Université de Liège

1, 2, 3... Sciences

Année académique 2014-2015

Mathématiques générales (partim B)

Corrigé de l'interrogation de math du 20 avril 2015

Version 28 avril 2015

Questions de théorie

1. **Soit f une fonction définie sur l'ensemble $A =]-1,+\infty[\times]0,1[$.**
a) Que signifie *"la fonction f est continûment dérivable dans A"* ?

Solution. Voir cours p. 14 définition 1.3.2. (version 2011-2012)

b) Soit $g : t \mapsto f\left(t^2-2, \ln(3t-1)\right)$ et f continûment dérivable dans A.
Enoncer le théorème de dérivabilité d'une fonction composée dans le cas de la fonction g en déterminant son domaine de dérivabilité ainsi que sa dérivée en fonction des dérivées partielles de f.

Solution. Les fonctions $f_1 : t \mapsto t^2-2$ et $f_2 : t \mapsto \ln(3t-1)$ sont respectivement dérivables dans $\mathbb{R}$ et $\left]\frac{1}{3},+\infty\right[$. La fonction g, composée de f ($f \in C_1(A)$) et de f_1 et f_2, est donc dérivable dans

$$\begin{aligned}
I = \left\{t \in \left]\frac{1}{3},+\infty\right[: \Big(f_1(t), f_2(t)\Big) \in A\right\} &= \left\{t \in \left]\frac{1}{3},+\infty\right[: t^2-2 > -1, 0 < \ln(3t-1) < 1\right\} \\
&= \left\{t \in \left]\frac{1}{3},+\infty\right[: (t < -1 \text{ ou } t > 1),\ 1 < 3t-1 < e\right\} \\
&= \left\{t \in \left]\frac{1}{3},+\infty\right[: (t < -1 \text{ ou } t > 1),\ \frac{2}{3} < t < \frac{e+1}{3}\right\} \\
&= \left]1, \frac{e+1}{3}\right[.
\end{aligned}$$

et on a

$$\begin{aligned}
(Dg)(t) &= (D_u f)_{(t^2-2,\ln(3t-1))} \cdot D(t^2-2) + (D_v f)_{(t^2-2,\ln(3t-1))} \cdot D\ln(3t-1) \\
&= 2t\,(D_u f)_{(t^2-2,\ln(3t-1))} + \frac{3}{3t-1}\,(D_v f)_{(t^2-2,\ln(3t-1))}
\end{aligned}$$

si u et v sont respectivement la première et la deuxième variable de f quel que soit $t \in I$.

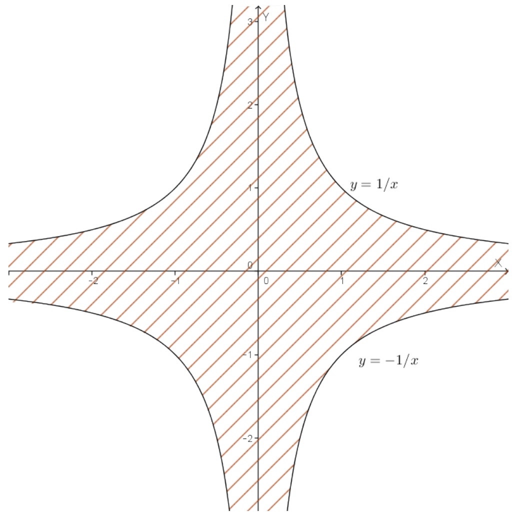
2. **Soit A une matrice carrée.**
a) Qu'appelle-t-on matrice inverse de A ?
b) Enoncer une condition nécessaire pour qu'une matrice carrée soit inversible. Démontrer que la condition énoncée est bien nécessaire.

Solution. Voir cours p. 50 respectivement définition 2.4.1 et propriété 2.4.2. (version 2011-2012)

Exercices

1. **On donne explicitement la fonction f par $f(x,y) = \arcsin(xy)$.**
Déterminer le domaine où la fonction est deux fois dérivable, le représenter en le hachurant dans un repère orthonormé. Dans celui-ci, simplifier au maximum l'expression $D_x D_y f(x,y)$.

Solution. La fonction f est deux fois dérivable sur l'ensemble $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ -1 < xy < 1\right\}$.
Sa représentation graphique dans un repère orthonormé est l'ensemble hachuré suivant, bords exclus.



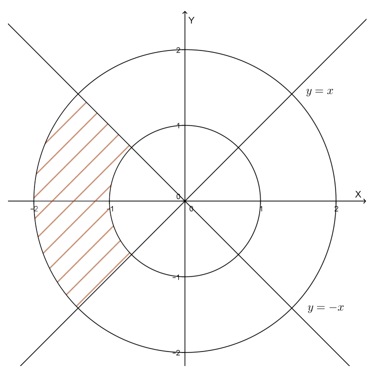
Dans A, on a

$$D_x D_y f(x,y) = D_x \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}} \right) = \frac{\sqrt{1-x^2y^2} - \frac{-2x^2y^2}{2\sqrt{1-x^2y^2}}}{1-x^2y^2}$$

$$= \frac{1-x^2y^2+x^2y^2}{(1-x^2y^2)\sqrt{1-x^2y^2}} = \frac{1}{(1-x^2y^2)\sqrt{1-x^2y^2}} \ .$$

2. **Déterminer, si possible, la valeur de l'intégrale** $\displaystyle\iint_A x \ dx \ dy$ **avec** $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 \leq x^2+y^2 \leq 4, \ x \leq 0, \ x \leq y \leq -x\right\}$ **et représenter** A **dans un repère orthonormé en le hachurant.**

Solution. La représentation graphique de A est l'ensemble hachuré suivant, bords compris.



La fonction $f : (x,y) \mapsto x$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ donc sur A, ensemble fermé borné ; dès lors, elle est intégrable sur A.
En passant aux coordonnées polaires, l'ensemble d'intégration A', en bijection avec l'ensemble A, est $A' = \{(r,\theta) : r \in [1,2], \theta \in [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]\}$. Dès lors, on doit calculer

$$I = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \left(\int_1^2 r^2 \cos(\theta) \ dr \right) \ d\theta.$$

Comme on a

$$I_1 = \int_1^2 r^2 \ dr = \left[\frac{r^3}{3} \right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3},$$

l'intégrale vaut

$$I = \frac{7}{3}\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \cos(\theta)\ d\theta = \frac{7}{3}\Big[\sin(\theta)\Big]_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} = \frac{7}{3}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{-7\sqrt{2}}{3}.$$

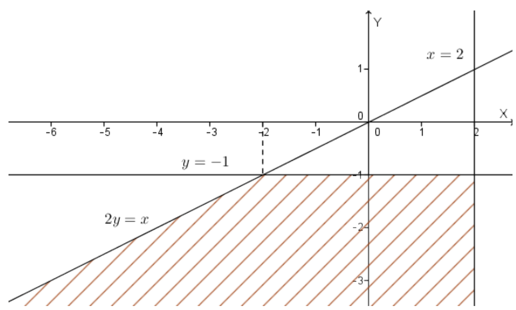
3. **Soit f une fonction intégrable sur la partie fermée A du plan telle que**

$$\iint_A f(x,y)\ dxdy \ = \ \int_{-\infty}^{-1}\left(\int_{2y}^{2} f(x,y)\ dx\right)\ dy.$$

a) Représenter l'ensemble d'intégration A dans un repère orthonormé en le hachurant.
Solution. On a

$$A = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ y\leq -1\ ,\ 2y\leq x\leq 2\right\}.$$

Sa représentation graphique est la suivante



b) Permuter l'ordre d'intégration.
Solution. L'ensemble A peut aussi s'écrire sous la forme

$$A = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x\leq -2\ ,\ y\leq \frac{x}{2}\right\}\cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ -2\leq x\leq 2\ ,\ y\leq -1\right\}.$$

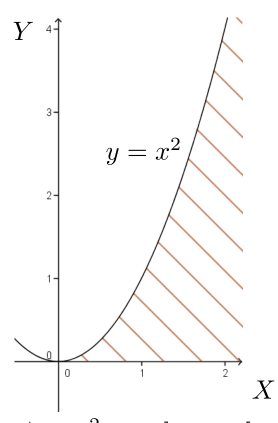
Puisque la fonction f est intégrable sur A, en permutant les intégrales on obtient

$$\iint_A f(x,y)\ dxdy = \int_{-\infty}^{-2}\left(\int_{-\infty}^{\frac{x}{2}} f(x,y)\ dy\right)dx + \int_{-2}^{2}\left(\int_{-\infty}^{-1} f(x,y)\ dy\right)dx.$$

4. **Calculer, si possible l'intégrale suivante**

$$\iint_A \frac{xe^{-x^2}}{x^2+y}dxdy,$$

où A est l'ensemble hachuré ci-contre.



Solution. L'ensemble d'intégration est l'ensemble $A = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in]0,+\infty[\text{ et } y\in[0,x^2]\right\}$.

Etudions l'intégrabilité de $f:(x,y)\mapsto \dfrac{xe^{-x^2}}{x^2+y}$ sur A sachant que $|f(x,y)| = f(x,y),\ \forall (x,y)\in A$ et que f est continu sur $B = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y\neq 0\right\}$.

Pour x fixé dans $]0,+\infty[$, la fonction $h : y \mapsto \dfrac{xe^{-x^2}}{x^2+y}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur le fermé borné $[0,x^2]$. Elle est donc intégrable sur cet ensemble et on a

$$\int_0^{x^2} \frac{xe^{-x^2}}{x^2+y}\,dy = xe^{-x^2}\int_0^{x^2} \frac{1}{x^2+y}\,dy = xe^{-x^2}\ \Big[\ln\left(x^2+y\right)\Big]_0^{x^2}$$

$$= xe^{-x^2}\left(\ln(2x^2)-\ln(x^2)\right) = xe^{-x^2}\ \ln\left(\frac{2x^2}{x^2}\right) = \ln(2)\ xe^{-x^2}.$$

La fonction $g : x \mapsto \ln(2)\,xe^{-x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0,+\infty[$. Vérifions l'intégrabilité de g en $+\infty$. Par le critère en θ , avec $\theta = 3$, on a

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^3\ \ln(2)\ xe^{-x^2}\right) = \ln(2)\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2)^2}{e^{x^2}} = \ln(2)\lim_{t\to+\infty}\frac{t^2}{e^t} = 0,$$

puisque, à l'infini, l'exponentielle l'emporte sur toute puissance antagoniste. Comme cette limite existe et est finie avec $\theta > 1$, la fonction est intégrable en $+\infty$. Dès lors, elle est intégrable sur $[0,+\infty[$.

Ainsi, f est intégrable sur A et comme f est une fonction positive sur A, on obtient

$$\iint_A \frac{xe^{-x^2}}{x^2+y}dxdy = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{x^2}\frac{xe^{-x^2}}{x^2+y}\,dy\right)dx = \int_0^{+\infty}\left(\ln(2)\ xe^{-x^2}\right)dx$$

$$= \frac{\ln(2)}{-2}\left[e^{-x^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{-\ln(2)}{2}\left(\lim_{x\to+\infty}\left(e^{-x^2}\right)-e^0\right) = \frac{\ln(2)}{2}.$$

5. **Soit la matrice** $A = \begin{pmatrix} -i & 1+i \\ 1-i & i \end{pmatrix}$**.**

a) Cette matrice est-elle diagonalisable ? Justifier.
b) Si oui, en déterminer une forme diagonale ainsi qu'une matrice inversible qui y conduit.

Solution. a) Le polynôme caractéristique est

$$P(\lambda) = \det\begin{pmatrix} -i-\lambda & 1+i \\ 1-i & i-\lambda \end{pmatrix} = -(i-\lambda)(i+\lambda)-(1-i)(1+i) = -(i^2-\lambda^2)-2 = \lambda^2-1.$$

Les valeurs propres sont donc 1 et -1. Puisqu'elles sont simples, la matrice est diagonalisable.

b) Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre -1 sont les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que

$$(A+\ I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -i+1 & 1+i \\ 1-i & i+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (1-i)x+(1+i)y = 0 \\ (1-i)x+(1+i)y = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow y = \frac{-(1-i)}{1+i}x \Leftrightarrow y = ix.$$

Dès lors, les vecteurs propres relatifs à la valeur propre -1 sont les vecteurs $c_1\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$, $c_1 \in \mathbb{C}_0$.

Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 1 sont les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que

$$(A-\ I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -i-1 & 1+i \\ 1-i & i-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -(1+i)x + (1+i)y = 0 \\ (1-i)x - (1-i)y = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow y = x.$$

Dès lors, les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 1 sont les vecteurs $c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c_2 \in \mathbb{C}_0$.

Ainsi, par exemple, la matrice inversible

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix} \quad \text{est telle que} \quad S^{-1}AS = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$