1, 2, 3...Sciences

Année académique 2014-2015

Exercices de mathématiques
Exercices de révision en vue de l'interrogation du 27/10/2014

Version 5 octobre 2014

Problèmes élémentaires

1. Quand l'eau se transforme en glace, son volume augmente de 1/15. Quelle quantité d'eau, exprimée en litres, faut-il pour obtenir 3,36 m^3 de glace ?
2. Lors d'une interrogation, un étudiant doit répondre à 100 questions d'un QCM. Pour toute réponse correcte, il obtient un point. S'il ne répond pas, il a 0 point et pour toute réponse incorrecte, on lui retire $0,25$ point. Sachant qu'il ne répond pas à 13 questions et qu'il obtient 45,75 comme cote finale, quel est le nombre de réponses correctes fournies ?
3. Un tonneau rempli aux trois cinquièmes d'eau pèse 125 kg. Rempli aux trois quarts d'eau, il pèse 137 kg. Quelle est la capacité en hectolitres de ce tonneau ?

Manipulations de réels

Résoudre les équations et inéquations suivantes (x est une inconnue réelle)

1. $|4x^2 - 1| = |3x|$
2. $x^2 - 9 \geq 3x\,|x-3|$
3. $x \geq 27x^4$
4. $|x-3| \geq |x+3|$
5. $(3-x)^2 \leq x - 3$
6. $x|x^2-9| \leq 4|x-3|$
7. $\dfrac{|3-x|}{x^2-9} \geq |x-3|$
8. $|x^2-9| \geq 5$
9. $\dfrac{1}{|2x+5|} > 3$

Calcul vectoriel et droites

1. Dans un repère orthonormé, on donne les droites d_1, d_2 et d_3 dont les équations cartésiennes sont
$$d_1 : 2x - y + 3 = 0 \qquad d_2 : 5x + 2y - 12 = 0 \qquad d_3 : x + 4y - 24 = 0.$$
   (a) Représenter ces 3 droites.
   (b) Les droites d_1 et d_2 se coupent au point A. Déterminer l'équation cartésienne de la droite d passant par A et orthogonale à d_3.
   (c) Donner des équations paramétriques de d_3.
   (d) Déterminer les coordonnées du point B d'intersection de la droite d_2 avec l'axe des abscisses.
   (e) Le point C de coordonnées $(4,5)$ appartient-il à d_1 ? à d_2 ? à d_3 ?
   (f) Déterminer le produit scalaire $\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{BC}$.
   (g) Déterminer les composantes de la projection orthogonale de $\overrightarrow{AB}$ sur d_1.
2. Dans un repère orthonormé, on donne les points A, B et C dont les coordonnées cartésiennes sont respectivement
$$(-1,1,0) \qquad (2,-1,3) \qquad (0,-4,2).$$
   Déterminer les composantes du produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge 2\overrightarrow{BC}$

Trigonométrie

1. Si α désigne un réel de l'intervalle $\left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$ et si $\mathrm{tg}(\alpha) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, que valent les nombres $\mathrm{cotg}(\alpha),\ \sin(\alpha),\ \cos(\alpha)$?
2. Simplifier $\dfrac{\cos(\frac{4\pi}{3})}{\sin^2(\frac{7\pi}{3})}$.
3. Résoudre dans $[\pi, 2\pi]$ (x est une inconnue réelle)
   (a) $\sin(2x)\cos(2x) = -1$
   (b) $4\sin(2x)\cos(2x) = -1$
   (c) $\sin(2x) = \sin(6x)$
   (d) $4\cos^2(2x) = 3$
   (e) $2\cos^2(2x) = \sin^2(4x)$
   (f) $\sin(x)\sin(2x) = \cos(2x)\cos(x) + \frac{1}{2}$

Coniques et représentations d'ensembles

1. On se place dans un repère orthonormé. Représenter le graphique des coniques suivantes, données par leur équation cartésienne. Comment s'appellent ces coniques ? Quelles sont les coordonnées de leur(s) foyer(s) ? Quelle est leur excentricité ?

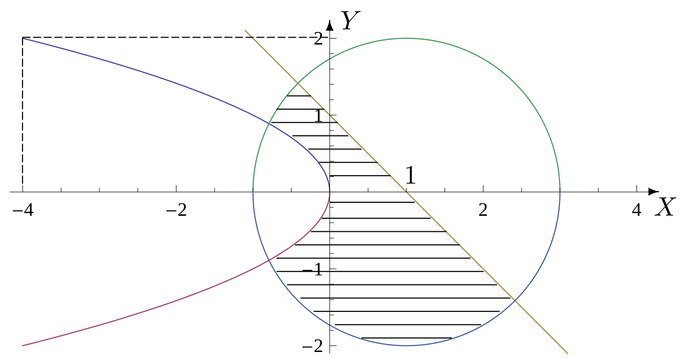
$$x^2 - 1 = 4y^2 \qquad\qquad x^2 + 3y^2 = 12.$$

2. Représenter dans un repère orthonormé en les hachurant les ensembles dont une description analytique est la suivante

$$A = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 + 4x \geq 0 \text{ et } y \leq 4 - x^2\}.$$

$$B = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}, y^2 - 1 \leq x \text{ et } 1 - y \leq x \leq y + 1\}.$$

   Pour B donner une description analytique
   a) en commençant par l'ensemble de variation des abscisses puis, à abscisse fixée, l'ensemble de variation des ordonnées.
   b) idem mais en commençant par l'ensemble de variation des ordonnées.



3. Décrire analytiquement l'ensemble C hachuré ci-dessus.

Nombres complexes

1. On donne le complexe $z = 1 + i$.
   a) En déterminer le module et une forme trigonométrique. Le représenter dans le plan muni d'un repère orthonormé (X = "axe réel" et Y = "axe imaginaire")
   b) Que vaut la partie réelle du complexe z^2 ?
   c) La partie imaginaire du carré d'un complexe est-elle toujours égale au carré de la partie imaginaire du complexe ? Pourquoi ?

2. Déterminer
   a) le module du complexe $\cos(2) + i\sin(2)$
   b) les parties réelle et imaginaire du complexe $z = \frac{1}{1-2i}$.

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$

$$a)\ z^2 - z + 1 = 0 \qquad\qquad b)\ z^2 + 25 = 0$$