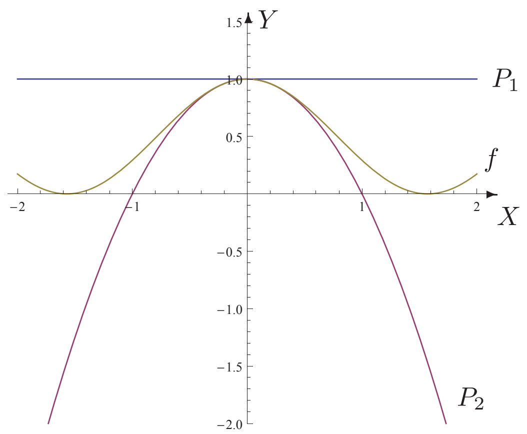
1. **On donne la fonction f par $f(x) = \cos^2(x)$.**
a) Si possible, déterminer les approximations polynomiales de cette fonction à l'ordre 1 et 2 en 0.
b) Dans un même repère orthonormé, représenter au voisinage de 0 le graphique de f et des approximations demandées en utilisant différentes couleurs. .

Solution. La fonction est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$Df(x) = 2\cos(x)(-\sin(x)) = -\sin(2x), \quad D^2f(x) = -2\cos(2x).$$

Comme $f(0) = 1$, $Df(0) = 0$ et $D^2f(0) = -2$, si on note $P_n(x)$ l'approximation polynomiale de f à l'ordre n en 0, on a

$$P_1(x) = f(0) + Df(0)x = 1, \quad P_2(x) = P_1(x) + \frac{D^2f(0)}{2!}x^2 = 1 - x^2, \ x \in \mathbb{R}.$$



2. **a) Soient les matrices A, B et X données par**

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- Si c'est possible, déterminer la matrice inverse de B.

Solution. La matrice B est inversible si et seulement si $\det B \neq 0$. Comme $\det B = -4$, la matrice B est donc inversible.

La matrice des cofacteurs de B étant égale à

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix},$$

l'inverse de B est la matrice

$$B^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- La matrice B est-elle diagonalisable ? Pourquoi ? Si oui, en déterminer une forme diagonale, ainsi qu'une matrice qui y conduit.

Solution. Les valeurs propres de B sont les zéros du polynôme $\begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4$. La matrice B possède donc deux valeurs propres simples, -2 et 2 ; elle est donc diagonalisable.

Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre -2 sont les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que

$$(B+2I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x+y=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre -2 sont donc des vecteurs du type

$$c\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

où c est une constante complexe non nulle.

Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 2 sont les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que

$$(B-2I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x-y=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 2 sont donc des vecteurs du type

$$c'\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

où c' est une constante complexe non nulle.

Dès lors, la matrice inversible $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ est telle que $S^{-1}BS = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

- Quelle est la forme générale des matrices qui commutent avec B ? Justifier.

Solution. Comme B est une matrice de dimension 2, toute matrice qui commute avec B est aussi de dimension 2.
Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $a,\ b,\ c$ et $d \in \mathbb{C}$. On a

$$BM = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c & 2d \\ 2a & 2b \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad MB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b & 2a \\ 2d & 2c \end{pmatrix}.$$

Dès lors, $BM = MB \Leftrightarrow b = c$ et $a = d$ et on a $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec a et $b \in \mathbb{C}$.

- Montrer $\boxed{\text{directement}}$ que X est un vecteur propre de A de valeur propre λ_0 et donner la valeur de λ_0.

Solution. Par définition, X est un vecteur propre de A de valeur propre λ_0 si $AX = \lambda_0 X$. Comme

$$AX = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = (-2)\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

X est bien un vecteur propre de A de valeur propre -2.

b) Pour inciter les jeunes à faire du sport, une association oblige ses affiliés à pratiquer, chaque semaine, un sport sur les trois qu'elle propose (jogging, natation, basket). D'une semaine à l'autre, les étudiants peuvent changer de choix.
- Ayant choisi le jogging, un étudiant a une chance sur deux d'aller à la piscine et une chance sur deux de pratiquer le basket la semaine suivante.
- S'il a nagé une semaine, la semaine suivante, il a une chance sur trois de poursuivre la même activité, une chance sur trois de faire du jogging et une chance sur trois de pratiquer le basket.
- Enfin, s'il a joué au basket, il a une chance sur quatre de nager et trois chances sur quatre de faire du jogging.
(i) Déterminer la matrice de transition.

Solution. Soient B_0, J_0 et N_0 respectivement le type de sport (basket, jogging, natation) choisi pour une semaine fixée au départ et B_1, J_1 et N_1 respectivement le type de sport choisi la semaine suivante. On a donc

$$\begin{pmatrix} B_1 \\ J_1 \\ N_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/3 \\ 3/4 & 0 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_0 \\ J_0 \\ N_0 \end{pmatrix}$$

et la matrice de tansition T est

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/3 \\ 3/4 & 0 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

(ii) Sachant que cette matrice est régulière, calculer la probabilité qu'à long terme un étudiant fasse du jogging.

Solution. Puisque T est une matrice régulière, la situation à long terme est donnée par le vecteur propre de probabilité de valeur propre 1. Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 1 sont les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que

$$(T - I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1/2 & 1/3 \\ 3/4 & -1 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & -2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -6x + 3y + 2z = 0 \\ 9x - 12y + 4z = 0 \\ 3x + 6y - 8z = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 9x - 12y = -4z \\ 3x + 6y = 8z \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 9x - 12y = -4z \\ 6x + 12y = 16z \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{4z}{5} \\ y = \frac{14z}{15} \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5}z \\ \frac{14}{15}z \\ z \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 1 sont donc des vecteurs du type

$$c \begin{pmatrix} 12 \\ 14 \\ 15 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad c \in \mathbb{C}_0.$$

Comme $c(12 + 14 + 15) = 1 \Leftrightarrow c = \frac{1}{41}$, le vecteur de probabilité est

$$\begin{pmatrix} \frac{12}{41} \\ \frac{14}{41} \\ \frac{15}{41} \end{pmatrix}$$

et la probabilité qu'un étudiant fasse du jogging à long terme est de 14/41.

3. **a) On donne la fonction f par**

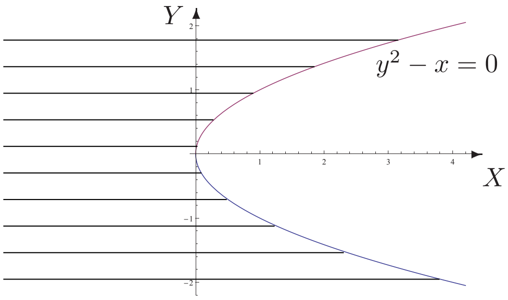
$$f(x,y) = \ln(y^2 - x).$$

- Déterminer le domaine d'infinie dérivabilité de cette fonction. Dans un repère orthonormé, représenter ce domaine en le hachurant.

Solution. Le domaine d'infinie dérivabilité de la fonction f est égal à

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - x > 0\right\}.$$

Voici la représentation graphique de cet ensemble (partie hachurée) : les points de la parabole d'équation cartésienne $y^2 - x = 0$ sont exclus de l'ensemble.



- Déterminer l'expression explicite de $F(t) = f(1, e^t - 1)$, le domaine de dérivabilité de cette fonction et l'expression explicite de sa dérivée en tout point de son domaine.

Solution. L'expression explicite de $F(t)$ est donnée par

$$F(t) = \ln((e^t - 1)^2 - 1) = \ln(e^{2t} - 2e^t) = \ln(e^t(e^t - 2)) = t + \ln(e^t - 2).$$

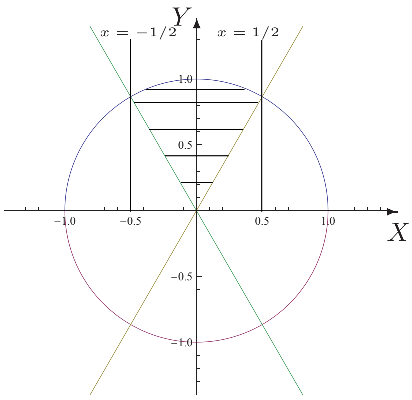
La fonction F est dérivable sur $\{t \in \mathbb{R} : e^t - 2 > 0\} = \{t \in \mathbb{R} : t > \ln(2)\} =]\ln(2), +\infty[$ et sa dérivée en tout point de cet ensemble est donnée par

$$DF(t) = 1 + \frac{e^t}{e^t - 2} = \frac{2(e^t - 1)}{e^t - 2}.$$

- Si elle existe, que vaut la dérivée de F en $t = 0$? Simplifier votre réponse au maximum.

Solution. Comme F est dérivable sur $]\ln(2), +\infty[$ et que $\ln(x) > 0$ si $x > 1$, la fonction F n'est pas dérivable en 0.

b) On donne l'ensemble fermé borné hachuré A suivant. Déterminer $\displaystyle\iint_A y\, e^x \, dx \, dy.$



Solution. La fonction $f : (x, y) \mapsto y\, e^x$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ donc sur A, ensemble borné fermé. Dès lors, la fonction est intégrable sur A.
Utilisons les coordonnées polaires pour calculer l'intégrale demandée. Le point d'intersection du cercle trigonométrique avec la droite d'équation cartésienne $x = \frac{1}{2}$ a pour abscisse $\cos(\theta) = \frac{1}{2}$ où $\theta = \frac{\pi}{3}$ puisque θ varie dans $[0, 2\pi[$. De même, le point d'intersection du cercle avec la droite d'équation cartésienne $x = -\frac{1}{2}$ a pour abscisse $\cos(\theta) = -\frac{1}{2}$ où $\theta = \frac{2\pi}{3}$ puisque θ varie dans $[0, 2\pi[$.
Ainsi, l'ensemble d'intégration décrit en coordonnées polaires est

$$B = \left\{ (r, \theta) : r \in]0, 1],\ \theta \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right] \right\}.$$

La fonction à intégrer est la fonction $g : (r, \theta) \mapsto f(r\cos(\theta),\ r\sin(\theta)) =\ r\sin(\theta)e^{r\cos(\theta)}$ multipliée par le jacobien égal à r. Par application du théorème d'intégration par changement de variables, l'intégrale demandée est donc égale à

$$\int_0^1 \left(\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} r^2 \sin(\theta) e^{r\cos(\theta)}\ d\theta \right)\ dr = \int_0^1 -r \left[e^{r\cos(\theta)} \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\ dr = \int_0^1 r \left(e^{\frac{r}{2}} - e^{\frac{-r}{2}} \right)\ dr$$

$$= \left[2r \left(e^{\frac{r}{2}} + e^{\frac{-r}{2}} \right) \right]_0^1 - 2 \int_0^1 \left(e^{\frac{r}{2}} + e^{\frac{-r}{2}} \right)\ dr = 2 \left(e^{\frac{1}{2}} + e^{\frac{-1}{2}} \right) - 4 \left[e^{\frac{r}{2}} - e^{\frac{-r}{2}} \right]_0^1$$

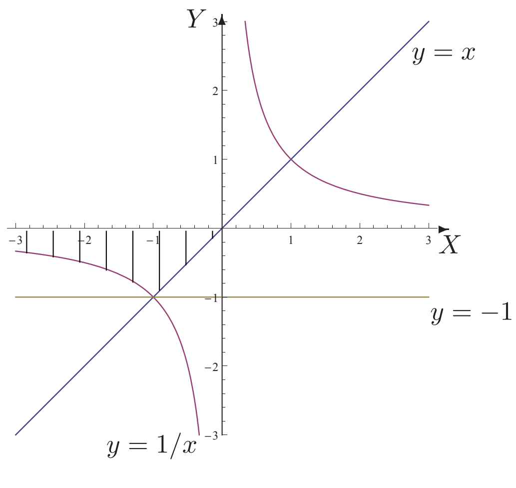
$$= 2 \left(e^{\frac{1}{2}} + e^{\frac{-1}{2}} \right) - 4 \left(e^{\frac{1}{2}} - e^{\frac{-1}{2}} \right) = -2\sqrt{e} + \frac{6}{\sqrt{e}}.$$

c) Soit f une fonction intégrable sur la partie A du plan telle que

$$\iint_A f(x, y)\ dxdy \ = \ \int_{-1}^0 \left(\int_{\frac{1}{y}}^{y} f(x, y)\ dx \right)\ dy.$$

- Représenter l'ensemble d'intégration A dans un repère orthonormé en le hachurant.

Solution. L'ensemble d'intégration est l'ensemble $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1, 0[,\ x \in [\frac{1}{y}, y]\}$; en voici la représentation graphique (partie hachurée) ; les points des "bords" sont compris dans l'ensemble excepté ceux de l'axe des abscisses.



- Permuter l'ordre d'intégration.

Solution. Comme

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in]-\infty, -1], y \in [1/x, 0[\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 0], y \in [x, 0[\}$$

si on permute l'ordre d'intégration, on a la succession d'intégrales

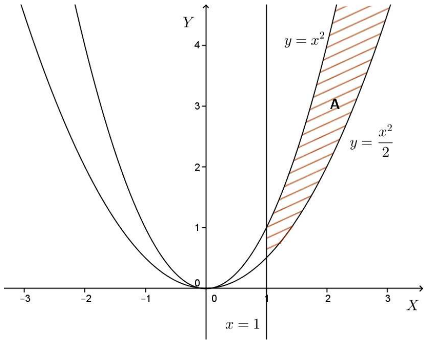
$$\int_{-\infty}^{-1} \left(\int_{1/x}^{0} f(x,y)\ dy \right)\ dx + \int_{-1}^{0} \left(\int_{x}^{0} f(x,y)\ dy \right)\ dx.$$

- Trouve-t-on la même valeur quel que soit l'ordre d'intégration ? Pourquoi ?

Solution. On trouve la même valeur pour l'intégrale quel que soit l'ordre d'intégration car la fonction est intégrable.

4. **On donne l'ensemble hachuré A ci-contre. Si elle existe, déterminer la valeur de l'intégrale**

$$\iint_A \frac{y}{x^2(y^2+x^4)}\ dx\ dy.$$



Solution. La fonction $f : (x,y) \mapsto \dfrac{y}{x^2(y^2+x^4)}$ est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$; elle est donc continue sur $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [1,+\infty[,\ y \in [\frac{x^2}{2}, x^2]\}$, ensemble fermé non borné.

Etudions l'intégrabilité de f sur A sachant que $|f(x,y)| = f(x,y)\ \forall (x,y) \in A$.
Pour x fixé dans $[1,+\infty[$, la fonction $g : y \mapsto \dfrac{y}{x^2(y^2+x^4)}$ est continue sur le fermé borné $[\frac{x^2}{2}, x^2]$. Elle est donc intégrable sur cet ensemble et on a

$$\int_{x^2/2}^{x^2} \frac{y}{x^2(y^2+x^4)}\ dy = \frac{1}{2x^2}\ .\ \Big[\ln(y^2+x^4)\Big]_{x^2/2}^{x^2} = \frac{1}{2x^2}\left(\ln(2x^4) - \ln\left(\frac{5x^4}{4}\right)\right) = \frac{1}{2x^2}\ln\left(\frac{8}{5}\right).$$

La fonction $h : x \mapsto \ln\left(\dfrac{8}{5}\right)\ \dfrac{1}{2x^2}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_0$ donc sur $[1,+\infty[$ non borné. Etudions son intégrabilité en $+\infty$. Comme h est continu sur $[1,t]\ \forall t > 1$, on a

$$\int_1^t \ln\left(\frac{8}{5}\right)\ \frac{1}{2x^2}\ dx = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{8}{5}\right)\left[\frac{1}{x}\right]_1^t = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{8}{5}\right)\left(1 - \frac{1}{t}\right).$$

Dès lors, comme $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} = 0$, on a

$$\lim_{t\to+\infty} \int_1^t \ln\left(\frac{8}{5}\right)\ \frac{1}{2x^2}\ dx = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{8}{5}\right).$$

Vu que cette limite est finie, h est intégrable en $+\infty$ donc sur $[1,+\infty[$.

Ainsi, f est intégrable sur A et comme cette fonction est positive sur A, on obtient

$$\iint_A \frac{y}{x^2(y^2+x^4)}\ dx\ dy = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{8}{5}\right).$$

5. **Déterminer si les séries suivantes convergent. Si oui, en déterminer la somme**

$$(i)\ \sum_{m=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{-\sqrt[3]{e}}\right)^m, \qquad (ii)\ \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{e^k}{k^2}\ , \qquad (iii)\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\tan(\frac{\pi}{6}))^n}{n!}.$$

Solution. (i) Cette série est une série géométrique de raison $\frac{1}{-\sqrt[3]{e}} \in]-1,1[$ donc convergente ; sa somme vaut

$$\frac{1}{-\sqrt[3]{e}}\,\frac{1}{1-\left(\frac{1}{-\sqrt[3]{e}}\right)} = -\frac{1}{\sqrt[3]{e}+1}.$$

(ii) Comme le terme général de cette série ne tend pas vers 0 puisque $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{e^k}{k^2} = +\infty$, l'exponentielle dominant toute puissance antagoniste à l'infini, la série est divergente.

(iii) Cette série est convergente car c'est la valeur de la fonction exponentielle en $\tan\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. La somme de cette série vaut donc $\exp\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$.